

Analysis II**Arbeitsblatt 36****Übungsaufgaben**

AUFGABE 36.1. Es sei

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M , die Lipschitz-stetig sei. Zeige, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

AUFGABE 36.2. Zeige, dass die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.

AUFGABE 36.3. Zeige, dass eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow W$ zwischen euklidischen Vektorräumen Lipschitz-stetig ist.

AUFGABE 36.4. Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion, die zugleich eine starke Kontraktion sei. Zeige, dass dann die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) - x,$$

streng fallend ist.

AUFGABE 36.5. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) \leq c$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $c < 1$. Zeige, dass f eine starke Kontraktion ist.

AUFGABE 36.6.*

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}, x \longmapsto e^x - 1.$$

- (1) Zeige, dass 0 der einzige Fixpunkt von f ist.
- (2) Zeige, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.
- (3) Zeige, dass f keine starke Kontraktion ist.
- (4) Zeige, dass zu jedem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ gegen 0 konvergiert.

AUFGABE 36.7. Es seien L und M metrische Räume und es sei $L \times M$ mit der Produktmetrik versehen. Zeige, dass eine Folge

$$z_n = (x_n, y_n) \in L \times M$$

genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn die beiden Komponentenfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind.

AUFGABE 36.8. Zeige, dass der euklidische Raum \mathbb{R}^n vollständig ist.

AUFGABE 36.9. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum M mit dem Grenzwert x . Zeige, dass die Teilmenge

$$T = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

(mit der induzierten Metrik) vollständig ist.

AUFGABE 36.10. Es sei M eine Menge und es sei

$$F: M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn der Durchschnitt des Graphen von F mit der Diagonalen $\Delta = \{(x, x) \in M \times M \mid x \in M\}$ nicht leer ist.

AUFGABE 36.11.*

Die folgende Tabelle zeigt eine Auswahl der Gastgeberländer und der Weltmeister der Fußballweltmeisterschaften von 1970 bis 2014.

Jahr	Gastgeber	Weltmeister
1970	Mexiko	Brasilien
1974	Deutschland	Deutschland
1982	Spanien	Italien
1990	Italien	Deutschland
1994	USA	Brasilien
2002	Japan und Korea	Brasilien
2010	Südafrika	Spanien
2014	Brasilien	Deutschland

Es sei $L = \{B, D, I, JuK, M, S, SA, U\}$ die Menge der Gastgeberländer und

$$\varphi: L \longrightarrow L$$

die Abbildung, die dem Gastgeberland den Weltmeister zuordnet. Gibt es auf L eine Metrik derart, dass L zu einem vollständigen metrischen Raum wird und dass φ eine starke Kontraktion ist?

AUFGABE 36.12. Es sei

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|(x, y)\| \leq 1\}.$$

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion

$$f: D \longrightarrow D,$$

die keinen Fixpunkt besitzt.

AUFGABE 36.13.*

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge, $n \geq 1$.

a) T sei nicht beschränkt. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, deren Bild nicht beschränkt ist.

b) T sei nicht abgeschlossen. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, deren Bild nicht beschränkt ist.

In der folgenden Aufgaben seien die Homomorphismenräume $\text{Hom}(V, W)$ mit der Norm

$$\|\varphi\| := \sup(\|\varphi(v)\|, \|v\| = 1)$$

versehen.

AUFGABE 36.14. Zeige, dass eine lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

zwischen zwei euklidischen Vektorräumen V und W genau dann stark kontrahierend ist, wenn $\|\varphi\| < 1$ ist.

AUFGABE 36.15. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt und sei M ein vollständiger metrischer Raum. Sei C die Menge der stetigen Abbildungen von T nach M . Definiere eine Metrik auf C derart, dass C selbst zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

AUFGABE 36.16.*

Es sei M ein metrischer Raum und sei

$$f: M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Mit $f^{\circ n}$ bezeichnen wir die n -fache Hintereinanderschaltung von f mit sich selbst.

- a) Zeige, dass wenn f Lipschitz-stetig ist, dass dann auch $f^{\circ n}$ Lipschitz-stetig ist.
- b) Man gebe ein Beispiel für eine Lipschitz-stetige Abbildung f , die keine starke Kontraktion, wo aber jedes $f^{\circ n}$ für $n \geq 2$ eine starke Kontraktion ist.
- c) Es sei f Lipschitz-stetig und es sei $f^{\circ k}$ eine starke Kontraktion für ein gewisses k . Zeige, dass es ein n_0 derart gibt, dass $f^{\circ n}$ für jedes $n \geq n_0$ eine starke Kontraktion ist.

AUFGABE 36.17. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Zeige, dass T genau dann kompakt und zusammenhängend ist, wenn T ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist.

AUFGABE 36.18.*

Es seien $T_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $T_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ Teilmengen und $T_1 \times T_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ihre Produktmenge.

- a) Zeige, dass wenn T_1 und T_2 beschränkt sind, dass dann auch $T_1 \times T_2$ beschränkt ist.
- b) Zeige, dass wenn T_1 und T_2 kompakt sind, dass dann auch $T_1 \times T_2$ kompakt ist.

AUFGABE 36.19. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

AUFGABE 36.20.*

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto P(z),$$

surjektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 36.21. (2 Punkte)

Es sei M ein vollständiger metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann vollständig ist, wenn T abgeschlossen ist.

AUFGABE 36.22. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

die keinen Fixpunkt besitzt.

AUFGABE 36.23. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x,$$

folgende Eigenschaften besitzt: Es ist

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$, $x \neq y$, aber f ist nicht stark kontrahierend.

AUFGABE 36.24. (4 Punkte)

Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass f Lipschitz-stetig ist.

AUFGABE 36.25. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7