

Analysis II**Arbeitsblatt 35****Übungsaufgaben**

AUFGABE 35.1. Bestimme den Abschluss von \mathbb{Q} in \mathbb{R}

AUFGABE 35.2.*

Bestimme den Abschluss für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

- (1) Sei $k \in \mathbb{N}_+$ fixiert. S_k ist die Menge der reellen Zahlen ≥ 0 , deren Dezimalentwicklung nach der k -ten Nachkommastelle abbricht.
- (2) T ist die Menge aller reellen Zahlen ≥ 0 , deren Dezimalentwicklung irgendwo abbricht.

AUFGABE 35.3. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge in einem metrischen Raum M . Zeige für den Abschluss von T die Gleichheit

$$\overline{T} = \bigcap_{T \subseteq A \subseteq M, A \text{ abgeschlossen}} A.$$

AUFGABE 35.4.*

Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge in einem metrischen Raum M . Zeige für den Abschluss von T die Gleichheit

$$\overline{T} = \{x \in M \mid \text{es gibt eine Folge } x_n \text{ in } T, \text{ die gegen } x \text{ konvergiert}\}.$$

AUFGABE 35.5. (1) Zeige, dass in einem metrischen Raum M der Abschluss einer offenen Kugel $U(x, r)$ nicht die abgeschlossene Kugel $B(x, r)$ sein muss.

- (2) Zeige, dass in einem euklidischen Raum V der Abschluss einer offenen Kugel $U(x, r)$ gleich der abgeschlossenen Kugel $B(x, r)$ ist.

AUFGABE 35.6.*

Es sei M ein metrischer Raum, zu einer Menge $A \subseteq M$ bezeichnet \overline{A} den Abschluss von A . Beweise oder widerlege die folgenden Eigenschaften

$$(1) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$(2) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

AUFGABE 35.7. Zeige, dass der Grenzwert einer Funktion in einem Berührungspunkt der Definitionsmenge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist.

AUFGABE 35.8. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührungspunkt von T . Es sei

$$f: T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum V mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \dots, f_n: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich einer Basis von V . Zeige, dass der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \rightarrow a} f_j(x)$$

existieren.

AUFGABE 35.9. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührungspunkt von T . Es seien $f: T \rightarrow \mathbb{K}$ und $g: T \rightarrow \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existieren. Zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten.

(1) Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

(2) Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

(3) Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

AUFGABE 35.10. Es seien D, E, F metrische Räume und sei

$$h: D \longrightarrow E$$

eine stetige Abbildung. Es sei $P \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{P\}$ und

$$h(P) = Q \in E$$

ein Berührungspunkt von $E \setminus \{Q\}$. Es sei

$$g: E \setminus \{Q\} \longrightarrow F$$

eine Abbildung und es sei vorausgesetzt, dass

$$\lim_{y \rightarrow Q} g(y)$$

existiert. Zeige, dass dann auch

$$\lim_{x \rightarrow P} g(h(x))$$

existiert und mit $\lim_{y \rightarrow Q} g(y)$ übereinstimmt.

AUFGABE 35.11. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes, $a \in M$ ein Berührungspunkt von T ,

$$g: T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum und $b \in L$. Zeige, dass für den Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

genau dann gilt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} d(g(x), b) = 0$$

gilt.

AUFGABE 35.12.*

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Es sei

$$f: T \longrightarrow L$$

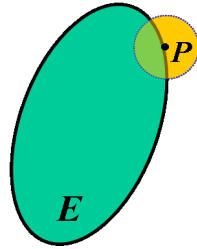
eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum L und sei $a \in M$, $a \notin T$, ein Punkt, der ein Berührungspunkt von T sei. Zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \in T, x \rightarrow a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn f eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}: T \cup \{a\} \longrightarrow L$$

besitzt.



Die nächsten Aufgaben verwenden den folgenden Begriff.

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Randpunkt* von T , wenn für jedes $\epsilon > 0$ der offene Ball

$$U(x, \epsilon)$$

sowohl Punkte aus T als auch Punkte aus $M \setminus T$ enthält.

Die Menge aller Randpunkte von T heißt *Rand* von T , geschrieben $\text{Rand}(T)$.

AUFGABE 35.13. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T gleich dem Durchschnitt von \overline{T} und $M \setminus T$ ist.

AUFGABE 35.14. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.15. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \cup \text{Rand}(T)$$

abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.16. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \setminus \text{Rand}(T)$$

offen ist.

AUFGABE 35.17. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann abgeschlossen ist, wenn die Inklusion $\text{Rand}(T) \subseteq T$ gilt.

AUFGABE 35.18. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $M = A \cup B$ mit nichtleeren Teilmengen $A, B \subseteq M$ und $A \cap B = \emptyset$. Es gebe ein $\delta > 0$ mit

$$d(x, y) \geq \delta \text{ f\"ur alle } x \in A, y \in B.$$

Zeige, dass A (und auch B) sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.19. Zeige, dass in \mathbb{R} der nichtleere Durchschnitt von zusammenhängenden Teilmengen wieder zusammenhängend ist. Muss dies auch für den nichtleeren Durchschnitt von zusammenhängenden Teilmengen im \mathbb{R}^2 gelten?

AUFGABE 35.20. Es sei I ein nichtleeres reelles Intervall und $x \in I$ ein Punkt. Bestimme die Teilmengen von $I \setminus \{x\}$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

AUFGABE 35.21.*

Beweise den Zwischenwertsatz mit Satz 35.9 und Satz 35.10.

AUFGABE 35.22. Zeige, dass \mathbb{Q} nicht zusammenhängend ist.

AUFGABE 35.23. Bestimme die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{Q} .

AUFGABE 35.24. Zeige, dass der \mathbb{R}^n wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 35.25. Es sei T eine offene (oder abgeschlossene) Kugel im \mathbb{R}^n . Zeige, dass T wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 35.26. Es sei $n \geq 2$ und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 35.27. Zeige, dass ein reelles Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 35.28. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von f (als Teilmenge von $I \times \mathbb{R}$) wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 35.29. Untersuche den Graph der durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegebenen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Zusammenhangseigenschaften.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 35.30. (4 Punkte)

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T genau dann leer ist, wenn T sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.31. (4 Punkte)

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Es sei T zusammenhängend. Zeige, dass auch der Abschluss \overline{T} zusammenhängend ist.

AUFGABE 35.32. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine offene, nicht zusammenhängende Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass der Abschluss von U zusammenhängend ist.

AUFGABE 35.33. (5 Punkte)

Bestimme den Abschluss der Menge $T = U(0, 1) \cap \mathbb{Q}^2$ in \mathbb{R}^2 .

AUFGABE 35.34. (4 Punkte)

Es seien $a, b, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

der Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (a, b)$ und dem Radius r . Es sei G eine Gerade in \mathbb{R}^2 mit der Eigenschaft, dass es auf G mindestens einen Punkt P gibt mit $d(M, P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.

AUFGABE 35.35. (5 Punkte)

Zeige, dass die Kugeloberfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

wegzusammenhängend ist. Man gebe dabei für je zwei Punkte einen expliziten Weg an, der diese Punkte stetig verbindet.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Neighborhood edge.png , Autor = Benutzer Zasdfgbnm auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 4
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7