Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Zeige, und zwar allein unter Bezug auf Rechengesetze in $\mathbb{Z}$, dass die durch

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd}$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad+bc}{cd}$$

definierte Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen wohldefiniert ist, und dass die Assoziativität, die Kommutativität und das Distributivgesetz gelten.

Aufgabe 3.2. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht 0 seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x,$$

(2)
$$\frac{1}{z} = z^{-1},$$

(3)
$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(4)
$$\frac{0}{z} = 0,$$

(5)
$$\frac{z}{z} = 1,$$

(6)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw},$$

(7)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw},$$

(8)
$$\frac{x}{z}+\frac{y}{w} \;=\; \frac{xw+yz}{zw}.$$

Gilt die zu (8) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also

$$(x-z)\cdot(y-w) \;=\; (x+w)(y+z)-(z+w)?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{w} \;=\; \frac{x+y}{z+w}$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a+(bc) \;=\; (a+b)\cdot(a+c),$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.4. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G,U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

Aufgabe 3.5. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0=1$ ist.

Aufgabe 3.6. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n\in\mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n+1)_K \;=\; n_K+1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n+m)_K=n_K+m_K \text{ und } (nm)_K=n_K\cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

Aufgabe 3.7. Besitzen Sie eine geometrische Intuition zur Addition von zwei gegebenen Zahlen auf der reellen Zahlengeraden?

Besitzen Sie eine geometrische Intuition zur Multiplikation von zwei gegebenen Zahlen auf der reellen Zahlengeraden?

Aufgabe 3.8. Skizziere den Graphen der reellen Addition

$$+\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x+y,$$

und den Graphen der reellen Multiplikation

$$\cdot\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x \cdot y.$$

Aufgabe 3.9. Es sei K ein Körper mit $2 \neq 0$. Zeige, dass für $f,g \in K$ die Beziehung

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

gilt.

Aufgabe 3.10.*

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe 3.11.*

Die Partei „Zukunft für alle“ hat zwei Ziele.

(1) Millionäre entschädigungslos enteignen.
(2) Ein bedingungsloses monatliches Grundeinkommen von 1200 Euro für jeden Erwachsenen.

Hans hat mit Geld nichts am Hut, er ist jetzt gerade 18 geworden und lebt allein auf einem kleinen Bauernhof als Selbstversorger, ohne Einnahmen, ohne Ausgaben, und das soll in seinem Leben auch so bleiben. Vorausgesetzt, das Parteiprogramm wird Gesetz, wie alt muss Hans (in Jahren und Monaten) werden, bis er enteignet wird?

Aufgabe 3.12. Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine Dreiviertelstunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine Dreiviertelstunde?

Aufgabe 3.13. Man erläutere die Uhrzeitangaben „halb fünf“, „viertel fünf“, „drei viertel fünf“. Was würde „ein sechstel fünf“ und „drei siebtel fünf“ bedeuten?

Aufgabe 3.14. Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K. Beweise die folgenden Potenzgesetze für natürliche Exponenten $m, n \in \mathbb{N}$.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 3.15.*

Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K. Beweise die folgenden Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten $m, n \in \mathbb{Z}$. Dabei darf man die entsprechenden Gesetze für Exponenten aus $\mathbb{N}$ sowie die Tatsachen, dass das Inverse des Inversen wieder das Ausgangselement ist und dass das Inverse von u^k gleich $\left(u^{-1}\right)^k$ ist, verwenden.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 3.16. Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, sei rekursiv durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \text{ für } n \geq 2$$

definiert. Zeige, dass für $n \geq 2$

$$a_n = \frac{1}{2} n!$$

gilt.

Aufgabe 3.17. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2(i-1)}}{3^i} = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Aufgabe 3.18.*

Heinz-Peter schaut am Morgen in den Spiegel und entdeckt fünf Pickel auf seiner Stirn. Diese müssen alle ausgedrückt werden, wobei zwei Pickel so nah beieinander liegen, dass sie unmittelbar hintereinander behandelt werden müssen. Wie viele Reihenfolgen gibt es, die Pickel auszudrücken?

Aufgabe 3.19.*

Vor einem Fußballspiel begrüßt jeder der elf Spieler einer Mannschaft jeden Spieler der anderen Mannschaft, jeder Spieler begrüßt die vier Unparteiischen und diese begrüßen sich alle untereinander. Wie viele Begrüßungen finden statt?

Aufgabe 3.20.*

Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Beziehung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Aufgabe 3.21. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 3.22.*

Es sei M eine n-elementige Menge. Zeige, dass die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}$$

ist.

Aufgabe 3.23. Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.24. (2 Punkte)

Zeige für einen Körper K die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung

$$\alpha_a \colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes $b \in K$, $b \neq 0$, ist die Abbildung

$$\mu_b \colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

Aufgabe 3.25. (6 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 3.26. (4 Punkte)

Wir versehen die Menge $K = \{0, 1, 2\}$ mit den beiden Operationen

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

und

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Zeige durch möglichst wenige Rechnungen, dass mit diesen Verknüpfungen K zu einem Körper wird.

Aufgabe 3.27. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b + d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b + d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

Aufgabe 3.28. (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0,0) \text{ und } 1 = (1,0)\,,$$

der Addition

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$

und der Multiplikation

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.

Aufgabe 3.29. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Abbildungsverzeichnis