Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis II

Arbeitsblatt 40

Übungsaufgaben

Aufgabe 40.1. Bestimme die[1] Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } v(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 40.2. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} t^2 - \sin t \\ \cos^2 t \end{pmatrix} \text{ mit } v(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 40.3. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (t,x,y) \longmapsto (-ay, ax),$$

und zur Anfangsbedingung $v(s) = (b,c)$ (dabei seien $a,b,c,s \in \mathbb{R}$ fixierte reelle Zahlen).

Aufgabe 40.4. Wie löst man eine gewöhnliche Differentialgleichung zu einem stetigen ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\, (t,v) \longmapsto f(t,v) = g(t)?$$

Aufgabe 40.5. Es sei

$$F\colon I \times U \longrightarrow V,\, (t,v) \longmapsto F(t,v),$$

ein Vektorfeld. Zeige, dass eine konstante Abbildung

$$\varphi\colon I \longrightarrow U,\, t \longmapsto \varphi(t) = c,$$

genau dann eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = F(t,v)$ ist, wenn $F(t,c) = 0$ für alle $t \in I$ ist.

[1] Mit dieser Formulierung wird hier und im Folgenden implizit benutzt, dass die Lösung eindeutig ist. In den meisten der hier gestellten Aufgaben ergibt sich die Eindeutigkeit direkt, sie ist aber nicht Teil der Aufgabenstellung.

Die beiden folgenden Aufgaben beziehen sich auf Vektorfelder mit konstanter Richtung, siehe den Anhang.

Aufgabe 40.6. Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = txy \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt 0.

Aufgabe 40.7. Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = txy^2 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt 0.

Aufgabe 40.8.*

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow V,\, t \longmapsto \varphi(t),$$

eine Lösung der zeitunabhängigen Differentialgleichung

$$v' = F(t,v) = F(v)$$

zum Vektorfeld

$$F\colon V \longrightarrow V.$$

Zeige, dass auch

$$\psi(t) := \varphi(t+c)$$

zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

Aufgabe 40.9. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum in einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum V. Es sei

$$F\colon I \times V \longrightarrow V$$

ein Vektorfeld auf V mit der Eigenschaft, dass $F(t,v) \in W$ für alle $(t,v) \in V$ gilt. Zeige, dass jede Lösung zur Differentialgleichung

$$v' = F(t,v)$$

ganz in einer Teilmenge der Form $P + W$ (einem affinen Unterraum von V) verläuft.

Aufgabe 40.10.*

Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $u \in V$ ein fixierter Vektor und

$$F\colon \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld mit der Eigenschaft

$$F(t, v) = F(t, v + u)$$

für alle $v \in V$. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow V$$

eine Lösung zur Differentialgleichung

$$v' = F(t, v).$$

Zeige, dass auch

$$\psi(t) := \varphi(t) + u$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 40.11. Es sei ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem zum Vektorfeld

$$F(t, x_1, \ldots, x_n) = (f_1(t, x_1), \ldots, f_n(t, x_n))$$

gegeben. Erläutere, wie sich die Lösungen der einzelnen Differentialgleichungen $x_i' = f_i(t, x_i)$ zur Gesamtlösung verhalten, wie dabei die Definitionsintervalle der Lösungen zusammenhängen und was man über die Eindeutigkeit von Lösungen aussagen kann.

Aufgabe 40.12. Finde alle Lösungen des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, x, y) \longmapsto \big(t^2 x, yt + \sin t\big).$$

Aufgabe 40.13.*

a) Zeige, dass die archimedischen Spiralen

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (at \cos(t + t_0),\ at \sin(t + t_0)),$$

(zu fixierten $a, t_0 \in \mathbb{R}$) Lösungskurven für die Differentialgleichung (bei $t > 0$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y + \frac{x}{t} \\ x + \frac{y}{t} \end{pmatrix}$$

sind.

b) Man gebe eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu dieser Differentialgleichung an.

Aufgabe 40.14. Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,v,w) \longmapsto \big(t^2-t\big)(v,w) = \big(\big(t^2-t\big)v, \big(t^2-t\big)w\big),$$

mit $\varphi(0) = (1,1)$.

Aufgabe 40.15.*

Bestimme die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,x,y) \longmapsto e^t x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

mit $\varphi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 40.16.*

Es sei ein Vektorfeld der Form

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,\, x,\, y) \longmapsto h\,(t,\, x,\, y) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

mit einer stetigen Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,\, x,\, y) \longmapsto h\,(t,\, x,\, y)\,,$$

gegeben. Die Richtungsvektoren stehen also stets senkrecht zu den Ortsvektoren. Es sei $r \in \mathbb{R}$ und es sei

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung zur eindimensionalen Differentialgleichung

$$y' \;=\; -h(t, r\cos y(t), r \sin y(t)).$$

Zeige, dass

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\,(g(t)) \\ r\sin\,(g(t)) \end{pmatrix},$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' \;=\; F(t,v)$$

ist.

Aufgabe 40.17.*

Ein Sprinter übt bei einem Hundert-Meter-Lauf eine konstante Kraft

auf, die zu Beginn zu einer Beschleunigung b führt, die allerdings bei zunehmender Geschwindigkeit gegen den Luftwiderstand aufgebracht werden muss. Der Bewegungsvorgang wird beschrieben durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = ay' + b$$

mit $a < 0$ und $b > 0$.

(1) Erstelle eine Differentialgleichung erster Ordnung für den Geschwindigkeitsverlauf $v(t) = y'(t)$ und löse das Anfangswertproblem für $v(t)$ mit $v(0) = 0$.
(2) Löse das Anfangswertproblem für $y(t)$ mit $y(0) = y'(0) = 0$.
(3) Bestimme $y(t)$ für die (realistischen) Werte $b = 4$ (in m/s^2) und $a = -\frac{1}{3}$. Wo befindet sich der Sprinter nach einer Sekunde, wo nach zehn Sekunden, welche Geschwindigkeit hat er zu diesen Zeitpunkten?

Aufgabe 40.18.*

Professor Knopfloch würde gerne einen Weltrekord über 100 Meter aufstellen. Seine Grundbeschleunigung ist $b = 2,5$ und es ist $a = -\frac{1}{3}$, vergleiche Aufgabe 40.17.

(1) Wie lange bracht Professor Knopfloch für 100 Meter?
(2) Mit der herkömmlichen Methode konnte Professor Knopfloch den Weltrekord nicht brechen. Deshalb versuch er es erneut, diesmal im Vakuum, um den Luftwiderstand zu umgehen und seine Kraft vollständig in Beschleunigung umzusetzen. Wie lange braucht Professor Knopfloch jetzt für 100 Meter? Bricht er den Weltrekord?

In der Vorlesung wurde nur besprochen, wie eine eindimensionale Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung führt. Diese Übersetzung gibt es auch höherdimensional.

Aufgabe 40.19. Es sei ein Differentialgleichungssystem

$$y_1^{(n)} = h_1\left(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-1)}\right), \ldots,$$

$$y_m^{(n)} = h_m\left(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-1)}\right)$$

der Ordnung n in m Variablen gegeben. Zeige, dass man dieses System analog zur Vorgehensweise in Lemma 40.14 in ein äquivalentes System erster Ordnung in mn Variablen übersetzen kann.

Aufgabe 40.20. Wir betrachten ein zweidimensionales Kraftfeld, das in jedem Punkt in Richtung des Ursprungs wirkt und damit eine Beschleunigung erzeugt, die proportional zur Entfernung sein soll (also ein harmonisches

Pendel in der Ebene). Die zugehörige zweidimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei c eine positive Konstante ist, die von der Masse des Zentrums abhängt. Mit den zusätzlichen Geschwindigkeitsvariablen $u = x'$ und $v = y'$ führt dies auf das System erster Ordnung in vier Variablen,

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ u' &= -cx, \\ y' &= v, \\ v' &= -cy. \end{aligned}$$

Dabei sind die beiden ersten Gleichungen unabhängig von den beiden letzten Gleichungen, und zwar handelt es sich jeweils um das in Aufgabe 28.20 besprochene System. Somit sind die Lösungen gleich

$$x(t) = \alpha \cos \sqrt{c}t + \beta \sin \sqrt{c}t$$

und

$$y(t) = \gamma \cos \sqrt{c}t + \delta \sin \sqrt{c}t.$$

Man überlege sich, wie die Anfangsbedingungen (x_0, u_0, y_0, v_0) mit den Lösungsparametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zusammenhängen und welche Bahnen die Lösungskurven beschreiben. Wann ist es ein Kreis, eine Ellipse, ein Strahl, eine Spirale?

Aufgabe 40.21. Wir betrachten ein zweidimensionales Kraftfeld, d.h. im Ursprungspunkt $(0, 0)$ ist das Gravitationszentrum (ein Stern), das eine auf dieses Zentrum gerichtete Kraftwirkung und damit eine Beschleunigung erzeugt. Nach dem Gravitationsgesetz ist die Kraft proportional zum Produkt der beiden Massen geteilt durch das Quadrat des Abstandes. Das Gravitationszentrum wird als unbeweglich angenommen, und es wird die Wirkungsweise auf einen (verglichen mit der Masse des Zentrums) kleinen Probekörper untersucht. Da in die Beschleunigung des Probekörpers dessen Masse auch proportional eingeht, ist diese für den Bewegungsprozess irrelevant. Die zugehörige zweidimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -c \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei c eine positive Konstante ist, die von der Masse des Zentrums und der Gravitationskonstanten abhängt. Mit den zusätzlichen Geschwindigkeitsvariablen $u = x'$ und $v = y'$ führt dies auf das System erster Ordnung in vier Variablen,

$$x' = u,$$

$$
\begin{aligned}
u' &= -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}^3}x,\\
y' &= v,\\
v' &= -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}^3}y.
\end{aligned}
$$

(1) Wir betrachten kreisförmige Lösungen der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos at \\ r\sin at \end{pmatrix}$$

mit $a, r \in \mathbb{R}_+$. Welche Beziehung muss zwischen c, a, r bestehen (drittes Keplersches Gesetz)?

(2) Wir betrachten elliptische Lösungen der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos at \\ s\sin at \end{pmatrix}$$

mit $a, r, s \in \mathbb{R}_+$. Welche Beziehung muss zwischen c, a, r, s bestehen?

(3) Finde Lösungen, die auf einem Strahl zum Zentrum verlaufen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 40.22. (4 Punkte)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \left(-\sin^3 t\cos t,\ \frac{t^3-t+1}{t^2-4}\right) \text{ mit } v(0) = (3,\ 7)\ .$$

Aufgabe 40.23. (4 Punkte)

Finde die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,x,y) \longmapsto \left(xt-3(t+1)e^{-t},\ \frac{t^2}{\sin y}\right)$$

und zur Anfangsbedingung $v(0) = (2,0)$.

Aufgabe 40.24. (3 Punkte)

Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = t^2(x-y)\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt 0.

Aufgabe 40.25. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,v,w) \longmapsto (t^3-t)(v,w) = ((t^3-t)v,(t^3-t)w),$$

mit $\varphi(0) = (2,3)$.

Aufgabe 40.26. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,v,w) \longmapsto (t^2v)(v,w) = (t^2v^2,t^2vw),$$

mit $\varphi(0) = (5,-1)$.

Aufgabe 40.27. (5 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$F\colon U \longrightarrow V$$

ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Es sei

$$v\colon J \longrightarrow U$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = F(v)$. Es gebe zwei Zeitpunkte $t_0 \neq t_1$ in J mit $v(t_0) = v(t_1)$. Zeige, dass es dann eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung dieser Differentialgleichung gibt.

Die Aufgabe zum Hochladen

Für die folgende Aufgabe gibt es keinen festen Abgabetermin. Hochladen meint über Commons in einem dort erlaubten Format.

Aufgabe 40.28. (10 Punkte)

Erstelle eine Animation, die den Weltrekordlauf von Usain Bolt über 100 Meter vom 16. August 2009 mit geeigneten Parametern a und b aus Aufgabe 40.17 modelliert.

Abbildungsverzeichnis