

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 3

ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 3.1. Zeige, dass die nicht-leeren Zariski-offenen Teilmengen auf der affinen Geraden \mathbb{A}_K^1 genau die (maximalen) Definitionsbereiche von rationalen Funktionen sind.

Aufgabe 3.2. Es sei K ein unendlicher Körper und es sei $P \in K[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die durch P definierte Funktion $P: K \rightarrow K$ unendlich viele Werte annimmt.

Aufgabe 3.3. Skizziere die reellen Nullstellengebilde von $Y^n - X^n$ und bestimme das Verschwindungsideal zu den affin-algebraischen Mengen $V_n \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, die aus allen Geraden durch den Nullpunkt und durch die Eckpunkte eines regulären n -Ecks (mit $(1, 0)$ als einem Eck) besteht.

Aufgabe 3.4. Man beschreibe eine Abbildung

$$\varphi: \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1,$$

die bezüglich der Zariski-Topologie stetig ist, die aber nicht durch ein Polynom gegeben ist.

Aufgabe 3.5. Es sei

$$V \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n$$

eine affin-algebraische Menge. Zeige, dass unter der Identifizierung

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

die Teilmenge V auch eine affin-algebraische Menge des $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ ist. Zeige, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 3.6. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine nichtleere Teilmenge. Zeige, dass durch

$$d_T(x) := \inf (d(x, y), y \in T)$$

eine wohldefinierte, stetige Funktion $M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist.

Aufgabe 3.7. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann abgeschlossen ist, wenn es eine stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f^{-1}(0) = T$$

gibt.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass die offenen und die abgeschlossenen Bälle $U(P, r)$ bzw. $B(P, r)$ im \mathbb{R}^n zu $r > 0$ nicht offen bzw. abgeschlossen in der Zariski-Topologie sind.

Aufgabe 3.9. Charakterisiere in \mathbb{Z} die Radikale mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Ein Element a eines kommutativen Ringes R heißt *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ für eine natürliche Zahl n ist.

Aufgabe 3.10. Es sei R ein kommutativer Ring und es seien $f, g \in R$ nilpotente Elemente. Zeige, dass dann die Summe $f + g$ ebenfalls nilpotent ist.

Aufgabe 3.11.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ ein nilpotentes Element. Zeige, dass $1 + f$ eine Einheit ist.

Aufgabe 3.12. Es sei R ein kommutativer Ring und $r \in R$ ein nilpotentes Element. Konstruiere dazu ein lineares Polynom in $R[X]$, das eine Einheit ist. Man gebe auch das Inverse dazu an.

Ein kommutativer Ring R heißt *reduziert*, wenn 0 das einzige nilpotente Element von R ist.

Aufgabe 3.13.*

Zeige, dass ein Ideal \mathfrak{a} in einem kommutativen Ring R genau dann ein Radikal ist, wenn der Restklassenring R/\mathfrak{a} reduziert ist.

Aufgabe 3.14. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R . Zeige, dass die Potenzen \mathfrak{a}^n , $n \in \mathbb{N}_+$, alle dasselbe Radikal besitzen.

Aufgabe 3.15. Zeige, dass ein Primideal ein Radikal ist.

Aufgabe 3.16. Es seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Es sei \mathfrak{a} ein Radikal in S . Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Radikal in R ist.

Aufgabe 3.17. Seien \mathfrak{a} und \mathfrak{b} zwei Ideale in $K[X_1, \dots, X_n]$ derart, dass ihre Radikale gleich sind. Zeige, dass dann auch ihre Nullstellenmengen übereinstimmen. Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht stimmt.

AUFGABEN ZUM ABGEBEN

Aufgabe 3.18. (3 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m$$

eine Abbildung, die durch m Polynome in n Variablen gegeben sei. Zeige, dass φ stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 3.19. (4 Punkte)

Es sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass jede nichtleere Zariski-offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}_K^n$ dicht ist.

Tipp: Induktion über n .

Aufgabe 3.20. (5 Punkte)

Bestimme zu den folgenden Teilmengen der affinen Ebene \mathbb{A}_K^2 den Zariski-Abschluss.

- (1) $\{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
- (2) $\{(\cos(x), \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
- (3) $\{(x, x^3) \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$,
- (4) $\{(x, x^3) \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q}\}$,
- (5) $\{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{Z}/(5)\}$.

Die folgende Aufgabe benutzt einige weiterführende topologische Begriffe.

Aufgabe 3.21. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper.

- (1) Man zeige, dass für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ die Standardtopologie (die metrische oder euklidische Topologie) feiner ist als die Zariski-Topologie.
- (2) Man zeige, dass für $K[X]$ die Zariski-Topologie mit der kofiniten Topologie übereinstimmt. Gilt dies auch für $K[X_1, \dots, X_n]$ mit $n \geq 2$?

4

- (3) Wann ist die Zariski-Topologie T_1 , wann ist sie hausdorffsch?
- (4) Wie sieht die Zariski-Topologie aus, wenn K ein endlicher Körper ist?

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5