

## Algebraische Kurven

### Arbeitsblatt 8

#### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 8.1.** Bestimme die möglichen Durchschnitte von zwei zueinander senkrechten Zylindern.

**Aufgabe 8.2.** Erstelle eine möglichst einfache Gleichung für das mechanische System, das durch die  $X$ -Achse, die (verschobene) Parabel  $Y = X^2 + 1$  und den Abstand 2 gegeben ist.

**Aufgabe 8.3.** Es seien  $H_1, H_2 \in K[X]$  Polynome in einer Variablen und  $C_1 = V(Y - H_1)$  und  $C_2 = V(Y - H_2)$  die zugehörigen Graphen im  $\mathbb{A}_K^2$ . Zeige, dass man das zugehörige mechanische System mit zwei Variablen beschreiben kann.

**Aufgabe 8.4.** Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch den Einheitskreis, die  $x$ -Achse und den Abstand 1 gegeben ist. Was sind die irreduziblen Komponenten des Systems?

**Aufgabe 8.5.** Es sei  $M \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$  ein durch die beiden Bahnen  $B_1$  und  $B_2$  und den Abstand  $d$  gegebenes mechanisches System. Zeige, dass es eine natürliche injektive Abbildung

$$M \longrightarrow B_1 \times B_2$$

gibt.

**Aufgabe 8.6.** Es sei

$$B = V(G) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$$

eine Bahn, die wir als mechanisches System  $M$  in dem Sinne auffassen, dass die beiden Punkte mit dem Abstand  $d$  auf dieser einen Bahn liegen müssen. Zeige, dass es eine natürliche fixpunktfreie bijektive Abbildung

$$M \longrightarrow M$$

gibt.

**Aufgabe 8.7.** Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch die  $x$ -Achse (als gemeinsame Bahn) und den Abstand 1 gegeben ist.

**Aufgabe 8.8.** Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch den Einheitskreis (als gemeinsame Bahn) und den Abstand 2 gegeben ist.

**Aufgabe 8.9.\***

Wir betrachten das mechanische System, das durch den Einheitskreis und die dazu tangentielle Gerade durch  $(0, 1)$  mit dem Koppelungsabstand  $d = 2$  definiert ist. Zeige, dass man dieses System mit zwei Variablen beschreiben kann.

**Aufgabe 8.10.** Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch die  $x$ -Achse, die  $y$ -Achse und den Abstand 1 gegeben ist.

**Aufgabe 8.11.** Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch das Achsenkreuz (als gemeinsame Bahn) und den Abstand 1 gegeben ist.

**Aufgabe 8.12.** Es seien

$$B_1 = V(F_1), B_2 = V(F_2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$$

zwei Bahnen, und es sei ein Abstand  $d$  fixiert. Vergleiche das mechanische System  $M$  zu diesen Bahnen mit dem System  $N$ , das zu der einen Bahn  $B_1 \cup B_2$  gehört. Zeige, dass es zwei natürliche injektive Abbildungen

$$M \longrightarrow N$$

gibt. Es sei  $L_i$  das mechanische System das zu  $B_i$  als alleiniger Bahn gehört. Zeige, dass es eine natürliche surjektive Abbildung der Form

$$L_1 \uplus L_2 \uplus M \uplus M \longrightarrow N$$

gibt.

**Aufgabe 8.13.** Es sei  $M \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$  ein mechanisches System. Zeige, dass durch

$$M \longrightarrow S^1(d), (P_1, P_2) \longmapsto P_1 - P_2,$$

eine Abbildung des Systems auf den Kreis mit Radius  $d$  gegeben ist. Was bedeutet die Surjektivität dieser Abbildung? Kann diese Abbildung nur endlich viele Bildpunkte besitzen?

**Aufgabe 8.14.** Wir betrachten das mechanische System  $M \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$  zu zwei sich kreuzenden Geraden. Zeige, dass die Abbildung aus Aufgabe 8.13 bijektiv ist.

**Aufgabe 8.15.** Wir betrachten das mechanische System  $M \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$  zum Einheitskreis, zum Kreis mit Mittelpunkt  $(0, 2)$  und Radius 4 und zum Koppelungsabstand 5. Zeige, dass die Abbildung aus Aufgabe 8.13 nicht surjektiv ist. Was ist das Bild?

In den folgenden Aufgaben betrachten wir die Nullstellenmenge

$$V = V(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$$

differentialgeometrisch. Wir erinnern an die folgende Definition von einem regulären Punkt zu einer differenzierbaren Abbildung aus der Analysis 2 Vorlesung. Dieser Begriff ist im jetzigen Kontext auf die Abbildung

$$\varphi = (f_1, \dots, f_k): \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^k$$

in einem Punkt  $P \in V$  anzuwenden.

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen, sei  $P \in G$  und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine in  $P$  differenzierbare Abbildung. Dann heißt  $P$  ein *regulärer Punkt* von  $\varphi$ , wenn

$$\text{rang}(D\varphi)_P = \min(\dim(V), \dim(W))$$

ist. Andernfalls heißt  $P$  ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

**Aufgabe 8.16.\***

Wir betrachten das mechanische System, das durch die  $x$ -Achse und den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(0, 2)$  gegeben ist. Der Koppelungsabstand sei  $d > 0$ .

- (a) Erstelle die Gleichungen, die dieses System beschreiben.
- (b) Bestimme, für welche  $d$  das System in jedem Punkt regulär ist.
- (c) Bestimme die kritischen Punkte in Abhängigkeit von  $d$ . Wie kann man diese Punkte als Eigenschaft des mechanischen Systems erklären?

**Aufgabe 8.17.** Wir betrachten das mechanische System, das durch die  $x$ -Achse und den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(0, 2)$  gegeben ist. Der Koppelungsabstand sei  $d > 0$ .

- (1) Begründe anschaulich und zeige, dass dieses mechanische System zu  $d > 3$  nicht (in der reellen Topologie) wegzusammenhängend ist.
- (2) Begründe anschaulich und zeige, dass dieses mechanische System zu  $1 \leq d \leq 3$  wegzusammenhängend ist.

## AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 8.18.** (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten das mechanische System, das durch die  $x$ -Achse, die Parabel  $V(Y - X^2)$  und den Koppelungsabstand 1 gegeben ist.

- (1) Bestimme Gleichungen (in möglichst wenigen Variablen) für das mechanische System.
- (2) Besitzt das System kritische Punkte?
- (3) Bestimme die Gleichung für den Bewegungsvorgang zum Mittelpunkt der Verbindungsstange.

**Aufgabe 8.19.** (2 Punkte)

Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch den Einheitskreis (als gemeinsame Bahn) und den Abstand 1 gegeben ist.

**Aufgabe 8.20.** (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten das mechanische System, das durch die Parabel  $V(Y - X^2)$ , den Kreis mit Mittelpunkt  $(0, 2)$  und Radius 1 und den Koppelungsabstand 1 gegeben ist.

- (1) Bestimme Gleichungen (in möglichst wenigen Variablen) für dieses mechanische System.
- (2) Bestimme die Zusammenhangskomponenten des Systems in der metrischen Topologie.
- (3) Bestimme die Zusammenhangskomponenten des Systems in der Zariski-Topologie.

**Aufgabe 8.21.** (6 (2+4) Punkte)

Wir betrachten das mechanische System, das durch die  $x$ -Achse und den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(0, 2)$  gegeben ist. Der Koppelungsabstand sei  $d > 0$ . Wir knüpfen an Aufgabe 8.16 an.

- (a) Eliminiere die Variable  $y_1$  aus den Gleichungen des Systems.
- (b) Bestimme mit der einen beschreibenden Gleichung des Systems in den Variablen  $x_1$  und  $x_2$ , für welche  $d$  das System in jedem Punkt regulär ist.

**Aufgabe 8.22.** (6 Punkte)

Es sei  $C \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  der Schnitt von zwei Zylindern mit Radius 1 ( $C$  ist also die Vereinigung von zwei Ellipsen). Wir betrachten die durch einen Vektor  $v = (a, b, c) \neq 0$  definierte senkrechte Projektion

$$p_v: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2.$$

Man charakterisiere, in Abhängigkeit von  $a, b, c$ , die möglichen Bilder unter diesen Projektionen.

**Aufgabe 8.23.** (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, (x, y) \longmapsto (x^2, y^2) = (u, v).$$

Wie sieht das Bild der Ebene und wie das Bild des Einheitskreises unter dieser Abbildung für  $K = \mathbb{R}$  und wie für  $K = \mathbb{C}$  aus? Im reellen Fall, wenn der Kreis einmal durchlaufen wird, wie oft wird das Bild durchlaufen?



## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7