

**Analysis I****Arbeitsblatt 18****Übungsaufgaben**

AUFGABE 18.1. Skizziere das Steigungsdreieck und die Sekante zur Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

in den Punkten 1 und 3

AUFGABE 18.2.\*

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt  $a \in \mathbb{R}$ .

Die folgende Aufgabe löse man direkt ohne Ableitungsregeln und durch Induktion mit Hilfe der Produktregel.

AUFGABE 18.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

AUFGABE 18.4.\*

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an  $f$ , die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

AUFGABE 18.5. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gerade Funktion, die im Punkt  $x$  differenzierbar sei. Zeige, dass  $f$  auch im Punkt  $-x$  differenzierbar ist und dass die Beziehung

$$f'(-x) = -f'(x)$$

gilt.

2

AUFGABE 18.6. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

AUFGABE 18.7. Zeige, dass die komplexe Betragsfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto |z|,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

AUFGABE 18.8. Zeige, dass die komplexe Betragsfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto |z|,$$

in keinem Punkt differenzierbar ist.

AUFGABE 18.9. Zeige, dass der Realteil, also die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \operatorname{Re}(z),$$

in keinem Punkt  $a \in \mathbb{C}$  differenzierbar ist.

AUFGABE 18.10. Zeige, dass die Exponentialfunktion  $\exp x$  in jedem Punkt  $a \in \mathbb{C}$  differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Man verwende die Definition über den Funktionslimes der Differenzenquotienten. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion hilft.

AUFGABE 18.11. Bestimme zur Exponentialfunktion  $\exp x$  die lineare Approximation (einschließlich der Restfunktion  $r(x)$ ) im Nullpunkt.

AUFGABE 18.12. Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, die  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  abbildet. Die Funktion sei in  $a \in \mathbb{R}$  (als komplexe Funktion) differenzierbar. Zeige, dass dann auch die reelle Funktion  $f|_{\mathbb{R}}$  (als Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ ) differenzierbar ist (und zwar mit der gleichen Ableitung).

AUFGABE 18.13.\*

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen unter Verwendung der Regel

$$(f^2)' = 2f \cdot f'$$

mit Hilfe von

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

## AUFGABE 18.14.\*

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen über die Funktionslimiten für die Differenzenquotienten.

## AUFGABE 18.15. Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad  $d \geq 2$  und  $t(z)$  die Tangente an  $f$  im Punkt 0. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = z^2 g(z)$$

mit einem Polynom  $g(z)$  vom Grad  $d - 2$ .

## AUFGABE 18.16.\*

Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad  $d \geq 2$ ,  $w \in \mathbb{C}$  ein Punkt und  $t(z)$  die Tangente an  $f$  im Punkt  $w$ . Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z - w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom  $g(z)$  vom Grad  $d - 2$ .

## AUFGABE 18.17. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes  $n \in \mathbb{Z}$ .

## AUFGABE 18.18. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3}.$$

## AUFGABE 18.19.\*

Es seien

$$g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

differenzierbare Funktionen und

$$f(x) := \frac{g(x)}{h(x)^n}$$

mit  $n \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass man die Ableitung von  $f$  als einen Bruch mit  $h^{n+1}(x)$  im Nenner schreiben kann.

AUFGABE 18.20. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

AUFGABE 18.21. Es sei  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$  und  $g(y) = y^2 - y + 2$ . Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung  $h(x) = g(f(x))$  direkt und mittels der Kettenregel.

AUFGABE 18.22.\*

Es sei  $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$  und  $g(y) = \frac{y^2}{y-1}$ .

- Bestimme die Ableitung von  $f$  und von  $g$ .
- Berechne die Hintereinanderschaltung  $h(x) = g(f(x))$ .
- Bestimme die Ableitung von  $h$  mit Hilfe von Teil b).
- Bestimme die Ableitung von  $h$  mittels der Kettenregel.

AUFGABE 18.23. Es sei  $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$  und  $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$ . Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung  $h(x) = g(f(x))$  direkt und mittels der Kettenregel.

AUFGABE 18.24. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}_+$ .

AUFGABE 18.25. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^q,$$

für jedes  $q \in \mathbb{Q}$ .

AUFGABE 18.26. Zeige, dass ein Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  genau dann einen Grad  $\leq d$  besitzt (oder  $P = 0$  ist), wenn die  $(d + 1)$ -te Ableitung von  $P$  das Nullpolynom ist.

## AUFGABE 18.27.\*

Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x)).$$

a) Drücke die Ableitung  $h'$  mit den Ableitungen von  $f$  und  $g$  aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2.$$

Berechne  $h'(x)$  auf zwei verschiedene Arten, einerseits über  $h(x)$  und andererseits über die Formel aus Teil a).

## AUFGABE 18.28.\*

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Zeige durch Induktion, dass für die  $n$ -fache Hintereinanderschaltung ( $n \geq 1$ )

$$f^{\circ n} = f \circ f \circ \dots \circ f \quad (n \text{ mal})$$

die Beziehung

$$(f^{\circ n})' = f' \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (f' \circ f^{\circ i})$$

gilt.

## AUFGABE 18.29. Zeige, dass die Funktion

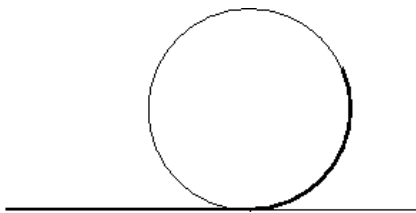
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x|x|,$$

differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

## AUFGABE 18.30. Die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{<1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei für negatives  $x$  konstant gleich 0 und folge für  $x \in [0, 1[$  dem unteren rechten Viertelkreis mit Mittelpunkt  $(0, 1)$  und Radius 1. Bestimme den Grad der Differenzierbarkeit dieser Funktion.



AUFGABE 18.31.\*

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  und seien

$$f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei  $n$ -mal differenzierbare Funktionen. Zeige, dass

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

gilt.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 18.32. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x + 2},$$

wobei  $D$  die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

AUFGABE 18.33. (4 Punkte)

Bestimme die Tangenten an den Graphen zur Funktion  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ , die parallel zu  $y = x$  sind.

AUFGABE 18.34. (4 Punkte)

Bestimme, ob die komplexe Konjugation

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \bar{z},$$

differenzierbar ist oder nicht.

AUFGABE 18.35. (7 (2+2+3) Punkte)

Es sei  $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$  und  $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$  und es sei  $h(x) := g(f(x))$  die Hintereinanderschaltung.

- (1) Berechne  $h$  (das Ergebnis muss als eine rationale Funktion vorliegen).
- (2) Berechne die Ableitung von  $h$  mit Hilfe von Teil 1.
- (3) Berechne die Ableitung von  $h$  mit Hilfe der Kettenregel.

AUFGABE 18.36. (3 Punkte)

Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen und seien

$$f_i: D \longrightarrow \mathbb{K}, i = 1, \dots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^n f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n.$$

AUFGABE 18.37. (4 Punkte)

Es sei  $P \in \mathbb{C}[X]$  ein Polynom,  $a \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass  $P$  genau dann ein Vielfaches von  $(X - a)^n$  ist, wenn  $a$  eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen  $P, P', P'', \dots, P^{(n-1)}$  ist.

AUFGABE 18.38. (4 Punkte)

Es sei

$$F: D \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine rationale Funktion. Zeige, dass  $F$  genau dann ein Polynom ist, wenn es eine (höhere) Ableitung mit  $F^{(n)} = 0$  gibt.



## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Linie und Viertelkreis.png , Autor = MGausmann, Lizenz =  
CC-by-sa 4.0 5
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus  
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine  
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren  
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor  
bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias  
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und  
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9