

**Analysis I****Arbeitsblatt 1****Übungsaufgaben**

AUFGABE 1.1. Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\}, N = \{a, c, e\}, P = \{b\}, R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

- (1)  $M \cap N$ ,
- (2)  $M \cap N \cap P \cap R$ ,
- (3)  $M \cup R$ ,
- (4)  $(N \cup P) \cap R$ ,
- (5)  $N \setminus R$ ,
- (6)  $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$ ,
- (7)  $((P \cup R) \cap N) \cap R$ ,
- (8)  $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$ .

AUFGABE 1.2. Es seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

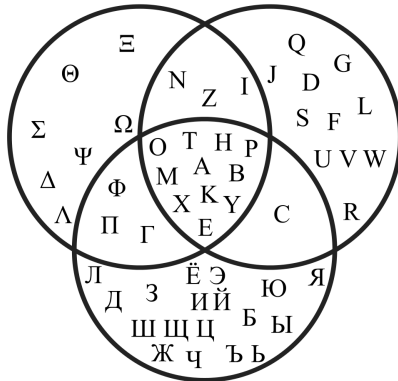
- (1)  $A \cup \emptyset = A$ ,
- (2)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,
- (3)  $A \cap B = B \cap A$ ,
- (4)  $A \cup B = B \cup A$ ,
- (5)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ,
- (6)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ,
- (7)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ,
- (8)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,
- (9)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .

AUFGABE 1.3. Es sei  $LA$  die Menge der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets,  $GA$  die Menge der Großbuchstaben des griechischen Alphabets und  $RA$  die Menge der Großbuchstaben des russischen Alphabets. Bestimme die folgenden Mengen.

- (1)  $GA \setminus RA$ .
- (2)  $(LA \cap GA) \cup (LA \cap RA)$ .
- (3)  $RA \setminus (GA \cup RA)$ .

$$(4) RA \setminus (GA \cup LA).$$

$$(5) (RA \setminus GA) \cap ((LA \cup GA) \setminus (GA \cap RA)).$$



AUFGABE 1.4. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.

AUFGABE 1.5.\*

Es seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Mengen. Beweise die Identität

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

AUFGABE 1.6.\*

Es seien  $A, B, C$  Mengen. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

- (1)  $A \subseteq B \cup C$ .
- (2)  $A \setminus B \subseteq C$
- (3)  $A \setminus C \subseteq B$ .

AUFGABE 1.7. Skizziere die folgenden Teilmengen im  $\mathbb{R}^2$ .

- (1)  $\{(x, y) \mid x = 5\}$ ,
- (2)  $\{(x, y) \mid x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$ ,
- (3)  $\{(x, y) \mid y^2 \geq 2\}$ ,
- (4)  $\{(x, y) \mid |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$ ,
- (5)  $\{(x, y) \mid 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$ ,
- (6)  $\{(x, y) \mid xy = 0\}$ ,
- (7)  $\{(x, y) \mid xy = 1\}$ ,
- (8)  $\{(x, y) \mid xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$ ,

- (9)  $\{(x, y) \mid 0 = 0\}$ ,  
 (10)  $\{(x, y) \mid 0 = 1\}$ .

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

AUFGABE 1.8. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen ihre Produktmenge.

- (1) Eine Kreislinie  $K$ .
- (2) Ein Geradenstück  $I$ .
- (3) Eine Gerade  $G$ .
- (4) Eine Parabel  $P$ .

Welche Produktmengen lassen sich als eine Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

AUFGABE 1.9.\*

- (1) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in genau drei Punkten schneiden.
- (2) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in keinem Punkt schneiden.
- (3) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.
- (4) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in sechs Punkten schneiden.

AUFGABE 1.10.\*

Skizziere möglichst viele wesentlich verschiedene Konfigurationen von fünf Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in vier Schnittpunkten treffen.

AUFGABE 1.11.\*

Skizziere sieben Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in acht Punkten schneiden.

AUFGABE 1.12.\*

- (1) Skizziere vier Geraden im Raum mit der Eigenschaft, dass es insgesamt zwei Schnittpunkte gibt.
- (2) Skizziere vier Geraden in der Ebene mit der Eigenschaft, dass es insgesamt drei Schnittpunkte gibt.

- (3) Zeige, dass es in der Ebene nicht vier Geraden geben kann, die insgesamt zwei Schnittpunkte besitzen.

AUFGABE 1.13. Für  $k = 1, \dots, 8$  sei

$$a_k = 2^k - 5k.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^8 a_k.$$

AUFGABE 1.14. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  sei

$$a_k = \frac{k}{2k+1}.$$

Berechne

$$\sum_{k=0}^5 a_k.$$

AUFGABE 1.15.\*

Wir betrachten die Wertetabelle

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_i$	2	5	4	-1	3	5	-2	2

- (1) Berechne  $a_2 + a_5$ .
- (2) Berechne  $\sum_{k=3}^6 a_k$ .
- (3) Berechne  $\prod_{i=0}^3 a_{2i+1}$ .
- (4) Berechne  $\sum_{i=4}^5 a_i^2$ .

AUFGABE 1.16. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

(2)

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

(3)

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

## AUFGABE 1.17.\*

Beweise durch Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}_+$  die Formel

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

## AUFGABE 1.18.\*

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

(Man denke auch an die verschiedenen Möglichkeiten, ein quadratisches Gitter abzuzählen).

## AUFGABE 1.19.\*

Zeige mittels vollständiger Induktion für  $n \geq 1$  die Formel

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{bei } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

## AUFGABE 1.20.\*

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

## AUFGABE 1.21.\*

Die Städte  $S_1, \dots, S_n$  seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

## AUFGABE 1.22.\*

Die offizielle Berechtigung für die Klausurteilnahme werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Professor Knopfloch sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

## AUFGABE 1.23.\*

Zeige, dass für jede ungerade Zahl  $n$  die Zahl  $25n^2 - 17$  ein Vielfaches von 8 ist.

AUFGABE 1.24. In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei  $A(n)$  die Aussage, dass je  $n$  Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Induktionsanfang: Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je  $n$  Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt  $n + 1$  Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden  $n$  Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese  $n + 1$  Pferde überhaupt die gleiche Farbe“. Analysiere diese Argumentation.

AUFGABE 1.25. Eine natürliche Zahl heißt *besonders*, wenn sie eine für sie spezifische, benennbare Eigenschaft erfüllt. Die 0 ist als neutrales Element der Addition und die 1 ist als neutrales Element der Multiplikation besonders. Die 2 ist die erste Primzahl, die 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die 4 ist die erste echte Quadratzahl, die 5 ist die Anzahl der Finger einer Hand, die 6 ist die kleinste aus verschiedenen Faktoren zusammengesetzte Zahl, die 7 ist die Anzahl der Zwerge im Märchen, u.s.w., diese Zahlen sind also alle besonders. Gibt es eine Zahl, die nicht besonders ist? Gibt es eine kleinste Zahl, die nicht besonders ist?

### Aufgaben zum Abgeben

## AUFGABE 1.26. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen  $A, B, C$  Mengen.

- (1) Modus Barbara: Aus  $B \subseteq A$  und  $C \subseteq B$  folgt  $C \subseteq A$ .
- (2) Modus Celarent: Aus  $B \cap A = \emptyset$  und  $C \subseteq B$  folgt  $C \cap A = \emptyset$ .
- (3) Modus Darii: Aus  $B \subseteq A$  und  $C \cap B \neq \emptyset$  folgt  $C \cap A \neq \emptyset$ .
- (4) Modus Ferio: Aus  $B \cap A = \emptyset$  und  $C \cap B \neq \emptyset$  folgt  $C \not\subseteq A$ .
- (5) Modus Baroco: Aus  $B \subseteq A$  und  $B \not\subseteq C$  folgt  $A \not\subseteq C$ .

## AUFGABE 1.27. (4 Punkte)

Es seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

- (1)  $A \subseteq B$ ,
- (2)  $A \cap B = A$ ,
- (3)  $A \cup B = B$ ,
- (4)  $A \setminus B = \emptyset$ ,
- (5) Es gibt eine Menge  $C$  mit  $B = A \cup C$ ,
- (6) Es gibt eine Menge  $D$  mit  $A = B \cap D$ .

## AUFGABE 1.28. (2 Punkte)

Für  $k \in \mathbb{N}_+$  sei

$$a_k = \frac{k-1}{k}.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^4 a_k.$$

## AUFGABE 1.29. (3 Punkte)

Es sei  $m \in \mathbb{N}$ . Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1) \prod_{i=1}^m (2i-1)^2 = \prod_{k=1}^m (4k^2-1).$$

## AUFGABE 1.30.\* (4 Punkte)

Eine  $n$ -Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch  $a-1$  Längsrillen und  $b-1$  Querrillen in  $n = a \cdot b$  ( $a, b \in \mathbb{N}_+$ ) mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer  $n$ -Schokolade aus genau  $n-1$  Teilungsschritten besteht.

## AUFGABE 1.31. (4 Punkte)

Wie viele Teilquadrate (unterschiedlicher Seitenlänge) besitzt ein Schachbrett? Man finde möglichst viele Strategien, diese Anzahl zu bestimmen.



## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Venn diagram gr la ru.svg , Autor = Benutzer Watchduck auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 2
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9