Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.1. Erläutere den Unterschied zwischen stetig und gleichmäßig stetig!

Aufgabe 14.2. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine Polynomfunktion vom Grad ≥ 2. Zeige, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.3. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x < \sqrt{2}\,, \\ 1\,, & \text{falls } x > \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.4. Zeige, dass eine beschränkte, monotone, stetige Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R},$$

auf einen Intervall I auch gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.5. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist und f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.6. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon\,]0,1[\longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist und f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.7. Man gebe ein Beispiel einer gleichmäßig stetigen Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

derart, dass keine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

existiert.

Aufgabe 14.8.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei

$$S = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Die Funktion $f\colon S \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$$

festgelegt. Zeige, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn die Folge eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 14.9. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\, z \longmapsto |z|^2\,,$$

nicht gleichmäßig stetig ist.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 8.19 hilfreich.

Aufgabe 14.10. Es seien $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen und sei

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \text{Re}\,(z) \leq b,\, c \leq \text{Im}\,(z) \leq d\}$$

das dadurch definierte Reckteck in $\mathbb{C}$. Zeige, dass eine stetige Funktion

$$f\colon Q \longrightarrow \mathbb{C}$$

gleichmäßig stetig ist.

Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und es sei eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

und Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Unter der zugehörigen (stückweise) *linearen Interpolation* versteht man die Abbildung

$$g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto g(x),$$

die auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ durch die affin-lineare Funktion gegeben ist, deren Graph die Punkte (x_i, y_i) und (x_{i+1}, y_{i+1}) durch eine gerade Strecke verbindet.

Diese Konstruktion kommt insbesondere dann zum Zuge, wenn eine gegebene Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

approximiert werden soll, wobei die Unterteilung gegeben ist und man $y_i = f(x_i)$ nimmt.

Aufgabe 14.11. Es sei $[a,b]$ ein reelles Intervall und es sei eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

und Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Beschreibe die zugehörige lineare Interpolation durch funktionale Ausdrücke und zeige, dass es sich um eine stetige Funktion handelt.

Aufgabe 14.12. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch

$$b^q := (b^n)^{1/m}$$

definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.

Aufgabe 14.13. Berechne

$$5^{\frac{3}{7}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 14.14.*

Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\, q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(2) Es ist $b^{-q} = \frac{1}{b^q}$.
(3) Für $b > 1$ und $q > 0$ ist $b^q > 1$.
(4) Für $b < 1$ und $q > 0$ ist $b^q < 1$.
(5) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(6) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(7) Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(8) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.

Aufgabe 14.15.*

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 14.16. Führe die Details im Beweis zu Lemma 14.9 für den Fall $b < 1$ aus.

Aufgabe 14.17. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(2) Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.
(3) Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.
(4) Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.
(5) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(6) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(7) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(8) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Aufgabe 14.18.*

Vergleiche die beiden Zahlen

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} \text{ und } \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 14.19. Vergleiche die drei Zahlen

$$2^{\sqrt{3}},\, 4,\, 3^{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 14.20. Vergleiche

$$5^{-\frac{4}{7}} \text{ und } 5^{-\frac{5}{9}}.$$

Aufgabe 14.21. Berechne

$$\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 14.22. Finde eine rationale Zahl zwischen den beiden Zahlen $2^{\sqrt{5}}$ und $3^{\sqrt[3]{2}}$ folgere daraus, welche größer ist.

Aufgabe 14.23. Zeige, dass eine Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto b^x,$$

aus einem arithmetischen Mittel ein geometrisches Mittel macht.

Aufgabe 14.24. Es sei $b > 0$ fixiert. Zeige

$$\lim_{d \to 0} b^d = 1.$$

Aufgabe 14.25.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ gibt.

Aufgabe 14.26.*

Es sei

$$f(x) = a^x$$

eine Exponentialfunktion mit $a \neq 1$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ definiert die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+1, f(x+1))$ einen Schnittpunkt mit der x-Achse, den wir mit $s(x)$ bezeichnen. Zeige

$$s(x+1) = s(x) + 1.$$

Skizziere die Situation.

Aufgabe 14.27. Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $f(0) = 1$ und mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von 2^x verschieden ist.

In den folgenden Aufgaben bedeutet $C^0(T, \mathbb{K})$ die Menge der stetigen Funktionen von T nach $\mathbb{K}$ (für eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$) und $B(P, b)$ den abgeschlossenen Vollkreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt P und Radius b (die Randpunkte gehören also dazu).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.28. (4 Punkte)

Zeige, dass die Quadratwurzelfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.29. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon\ C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f|_{\mathbb{Q}},$$

eine stetige Funktion wird also auf ihre Einschränkung auf $\mathbb{Q}$ abgebildet. Zeige, dass Ψ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 14.30. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige unbeschränkte Funktion

$$f\colon\ [0, 2[\longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zeige, dass eine solche Funktion keine stetige Fortsetzung auf $[0, 2]$ besitzt.

Aufgabe 14.31. (3 Punkte)

Zeige, dass der Betrag

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto |z|\,,$$

gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.32. (6 Punkte)

Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und

$$f\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

derart, dass die lineare Interpolation g (zu dieser Unterteilung und zu f) die Eigenschaft

$$|f(x) - g(x)| \leq \epsilon \text{ für alle } x \in [a, b]$$

erfüllt.

(Bemerkung: Die vorstehende Aufgabe kann man so interpretieren, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn man mit einem beliebig dünnen Stift den Funktionsgraphen durch zusammenhängende (endlich viele, nicht vertikale) Geradenstücke übermalen kann.)

Aufgabe 14.33. (2 Punkte)

Zu Beginn des Studiums ist Professor Knopfloch doppelt so schlau wie die Studenten. Innerhalb eines Studienjahres werden die Studenten um 10% schlauer. Leider baut der Professor ab und verliert pro Jahr 10% seiner Schlauheit.

(1) Zeige, dass nach drei Studienjahren der Professor immer noch schlauer als die Studenten ist.
(2) Zeige, dass nach vier Studienjahren die Studenten den Professor an Schlauheit übertreffen.

Abbildungsverzeichnis