Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 23

Übungsaufgaben

Aufgabe 23.1. Bestimme das Treppenintegral über $[-3,+4]$ zur Treppenfunktion, die durch

$$f(t) = \begin{cases} 5, \text{ falls } -3 \leq t \leq -2\,, \\ -3, \text{ falls } -2 < t \leq -1\,, \\ \frac{3}{7}, \text{ falls } -1 < t < -\frac{1}{2}\,, \\ 13, \text{ falls } t = -\frac{1}{2}\,, \\ \pi, \text{ falls } -\frac{1}{2} < t < e\,, \\ 0, \text{ falls } e \leq t \leq 3\,, \\ 1, \text{ falls } 3 < t \leq 4\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 23.2.*

a) Unterteile das Intervall $[-4,5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4,5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Aufgabe 23.3. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ an, die nur endlich viele Werte annimmt, aber keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.4. Es seien

$$f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

(1) $f+g$,
(2) $f \cdot g$,
(3) $\max(f,g)$,
(4) $\min(f,g)$,

Treppenfunktionen sind.

Aufgabe 23.5. Es sei
$$f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$
eine Treppenfunktion und
$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.6.*

Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion
$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$
die nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 23.7. Berechne das bestimmte Integral
$$\int_0^1 t\,dt$$
explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.8. Berechne das bestimmte Integral
$$\int_1^2 t^3\,dt$$
explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.9. Berechne das bestimmte Integral
$$\int_{-2}^7 -t^3 + 3t^2 - 2t + 5\,dt$$
explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.10.*

Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)
$$\int_0^1 e^x dx \;=\; e - 1.$$

Aufgabe 23.11. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a,b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a,b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt
$$\int_a^b f(x)dx > 0\,.$$

Aufgabe 23.12.*

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

Aufgabe 23.13. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1-t^2.$$

Für welches $x \in [0,1]$ besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 23.14.*

Wir betrachten die Funktion

$$[1,2] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t) = \frac{1}{t}.$$

(1) Beschreibe den Flächeninhalt zur unteren maximalen Treppenfunktion zu g zur Intervallunterteilung $1 \leq x \leq 2$ in Abhängigkeit von x.
(2) Bestimme dasjenige x zwischen 1 und 2, für das der Flächeninhalt zur unteren maximalen Treppenfunktion zu g zur Intervallunterteilung $1 \leq x \leq 2$ maximal wird. Welchen Wert hat dieser Flächeninhalt?

Bei den beiden vorstehenden Aufgabe kann man sich fragen, wie bei einer feineren Unterteilung, beispielsweise mit zwei Zwischenpunkten, das optimale untere Treppenintegral aussieht. Dies wird im zweiten Semester beantwortet, siehe Aufgabe *****.

Aufgabe 23.15. Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x},$$

weder das Unterintegral noch das Oberintegral existiert.

Aufgabe 23.16.*

Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihre Grenzwerte übereinstimmen. Zeige, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\, dx \ = \ \int_a^b f(x)\, dx \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\, dx$$

gilt.

Aufgabe 23.17.*

Es sei I ein beschränktes Intervall und $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte stetige Funktion. Es sei vorausgesetzt, dass das Supremum über alle Treppenintegrale zu äquidistanten unteren Treppenfunktionen existiert. Zeige, dass dann auch das Supremum zu allen Treppenintegralen zu unteren Treppenfunktionen (also das Unterintegral) existiert und mit dem zuerst genannten Supremum übereinstimmt.

Aufgabe 23.18. Es sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 23.19.*

Es sei

$$f\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei

$$s_n\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

diejenige untere Treppenfunktion zu f zur äquidistanten Unterteilung in n gleichlange Intervalle, die auf dem Teilintervall

$$I_j = [a + \frac{(j-1)(b-a)}{n}, a + \frac{j(b-a)}{n}[,\ j = 1, \ldots, n\,,$$

(für $j = n$ sei das Intervall rechtsseitig abgeschlossen) das Infimum von $f(x)$, $x \in I_j$, annimmt. Zeige, dass die Folge der Treppenintegrale zu s_n gegen $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert.

Aufgabe 23.20. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.
(2) Es gibt eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n \, b$ derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.
(3) Für jede Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n \, b$ sind die Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ Riemann-integrierbar.

Aufgabe 23.21. Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
(2) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
(3) Es ist $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.
(4) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c \int_a^b f(t)\,dt$.

Aufgabe 23.22.*

Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch $\max(f, g)$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 23.23. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \; dt$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.24. (4 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_a^b t^2\,dt$$

in Abhängigkeit von a und b explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.25. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

und einer Treppenfunktion

$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.26. (6 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

das Unterintegral existiert, aber nicht das Oberintegral.

Tipp: Verwende Aufgabe 9.5.

Aufgabe 23.27. (8 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.28. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist, dass es aber keine Treppenfunktion s mit der Eigenschaft gibt, dass $|s(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in [0,1]$ ist.

Aufgabe 23.29. (6 Punkte)

Es sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f,g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch fg Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 23.30. (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft gibt, dass das Treppenintegral zur maximalen unteren Treppenfunktion zur äquidistanten Unterteilung in n Teilintervalle größer ist als dasjenige zu $n+1$ Teilintervallen (d.h. mehr Teilungspunkte führen zu einer schlechteren Approximation).

Abbildungsverzeichnis