Prof. Dr. H. Brenner **Universität Osnabrück WiSe 2025-26**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 7

Übungsaufgaben

Aufgabe 7.1. Bestimme die „Kugelschnitte“. Welche davon sind Kegelschnitte?

Aufgabe 7.2. Bestimme die „Zylinderschnitte“. Welche davon sind Kegelschnitte?

Aufgabe 7.3. Bestimme die Kegelschnitte, die sich als Schnitt mit einer Ebene ergeben, die durch den Nullpunkt verläuft.

Aufgabe 7.4. Zeige, dass parallele Ebenen, die beide nicht durch den Nullpunkt gehen, den gleichen Typ von Kegelschnitt definieren.

Aufgabe 7.5. Wir betrachten den Standardkegel $V(Z^2 - X^2 - Y^2) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ und die Ebenen, die durch die Drehachse $V(X, Z)$ verlaufen. Bestimme, in Abhängigkeit vom Drehwinkel α (gemessen in der $x - z$-Ebene gegen den Uhrzeigersinn), den Typ des durch die Ebene E_α gegebenen Kegelschnitts.

Aufgabe 7.6. Wir betrachten den Standardkegel $V(Z^2 - X^2 - Y^2) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ und die Ebenen, die durch die Drehachse $V(X - 1, Z)$ verlaufen. Bestimme, in Abhängigkeit vom Drehwinkel α (gemessen in der $x - z$-Ebene gegen den Uhrzeigersinn), den Typ des durch die Ebene E_α gegebenen Kegelschnitts.

Aufgabe 7.7. Wir betrachten den Standardkegel $V(Z^2 - X^2 - Y^2) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ und die Ebenen, die durch die Drehachse $V(X-1, Z-1)$ verlaufen. Bestimme, in Abhängigkeit vom Drehwinkel α (gemessen in der $x - z$-Ebene gegen den Uhrzeigersinn), den Typ des durch die Ebene E_α gegebenen Kegelschnitts.

Aufgabe 7.8. Transformiere die Quadrik

$$2x^2 + xy - 3y^2 + 5x - y + 3$$

auf eine reelle Standardgestalt.

Aufgabe 7.9. Parametrisiere die durch

$$F = 2x^2 - xy + 3y^2 + x - 5y$$

definierte Quadrik mit Hilfe des Nullpunktes und der Geraden $V(y-1)$.

Aufgabe 7.10.*

Betrachte die beiden Kreise

$$X^2 + Y^2 = 1 \text{ und } 4X^2 + 3Y^2 = 9\,.$$

Zeige, dass die beiden Kreise über $\mathbb{R}$ affin-linear äquivalent sind, aber nicht über $\mathbb{Q}$.

Tipp: Eine Argumentationsmöglichkeit ergibt sich aus Satz 7.2 (Maß- und Integrationstheorie (Osnabrück 2022-2023)).

Aufgabe 7.11.*

Es sei $F = (0,0)$ der Nullpunkt in der reellen Ebene und $G = V(X-1)$. Es sei $e > 0$ eine reelle Zahl. Bestimme eine algebraische Gleichung für die Menge der Punkte $P = (x,y)$ mit der Eigenschaft, dass der Abstand $d(P,F)$ proportional mit Proportionalitätsfaktor $\sqrt{e}$ zum (senkrechten) Abstand $d(P,G)$ ist.

Zeige, indem Sie die Gleichung geeignet transformieren, dass bei $e < 1$ eine Ellipse, bei $e = 1$ eine Parabel und bei $e > 1$ eine Hyperbel vorliegt.

Aufgabe 7.12. Bestimme für das Bild der Abbildung

$$\mathbb{A}^1_K \setminus \{-1,0,1\} \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\ t \longmapsto \left(\frac{t}{t^2-1}, \frac{1}{t} \right)$$

eine nichttriviale algebraische Gleichung.

Aufgabe 7.13. Betrachte die durch

$$C = V(X^{d+1} - Y^d)$$

definierte algebraische Kurve C ($d \geq 1$). Zeige, dass man mit dem Nullpunkt und der Geraden $V(X-1)$ eine Parametrisierung von C erhält mit der im Beweis zu Satz 7.6 beschriebenen Methode.

In den folgenden Aufgaben besprechen wir ein Automorphismuskonzept, das über affin-lineare Koordinatenwechsel hinausgeht.

Es sei K ein Körper. Eine polynomiale Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$$

heißt (polynomialer) *Automorphismus des affinen Raumes*, wenn sie eine polynomiale Umkehrabbildung besitzt.

Ein Automorphismus des affinen Raumes ist das gleiche wie ein K-Algebra-Automorphismus des Polynomrings $K[X_1, \ldots, X_n]$ in sich. Er wird durch n Polynome in n Variablen gegeben.

Aufgabe 7.14. Zeige, dass ein K-Algebraautomorphismus

$$\varphi\colon K[X] \longrightarrow K[X]$$

durch $X \mapsto aX + b$ mit $a \neq 0$ gegeben ist (also durch eine affin-lineare Variablentransformation).

Aufgabe 7.15. Man gebe ein Beispiel für eine bijektive polynomiale Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1,$$

deren Umkehrabbildung nicht polynomial ist.

Aufgabe 7.16. Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y).$$

Aufgabe 7.17. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$$

ein Automorphismus des affinen Raumes. Zeige, dass die Jacobi-Determinante konstant gleich einem $c \neq 0$ ist.

Das *Jacobi-Problem* ist die Frage, ob eine polynomiale Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n,$$

für den die Jacobi-Determinante konstant gleich 1 ist, eine polynomiale Umkehrabbildung besitzt (also ein Automorphismus des affinen Raumes ist). Diese Problem ist schon bei $n = 2$ offen. Aufgrund des Satzes über die Umkehrabbildung gibt es unter der gegebenen Voraussetzung in jedem Punkt lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung.

Aufgabe 7.18. Es sei $F \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ (x,y) \longmapsto (x, y + F(x)),$$

ein Automorphismus des affinen Raumes ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

Zwei affin-algebraische Mengen $V, \tilde{V} \subseteq \mathbb{A}_K^n$ heißen *affin-algebraisch äquivalent*, wenn es einen Automorphismus des affinen Raumes $\varphi\colon \mathbb{A}_K^n \to \mathbb{A}_K^n$ mit

$$\varphi^{-1}(V) = \tilde{V}$$

gibt.

Aufgabe 7.19. Es sei $F \in K[X]$ ein Polynom und

$$C = V(Y - F(X)) \subset \mathbb{A}_K^2$$

der zugehörige Graph. Zeige, dass C zur x-Achse $V(Y) \subset \mathbb{A}_K^2$ affin-algebraisch äquivalent ist, aber im Allgemeinen nicht affin-linear äquivalent.

Aufgabe 7.20. Es seien

$$V, \tilde{V} \subset \mathbb{A}_K^n$$

zueinander affin-algebraisch äquivalente affin-algebraische Mengen mit den Verschwindungsidealen $\operatorname{Id}(V)$ und $\operatorname{Id}(\tilde{V})$. Zeige, dass dann die Restklassenringe $K[X_1, \ldots, X_n]/\operatorname{Id}(V)$ und $K[X_1, \ldots, X_n]/\operatorname{Id}(\tilde{V})$ zueinander isomorph sind.

Aufgabe 7.21. Welche Quadriken im $\mathbb{R}^2$ (im $\mathbb{C}^2$) sind zueinander affin-algebraisch äquivalent?

Aufgabe 7.22. Bestimme die Quadriken zu homogenen quadratischen Polynomen in zwei Variablen.

Aufgabe 7.23.*

Führe für die rationale Quadrik

$$C = V(X^2 + Y^2 - 5) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$$

eine rationale Parametrisierung im Sinne von Satz 7.6 mit dem Hilfspunkt $(1, 2)$ und einer geeigneten Geraden durch.

Aufgabe 7.24. Es sei p eine Primzahl mit $p \mod 4 = 3$. Begründe unter Bezug auf Satz 9.10 (Zahlentheorie (Osnabrück 2025)), dass die rationale Quadrik

$$C = V(X^2 + Y^2 - p) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$$

leer ist.

Aufgabe 7.25. Es sei R ein Integritätsbereich und $r \in R$ ein Element, das keine Quadratwurzel in R besitze. Zeige, dass das Polynom $X^2 - r \in R[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 7.26. Es sei R ein Integritätsbereich mit $2 \neq 0$ und sei $r \in R$ ein Element, das in R keine Quadratwurzel besitze. Wir betrachten die quadratische Ringerweiterung

$$R \subset R[X]/(X^2 - r) =: S.$$

Zeige, dass die Elemente $f \in R$, die in S eine Quadratwurzel besitzen, von der Form

$$f = y^2$$

mit $y \in R$ oder von der Form

$$f = rz^2$$

mit $z \in R$ sind.

Aufgabe 7.27. Es seien p und q verschiedene Primzahlen. Zeige, dass die (über $\mathbb{Q}$ definierten) Quadriken

$$C = V(X^2 + Y^2 - p), D = V(X^2 + Y^2 - q) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$$

nicht zueinander affin-linear äquivalent sind.

Tipp: Wende Aufgabe 7.26 auf $R = K[Y]$ und $S = (K[Y])[X]/(X^2 - Y^2 + p)$ an.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.28. (6 Punkte)

Finde für die verschiedenen reellen Quadriken eine Realisierung als Kegelschnitt, also als Schnitt einer Ebene mit dem Kegel $V(x^2 + y^2 - z^2)$, oder beweise, dass es eine solche Realisierung nicht gibt.

Aufgabe 7.29. (9 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\ (u, v) \longmapsto (u^2 + uv, v - u^2) = (x, y).$$

Bestimme zu den drei folgenden Scharen aus parallelen Geraden die Bildkurven der Geraden unter dieser Abbildung (man gebe sowohl eine Parametrisierung als auch eine Kurvengleichung).

(1) Die zur u-Achse parallelen Geraden,
(2) die zur v-Achse parallelen Geraden,

(3) die zur Antidiagonalen parallelen Geraden.

Bestimme zu jeder Schar, ob sich die Bildkurven überschneiden.

Aufgabe 7.30. (4 Punkte)

Es seien $F, G \in K[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Diskutiere, wie sich die verschiedenen Äquivalenzbegriffe aus der siebten Vorlesung für F und G (und für $V(F)$ und $V(G)$) unter dem Körperwechsel verhalten.

Aufgabe 7.31. (6 Punkte)

Wir betrachten die beiden Restklassenringe

$$R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \text{ und } S = \mathbb{R}[X,Y]/(XY-1)\,.$$

Zeige: S ist ein Hauptidealbereich, R hingegen nicht.

(Das sind die Ringe, die zum reellen Kreis und zur reellen Hyperbel gehören.) Tipp: Man betrachte für R das Ideal $(X-1, Y)$.

Aufgabe 7.32. (4 Punkte)

Parametrisiere die durch

$$F \,=\, x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y + 4$$

definierte Quadrik $C = V(F)$ mit Hilfe des Punktes $(1,2) \in C$ und der y-Achse. Führe keine Variablentransformation durch.

Aufgabe 7.33. (6 Punkte)

Betrachte in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ die beiden Nullstellenmengen

$$K = V(X^2+Y^2-1) \text{ und } C = V(X^4+Y^4-1)\,.$$

Zeige, dass es eine polynomiale Abbildung in zwei Variablen gibt, die die eine Nullstellenmenge surjektiv auf die andere abbildet. Zeige, dass diese Abbildung schon über $\mathbb{Q}$ definiert ist, dort aber nicht surjektiv ist. Zeige ferner, dass es über $\mathbb{Q}$ überhaupt keine surjektive polynomiale Abbildung von C nach K geben kann und dass es nur die konstanten polynomialen Abbildungen von K nach C gibt.

Aufgabe 7.34. (6 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom. Zeige, dass die Kurve $V(F)$ genau dann rational ist, wenn es einen injektiven K-Algebrahomomorphismus

$$Q(K[X,Y]/(F)) \longrightarrow K(T)$$

gibt.

(Hier steht links der Quotientenkörper und rechts der rationale Funktionenkörper.)

Abbildungsverzeichnis