

Analysis I

Arbeitsblatt 16

Übungsaufgaben

AUFGABE 16.1. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} . Es sei T eine nichtleere Menge und $f_n: T \rightarrow \mathbb{K}$ die konstante Funktion mit dem Wert x_n . Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.
- (2) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist punktweise konvergent.
- (3) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent.

AUFGABE 16.2. Es sei T eine endliche Menge und sei

$$f_n: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktionenfolge auf T . Zeige, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann punktweise konvergiert, wenn $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

AUFGABE 16.3. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R} . Wir betrachten auf einem reellen Intervall $[a, b]$ die Funktionenfolge

$$f_n: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto tx_n.$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert, und bestimme die Grenzfunktion.

AUFGABE 16.4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R} . Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto tx_n.$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge punktweise, aber im Allgemeinen nicht gleichmäßig konvergiert. Was ist die Grenzfunktion?

AUFGABE 16.5. Es sei T eine Menge und $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n := \frac{1}{n}f$$

zu $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Die Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.
- (2) Die Konvergenz ist genau dann gleichmäßig, wenn f beschränkt ist.

AUFGABE 16.6. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, wir betrachten die Funktionenfolge f_n , die durch

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in [-n, n], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert ist.

- (1) Zeige, dass die Funktionenfolge f_n punktweise gegen f konvergiert.
- (2) Charakterisiere die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge.

AUFGABE 16.7. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die Funktionen

$$f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f_n(x),$$

die durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0, \\ nx & \text{für } 0 < x \leq 1/n, \\ 2 - nx & \text{für } 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, & \text{für } x > 2/n. \end{cases}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionen stetig sind, und dass diese Funktionenfolge punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

AUFGABE 16.8. Es sei T eine Menge und es seien

$$f_n, g_n, h_n: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionenfolgen mit

$$f_n(x) \leq g_n(x) \leq h_n(x)$$

für alle $x \in T$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion $f: T \rightarrow \mathbb{K}$. Zeige, dass auch $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

AUFGABE 16.9.*

Man gebe ein Beispiel einer Funktionenfolge

$$f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche f_n nicht stetig sind, die Funktionenfolge aber gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert.

AUFGABE 16.10.*

Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und es sei

$$f_n: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von gleichmäßig stetigen Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Zeige, dass f gleichmäßig stetig ist.

AUFGABE 16.11.*

Es sei T eine Menge und seien

$$f_n: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g_n: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen. Zeige, dass auch die Summenfolge

$$f_n + g_n: T \longrightarrow \mathbb{K}, t \longmapsto f_n(t) + g_n(t),$$

gleichmäßig konvergent ist.

AUFGABE 16.12. Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T . Zeige, dass M ein komplexer Vektorraum ist.

AUFGABE 16.13.*

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{falls } n \in I, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ebenfalls absolut konvergent mit einem Konvergenzradius $\geq r$ ist.

AUFGABE 16.14. Bestimme den Konvergenzradius der geometrischen Reihe.

AUFGABE 16.15. Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die zugehörige Potenzreihe. Zeige, dass deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius der um $a \in \mathbb{C}$ „verschobenen“ Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

übereinstimmt.

AUFGABE 16.16. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit $c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = 0$. Wir betrachten die Folge $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$. Zeige die folgenden Aussagen.

- Wenn $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ gegen 0 konvergiert, so hat die Potenzreihe unendlichen Konvergenzradius.
- Wenn $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ gegen $a > 0$ konvergiert, so hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{a}$.
- Wenn $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, so hat die Potenzreihe den Konvergenzradius 0.

AUFGABE 16.17.*

Bestimme, für welche komplexe Zahlen z die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

konvergiert.

AUFGABE 16.18. Zeige, dass die Exponentialreihe auf \mathbb{C} nicht gleichmäßig konvergiert.

AUFGABE 16.19. Es seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien, deren Minimum r sei. Zeige die folgenden Aussagen.

- Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = a_n + b_n$ ist konvergent auf $U(0, r)$ und stellt dort die Summenfunktion $f + g$ dar.
- Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ mit $d_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ ist konvergent auf $U(0, r)$ und stellt dort die Produktfunktion fg dar.

AUFGABE 16.20.*

Zeige, dass eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = 0$ für alle geraden Indizes eine ungerade Funktion darstellt.

AUFGABE 16.21. Zeige, dass eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = 0$ für alle ungeraden Indizes eine gerade Funktion darstellt.

Für die Umkehrung der beiden vorstehenden Aufgaben verwende man Aufgabe 16.27 weiter unten.

AUFGABE 16.22. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eine konvergente Potenzreihe, die eine ungerade Funktion darstelle. Zeige, dass $c_k = 0$ für alle geraden Indizes ist.

AUFGABE 16.23. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eine konvergente Potenzreihe, die eine gerade Funktion darstelle. Zeige, dass $c_k = 0$ für alle ungeraden Indizes ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 16.24. (4 Punkte)

Betrachte die Funktionenfolge

$$f_n: I \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^{1/n}.$$

Zeige, dass diese Folge für $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$ punktweise konvergiert, und untersuche die Folge auf gleichmäßige Konvergenz für die verschiedenen Definitionsmengen

$$I = \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_+, [1, \infty], \left[\frac{1}{5}, 5\right],]0, 1], [0, 1].$$

AUFGABE 16.25. (4 Punkte)

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Zeige, dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius 1 besitzt, und dass die Reihe noch für alle $x \in \mathbb{C}$, $|x| = 1$, konvergiert.

AUFGABE 16.26. (4 Punkte)

Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T . Zeige, dass die Supremumsnorm auf M folgende Eigenschaften erfüllt.

- (1) $\|f\| \geq 0$ für alle $f \in M$.
- (2) $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.

(3) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in M$ gilt

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

(4) Für $g, f \in M$ gilt

$$\|g + f\| \leq \|g\| + \|f\|.$$

AUFGABE 16.27. (5 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine Potenzreihe, die für ein $\epsilon > 0$ auf $U(0, \epsilon)$ konvergiere und dort die Nullfunktion darstelle. Zeige, dass dann $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist (d.h. die Potenzreihe ist die Nullreihe).

AUFGABE 16.28. (5 Punkte)

Es sei $d \in \mathbb{N}$ und sei für jedes $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ eine konvergente Folge

$$(c_{in})_{n \in \mathbb{N}}$$

in \mathbb{C} gegeben, deren Limes mit c_i bezeichnet sei. Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen vom Grad $\leq d$, die durch

$$f_n := c_{dn}x^d + c_{d-1n}x^{d-1} + \dots + c_{2n}x^2 + c_{1n}x + c_{0n}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionenfolge auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $B(0, r)$ gleichmäßig gegen

$$f = c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

konvergiert.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7