

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 9

ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 9.1. Begründe, warum der Ring

$$\mathbb{Z}[X, Y, Z, W]/(XY - ZW, 5X^8 - YZ^3 + 2WXY)$$

noethersch ist.

Aufgabe 9.2. Es sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$ ebenfalls ein Ideal ist. Zeige durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 9.3. Zeige, dass das Produkt $R \times S$ zu noetherschen Ringen R und S wieder noethersch ist.

Aufgabe 9.4. Es sei K ein Körper. Zeige, dass es in $K[X, Y]$ keine obere Schranke für die Anzahl der Erzeuger von Idealen (in einem minimalen Erzeugendensystem) gibt.

Tipp: Betrachte die Potenzen $(X, Y)^m$.

Aufgabe 9.5. Es sei K ein Körper und sei

$$K[X_n, n \in \mathbb{N}]$$

der Polynomring über K in unendlich vielen Variablen. Man beschreibe darin ein nicht endlich erzeugtes Ideal und eine unendliche, echt aufsteigende Idealkette.

Aufgabe 9.6.*

Zeige, dass ein Unterring $R \subseteq S$ eines noetherschen Ringes nicht noethersch sein muss.

Aufgabe 9.7. Man gebe ein Beispiel eines nicht-noetherschen Ringes, dessen Reduktion ein Körper ist.

Aufgabe 9.8. Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{b} \subseteq R[X]$ ein Ideal, das zumindest ein normiertes Polynom enthalte. Was bedeutet dies für die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette in R .

Aufgabe 9.9. Es sei R ein kommutativer Ring. Charakterisiere diejenigen Ideale $\mathfrak{b} \subseteq R[X]$ mit der Eigenschaft, dass die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette in R konstant ist.

Aufgabe 9.10. Es sei K ein Körper und sei $R = K[X]$ der Polynomring über K . Bestimme zu den Idealen

$$\mathfrak{b} = (X, Y)^m \subseteq R[Y] = K[X, Y]$$

die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette in R . Wann wird sie stationär?

Aufgabe 9.11. Bestimme zum Ideal

$$I = (6, 6x^2 + 2x + 3, 3x^3 + 5, 2x^5 + x - 4, 4x^7 - 3x)$$

in $\mathbb{Z}[x]$ die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette und das zugehörige Erzeugendensystem von I . Schreibe die obigen Erzeuger als Linearkombination des konstruierten Erzeugendensystems.

Aufgabe 9.12. Wir betrachten auf- und absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen in \mathbb{A}_K^n und von Idealen in $K[X_1, \dots, X_n]$. Zeige die folgenden Aussagen.

- (a) Für einen endlichen Körper wird jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär.

- (b) Für einen unendlichen Körper und $n \geq 1$ wird nicht jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär.

- (c) Für (einen beliebigen Körper und) $n \geq 1$ wird nicht jede absteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \dots$$

stationär.

- (d) Für einen unendlichen Körper und $n \geq 1$ gibt es echt absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen beliebiger Länge.

Aufgabe 9.13. Zeige, dass die reellen Zahlen \mathbb{R} mit der metrischen Topologie kein noetherscher topologischer Raum ist.

Aufgabe 9.14. Es sei G eine kommutative Gruppe. Zeige, dass G auf genau eine Weise die Struktur eines \mathbb{Z} -Moduls trägt. Kommutative Gruppen und \mathbb{Z} -Moduln sind also äquivalente Objekte.

Aufgabe 9.15. Es seien R und A kommutative Ringe. Zeige, dass A genau dann eine R -Algebra ist, wenn A ein R -Modul ist, für den zusätzlich

$$r(ab) = (ra)b \text{ für alle } r \in R, a, b \in A$$

gilt.

Aufgabe 9.16.*

Es sei V ein Modul über dem kommutativen Ring R . Es seien $s_1, \dots, s_k \in R$ und $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeige

$$\left(\sum_{i=1}^k s_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n v_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n} s_i \cdot v_j.$$

Aufgabe 9.17. Es sei R ein kommutativer Ring, M und N zwei R -Moduln und sei

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

ein Modulhomomorphismus. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Für einen R -Untermodul $S \subseteq M$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Untermodul von N .
- (2) Insbesondere ist das Bild $\text{Bild } \varphi = \varphi(M)$ der Abbildung ein Untermodul von N .
- (3) Für einen Untermodul $T \subseteq N$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Untermodul von M .
- (4) Insbesondere ist der Kern $\varphi^{-1}(0)$ ein Untermodul von M .

AUFGABEN ZUM ABGEBEN

Aufgabe 9.18. (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und sei \mathfrak{a} ein Ideal mit dem Restklassenring

$$S = R/\mathfrak{a}.$$

Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die \mathfrak{a} umfassen.

Zeige, dass das Gleiche für Primideale, Radikalideale und maximale Ideale gilt.

Aufgabe 9.19. (4 Punkte)

Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeige, dass sich jedes Element aus R als ein Produkt von irreduziblen Elementen schreiben lässt.

Aufgabe 9.20. (4 Punkte)

Zeige, dass \mathbb{Q} keine Algebra von endlichem Typ über \mathbb{Z} ist.

Aufgabe 9.21. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei $A = K[X, Y]$. Finde eine K -Unteralgebra von A , die nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 9.22. (4 Punkte)

Bestimme zum Ideal

$$I = (10, 6x^2 + 8, 4x^3 - 12)$$

in $\mathbb{Z}[x]$ die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette und das zugehörige Erzeugendensystem von I . Schreibe die obigen Erzeuger als Linearkombination mit dem konstruierten Erzeugendensystem.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5