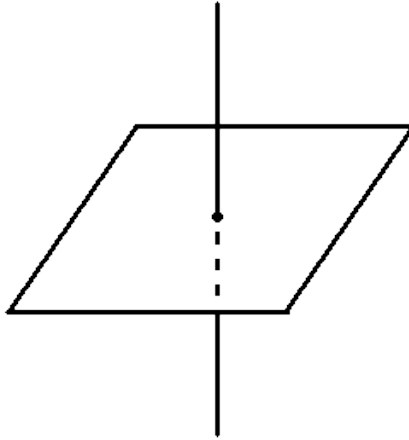


Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 4

ÜBUNGSAUFGABEN

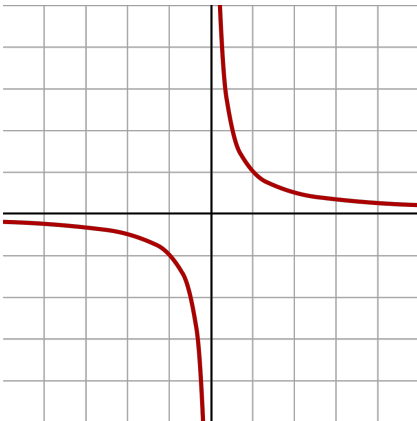
Aufgabe 4.1. Finde ein Ideal, dessen Nullstellenmenge das folgende Gebilde ist.



Aufgabe 4.2. Es sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge, die aus endlich vielen Punkten bestehe. Zeige: V ist genau dann irreduzibel, wenn V einpunktig ist.

Aufgabe 4.3. Skizziere ein Beispiel einer zusammenhängenden, aber nicht irreduziblen affin-algebraischen Teilmenge.

Aufgabe 4.4. Bestimme die irreduziblen Komponenten der reellen Hyperbel.



Aufgabe 4.5. Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $a \in K$ von 0 verschieden. Zeige, dass das Polynom

$$X^2 + Y^2 + a \in K[X, Y]$$

irreduzibel ist.

Aufgabe 4.6. Es sei K ein Körper und $\mathfrak{p} = (p) \subseteq K[X]$ ein Primideal. Zeige, dass die Verschwindungsmenge $V(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{A}_K^1$ leer (und damit nicht irreduzibel) oder aber einpunktig (und damit irreduzibel) ist.

Aufgabe 4.7. Es sei K ein endlicher Körper und $\mathfrak{p} \subset K[X_1, \dots, X_n]$ ein Primideal. Zeige, dass die Verschwindungsmenge $V(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ nur dann irreduzibel ist, wenn sie einpunktig ist.

Aufgabe 4.8. Zeige, dass das reelle Polynom

$$P = X^2(X - 1)^2 + Y^2(X^2 + (X - 1)^2) \in \mathbb{R}[X, Y]$$

ein Primpolynom ist, und dass die Nullstellenmenge

$$V(P) \subseteq \mathbb{R}^2$$

nicht leer, aber reduzibel ist.

Aufgabe 4.9. Berechne in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ den Schnitt des Zylinders $V(x^2 + y^2 - 1)$ mit der Kugel mit Mittelpunkt $P = (0, 0, 0)$ und Radius r in Abhängigkeit von r . Wann ist der Durchschnitt leer, wann irreduzibel?

Man darf verwenden, dass der reelle Kreis irreduzibel ist.

Aufgabe 4.10. Betrachte die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} mit der metrischen Topologie. Ist \mathbb{R} irreduzibel?

Aufgabe 4.11. Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Zeige: Jede Quadrik der Form

$$F = aX^2 + bY^2 + c = 0$$

mit $a, b \neq 0$ hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{Z}/(p)$.

Aufgabe 4.12. Es sei \mathfrak{a} ein Ideal in einem kommutativen Ring R . Zeige, dass \mathfrak{a} genau dann ein Primideal ist, wenn \mathfrak{a} der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi: R \rightarrow K$ in einen Körper K ist.

Aufgabe 4.13. Zeige, dass ein maximales Ideal \mathfrak{m} in einem kommutativen Ring R ein Primideal ist.

Aufgabe 4.14.*

Es sei R ein kommutativer Ring und \mathfrak{p} ein Ideal. Zeige, dass \mathfrak{p} genau dann ein Primideal ist, wenn der Restklassenring R/\mathfrak{p} ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 4.15. Es sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal in einem kommutativen Ring R . Zeige, dass aus einer Inklusionsbeziehung

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$$

die Inklusion $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt.

Aufgabe 4.16. Es seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Es sei \mathfrak{p} ein Primideal in S . Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

Aufgabe 4.17. Es sei K ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Zeige, dass es unendlich viele Zwischenkörper zwischen K und L gibt.

Aufgabe 4.18. Erkläre, wo der Beweis zu Satz 4.8 zusammenbricht, wenn man ihn auf mehr als zwei Variablen ausdehnen will.

Aufgabe 4.19. Es seien $P(X)$ und $Q(Y)$ nichtkonstante Polynome in der einen angegebenen Variablen. Man gebe eine Abschätzung (unter welcher Bedingung?) für die Anzahl der Schnittpunkte der beiden Kurven $V(Y - P(X))$ und $V(X - Q(Y))$.

In den folgenden Aufgabe werden die Begriffe *abgeschlossene Abbildung* und *offene Abbildung* verwendet.

Eine stetige Abbildung

$$f: X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *abgeschlossen*, wenn Bilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind.

Sie heißt *offen*, wenn Bilder von offenen Mengen wieder offen sind.

Aufgabe 4.20. Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1, (x, y) \longmapsto x,$$

nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 4.21. Zeige, dass eine ebene algebraische Kurve über den komplexen Zahlen \mathbb{C} nicht kompakt in der metrischen Topologie ist.

AUFGABEN ZUM ABGEBEN

Aufgabe 4.22. (6 Punkte)

Es sei p eine Primzahl ≥ 3 und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Es sei ein Polynom $F \in \mathbb{Z}/(p)[X, Y]$ der Form

$$F = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta X + \epsilon Y + \eta$$

gegeben. Zeige, dass für das zugehörige Nullstellengebilde $V(F) \subseteq \mathbb{A}_K^2$ (wenn α, β, γ nicht alle 0 sind, so ist das eine Quadrik) die folgenden drei Alternativen bestehen.

- (1) $V(F)$ besitzt mindestens einen Punkt.
- (2) $F = c$ mit einer Konstanten $c \neq 0$.

- (3) Es gibt eine Variablentransformation derart, dass das Polynom in den neuen Koordinaten die Gestalt $Z^2 - u$ mit einem Nichtquadrat $u \in \mathbb{Z}/(p)$ besitzt.

Aufgabe 4.23. (3 Punkte)

Es sei V eine irreduzible, affin-algebraische Menge mit mindestens zwei Punkten und seien $P_1, \dots, P_m \in V$ endlich viele Punkte darin. Zeige, dass dann auch $V \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$ (in der induzierten Topologie) irreduzibel ist.

Aufgabe 4.24. (4 Punkte)

Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich mit Quotientenkörper $Q(R)$. Zeige: Wenn $F, G \in R[X]$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so besitzen sie aufgefasst in $Q(R)[X]$ ebenfalls keinen gemeinsamen Teiler.

(Man darf sich auf Hauptidealbereiche R beschränken.)

Aufgabe 4.25. (3 Punkte)

Es sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Begründe, ob

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$$

irreduzibel ist oder nicht.

Tipp: Man verwende Aufgabe 1.26 und Korollar 4.9.

Aufgabe 4.26. (4 Punkte)

Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1, (x, y) \longmapsto x,$$

offen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 4.27. (4 Punkte)

Zeige, dass die affine Ebene \mathbb{A}_K^2 mit der Zariski-Topologie kompakt ist.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

- Quelle = Non cohen macaulay scheme thumb.png , Autor = Benutzer Jakob.scholbach auf en.wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 1
- Quelle = Rectangular hyperbola.svg , Autor = Benutzer Qef auf Commons, Lizenz = PD 2
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7