Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 25

Übungsaufgaben

Aufgabe 25.1.*

Zeige durch Induktion nach n unter Verwendung der partiellen Integration

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx \,=\, \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

In den folgenden Aufgaben, bei denen es um die Bestimmung von Stammfunktionen geht, ist jeweils ein geeigneter Definitionsbereich zu wählen.

Aufgabe 25.2. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^n \cdot \ln x\,.$$

Aufgabe 25.3. Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und es seien $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(bt+c)\cdot f(t)$$

Aufgabe 25.4. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^3 \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x\,.$$

Aufgabe 25.5.*

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$(\ln(1+\sin x)) \cdot \sin x\,.$$

Aufgabe 25.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,.$$

Aufgabe 25.7. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\arcsin x \,.$$

Aufgabe 25.8. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto x^{1/n},$$

unter Verwendung der Stammfunktion von x^n und Satz 25.5.

Aufgabe 25.9. Bestimme eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus unter Verwendung der Stammfunktion seiner Umkehrfunktion.

Aufgabe 25.10.*

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\tan x \,.$$

Aufgabe 25.11. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}} \,.$$

Aufgabe 25.12. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx \,.$$

Aufgabe 25.13. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^{\sqrt{x}} \,.$$

Aufgabe 25.14. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1+3\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}} \,.$$

Aufgabe 25.15. Es sei

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Man beweise die Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion, indem man für das Integral

$$\int_c^d f^{-1}(y)dy$$

die Substitution $y = f(x)$ durchführt und anschließend partiell integriert.

Aufgabe 25.16.*

Begründe den Zusammenhang

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^{a} \frac{1}{x} dx + \int_1^{b} \frac{1}{x} dx$$

für $a, b \in \mathbb{R}_+$ allein mit der Hilfe von Integrationsregeln.

Aufgabe 25.17.*

Berechne das bestimmte Integral

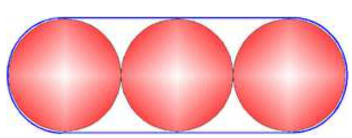
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}} dx \, .$$

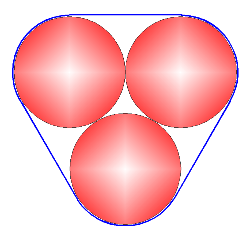
Aufgabe 25.18.*

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2+5x-4} \, .$$

Aufgabe 25.19. Bestimme die Flächeninhalte der beiden rechts skizzierten, durch die blauen Kurven umrandeten Gebiete.





Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.20. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sin(\ln x) \, .$$

Aufgabe 25.21. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^x \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \, .$$

Aufgabe 25.22. (4 Punkte)

Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und H eine Stammfunktion von G. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(at^2 + bt + c) \cdot f(t)$$

Aufgabe 25.23. (5 (2+3) Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

eine streng wachsende, bijektive Funktion und

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion.

a) Zeige, dass $f \circ \varphi$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

b) Sei nun φ zusätzlich stetig differenzierbar. Bestätige die Gleichung

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_c^d f(\varphi(s))\varphi'(s)\, ds$$

direkt, ohne Bezug auf die Substitutionsregel.

Aufgabe 25.24. (5 Punkte)

Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die Funktion

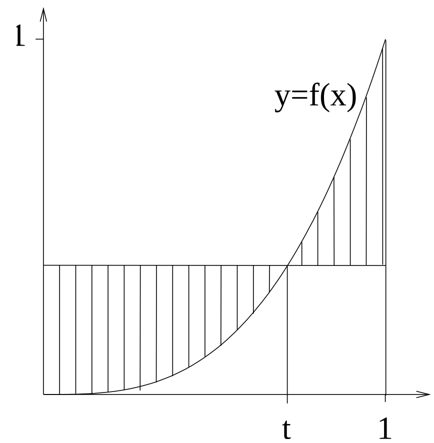
$$f(x) = \int_0^x \sin(t) g(x - t) dt$$

für $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f eine zweite Ableitung besitzt, und dass die folgende Beziehung gilt:

$$f'' + f = g.$$

(Mit einer geeigneten Substitution kann man erreichen, dass die Variable x nicht mehr als Argument der Funktion g auftritt. Danach geht es darum, geeignete trigonometrische Formeln anzuwenden.)

Aufgabe 25.25. (5 Punkte)



Es sei

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Für welche Punkte $t \in [0,1]$ besitzt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ein lokales Extremum? Handelt es sich dabei um ein Minimum oder um ein Maximum?

Abbildungsverzeichnis