Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 5

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. Es sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom mit Nullstellenmenge $V(F)$. Zeige, dass für jeden Punkt $P \in V(F)$ und jeden Skalar $\lambda \in K$ auch $\lambda P \in V(F)$ ist.

Aufgabe 5.2. Bestimme die Faktorzerlegegung für die Polynome

$$X^n - Y^n \in \mathbb{C}[X, Y]$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 5.3. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein homogenes Polynom. Zeige: F zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 5.4. Es sei K ein Körper und $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom. Es sei $F = GH$ eine Faktorzerlegung. Zeige, dass G und H ebenfalls homogen sind.

Aufgabe 5.5. Zeige, dass ein homogenes Polynom unter einer linearen Variablentransformation homogen vom gleichen Grad bleibt, und dass dies bei einer affin-linearen Variablentransformation nicht sein muss.

Aufgabe 5.6. Zeige, dass für affin-algebraische Mengen $V, V' \subseteq \mathbb{A}_K^n$ die Beziehung der affin-linearen Äquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 5.7. Es sei $P = (a, b)$ ein Punkt in der affinen Ebene und L und L' verschiedene Geraden durch P. Es sei $C = V(F)$, $F \in K[X, Y]$, eine ebene algebraische Kurve. Beschreibe explizit eine Variablentransformation (einen Koordinatenwechsel) derart, dass in den neuen Koordinaten P der Nullpunkt wird und die Geraden zum Achsenkreuz werden. Wie lautet die Kurvengleichung in den neuen Koordinaten?

Aufgabe 5.8. Es sei sowohl C als auch D eine ebene affin-algebraische Kurve, die jeweils aus der Vereinigung von drei (verschiedenen) Geraden bestehen, die sich jeweils in einem Punkt treffen. Zeige, dass es einen affin-linearen Koordinatenwechsel gibt, der C in D überführt.

Aufgabe 5.9. Es sei sowohl C als auch D eine ebene affin-algebraische Kurve, die jeweils aus der Vereinigung von vier (verschiedenen) Geraden bestehen, die sich jeweils in einem Punkt treffen. Zeige, dass es im Allgemeinen keinen affin-linearen Koordinatenwechsel gibt, der C in D überführt.

Die folgenden beiden Aufgaben dienen dem Verständnis von Satz 5.4 und Korollar 5.5.

Aufgabe 5.10. Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf das Polynom Y an.

Aufgabe 5.11. Wende (den Beweis zu) Satz 5.4 auf die Hyperbel $XY - 1$ an.

Aufgabe 5.12. Wende (den Beweis zu) Satz 5.4 auf das Polynom $X^2Y^3 + 5X^3Y^2 - X^2Y^2 + 3Y + 7 \in \mathbb{C}[X]$ an.

Aufgabe 5.13. Es sei $F \in \mathbb{C}[X,Y]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass die zugehörige algebraische Kurve $C = V(F)$ überabzählbar viele Elemente besitzt.

Aufgabe 5.14.*

Es sei $M = \{P_1, \ldots, P_n\} \subseteq K^2$ eine endliche Punktmenge in der Ebene über einem unendlichen Körper.

(a) Zeige, dass man M als Durchschnitt von zwei algebraischen Kurven erhalten kann.
(b) Zeige, dass man M als Durchschnitt von zwei irreduziblen algebraischen Kurven erhalten kann.

Aufgabe 5.15. Berechne das Bild $\tilde{F}$ des Polynoms

$$F = X^2Y + 3XY - Y^3$$

unter dem durch

$$X \longmapsto T^2 + S - 3,\ Y \longmapsto 3TS + S^2 - T$$

definierten Einsetzungshomomorphismus

$$K[X,Y] \longrightarrow K[S,T].$$

Aufgabe 5.16. Es sei K ein unendlicher Körper und es sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom mit der zugehörigen Abbildung

$$F\colon \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^1 .$$

Zeige mit und ohne Satz 5.10, dass das Bild von F einpunktig oder unendlich ist.

Aufgabe 5.17. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und

$$P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{A}_K^2$$

n Punkte in der affinen Ebene. Zeige, dass es genau dann eine polynomiale Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2$$

mit $\operatorname{bild} \varphi = \{P_1, \ldots, P_n\}$ gibt, wenn $1 \leq n \leq q$ ist.

Aufgabe 5.18.*

Man gebe ein Beispiel für eine polynomiale Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

derart, dass das Urbild von einem Punkt reduzibel ist, das Urbild von allen anderen Punkten aber irreduzibel.

Aufgabe 5.19.*

Es sei K ein Körper. Wir betrachten zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ die Abbildung

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^n,\, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \longmapsto (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}),$$

die einem Nullstellentupel $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ das Koeffiziententupel $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ (ohne die 1) des normierten Polynoms

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n) = P = c_0 + c_1 X + \cdots + c_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

zuordnet.

(1) Beschreibe φ explizit für $n = 2$.
(2) Beschreibe φ explizit für $n = 3$.
(3) Begründe, dass die φ polynomiale Abbildungen sind.
(4) Zeige, dass die Fasern von φ endlich sind.
(5) Wann ist die Faser zu einem Tupel $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ leer?
(6) Was ist die maximale Anzahl in einer Faser? Man gebe Beispiele, dass diese Maximalanzahl für $K = \mathbb{R}$ erreicht wird.
(7) Es sei K nun algebraisch abgeschlossen. Zeige, dass φ surjektiv ist.

Aufgabe 5.20. Es sei
$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^r \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$
eine polynomiale Abbildung und sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^r$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Gleichheit
$$\overline{\varphi(T)} = \overline{\varphi(\overline{T})}$$
gilt.

Aufgabe 5.21. Zeige, dass die Aussage von Aufgabe 5.20 nicht ohne die Voraussetzung gilt, dass die Abbildung polynomial ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.22. (3 Punkte)

Wie viele Monome vom Grad d gibt es im Polynomring in einer, in zwei und in drei Variablen?

Aufgabe 5.23. (3 Punkte)

Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf die algebraische Kurve an, die zur rationalen Funktion
$$Y = \frac{X^2 - 2X}{X^2 - 1}$$
gehört.

Aufgabe 5.24. (3 Punkte)

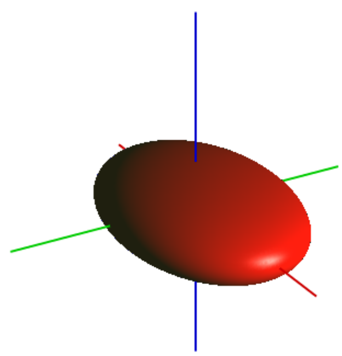
Betrachte die Abbildung
$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ (x, y) \longmapsto (x, xy).$$
Bestimme das Bild und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 5.25. (3 Punkte)

Betrachte das *Ellipsoid*

$$E = V(2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 5) = \{(x, y, z) \mid 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 5\}.$$

Finde eine affin-lineare Variablentransformation (über $\mathbb{R}$) derart, dass das Bild von E unter der Abbildung die *Standardkugel* $V(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ wird.



Ein Ellipsoid: In der algebraischen Geometrie ist damit die Oberfläche gemeint.

Aufgabe 5.26. Es seien V und $\tilde{V}$ affin-algebraische Mengen in $\mathbb{A}^2_K$ zu $K = \mathbb{Z}/(2)$. Zeige, dass diese beiden Mengen genau dann affin-linear äquivalent sind, wenn sie die gleiche Anzahl besitzen.

Zeige ebenso, dass dies bei $K = \mathbb{Z}/(p)$ für $p \geq 3$ und auch für $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}/(2)}$ für $n \geq 3$ nicht gilt.

Abbildungsverzeichnis