

Analysis III**Arbeitsblatt 78****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 78.1. Zeige, dass

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^4 ist.

AUFGABE 78.2. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Rotationsfläche des Graphen von f eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist.

AUFGABE 78.3. Zeige, dass die Menge aller reellen $n \times n$ -Matrizen mit Determinante 1 eine $(n^2 - 1)$ -dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n^2} ist.

AUFGABE 78.4. Man gebe ein Beispiel einer abgeschlossenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, die keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R} ist.

AUFGABE 78.5. Bestimme die abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R} .

AUFGABE 78.6. Bestimme die abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten von S^1 .

AUFGABE 78.7. Es seien M und N zwei disjunkte abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Zeige, dass deren Vereinigung $M \cup N$ ebenfalls eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist, und dass diese Aussage ohne die Voraussetzung der Disjunktheit nicht gilt.

AUFGABE 78.8. Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass der Graph $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} ist.

AUFGABE 78.9.*

Es sei $M \neq \emptyset$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n . Zeige, dass es eine Kette von abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

derart gibt, dass die abgeschlossene Untermannigfaltigkeit M_i die Dimension i besitzt.

AUFGABE 78.10. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\pi: TM \longrightarrow M$$

das Tangentialbündel. Zeige, dass diese Projektionsabbildung stetig ist.

AUFGABE 78.11. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei $\varphi: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi): TM \longrightarrow TN$$

stetig ist.

AUFGABE 78.12. Es sei TM das Tangentialbündel zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Zeige, dass die Mengen $(T(\alpha))^{-1}(V \times W)$ zu einer Karte

$$\alpha: U \longrightarrow V$$

mit $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen eine Basis der Topologie auf dem Tangentialbündel bilden.

AUFGABE 78.13. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Interpretiere die Hintereinanderschaltung

$$TM \longrightarrow T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{+} \mathbb{R}^n.$$

AUFGABE 78.14. Zeige, dass die Abbildung

$$TS^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2, ((a, b), t(-b, a)) \longmapsto (a, b) + t(-b, a),$$

für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ außerhalb der Einheitskreisscheibe zwei Urbildpunkte, auf dem Einheitskreis einen Urbildpunkt und innerhalb der offenen Einheitskreisscheibe keinen Urbildpunkt besitzt. Man interpretiere dies geometrisch.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 78.15. (8 (3+3+2) Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$.

a) Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid ux^m + vy^n = 1\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^4 ist.

b) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi: M \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, u, v) \longmapsto (x, y),$$

differenzierbar und in jedem Punkt $P \in M$ regulär ist.

c) Beschreibe die Fasern von φ .

AUFGABE 78.16. (10 (2+3+5) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto (x^2, x^3).$$

a) Zeige, dass diese Abbildung differenzierbar und injektiv ist.

b) Zeige, dass φ nicht in jedem Punkt regulär ist.

c) Zeige, dass das Bild von φ abgeschlossen in \mathbb{R}^2 ist, aber keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 ist.

AUFGABE 78.17. (4 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine differenzierbare Abbildung und M die Faser über $0 \in \mathbb{R}^m$. Es sei vorausgesetzt, dass das totale Differential in jedem Punkt dieser Faser surjektiv sei. Zeige, dass für $P \in M$ der Tangentialraum im Sinne von Definition 53.7 mit dem Tangentialraum der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M im Punkt P übereinstimmt.

AUFGABE 78.18. (4 Punkte)

Zeige, dass es eine Homöomorphie des Tangentialbündels T_{S^1} der 1-Sphäre S^1 mit dem Produkt $S^1 \times \mathbb{R}$ gibt.

4

AUFGABE 78.19. (5 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\pi: TM \longrightarrow M$$

das Tangentialbündel. Zeige, dass TM selbst in natürlicher Weise eine topologische Mannigfaltigkeit ist.