Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis II

Arbeitsblatt 41

Übungsaufgaben

Aufgabe 41.1. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Bestimme zur Schrittweite $s = \frac{1}{k}$ die approximierenden Punkte P_n gemäß dem Polygonzugverfahren. Bestimme insbesondere P_k. Was passiert mit P_k für $k \to \infty$?

Aufgabe 41.2. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (t, x, y) \longmapsto (-y, x).$$

Es sei $P_0 \neq (0, 0)$ und $s > 0$ eine Schrittweite. Zeige, dass das Polygonzugverfahren zu einem Streckenzug $P_0, P_1, P_2, \ldots$ führt, bei dem der Abstand der Punkte zum Nullpunkt gegen unendlich läuft (obwohl nach Beispiel 40.8 die Lösungskurven Kreise beschreiben). Wie verhalten sich die Winkel am Nullpunkt, die durch P_n und P_{n+1} gegeben sind.

Aufgabe 41.3. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y \text{ mit } y(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 41.4.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = ty + 1 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

Aufgabe 41.5. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^3 - y - 4t + 2t^2 \text{ mit } y(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.6. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + t^2 y - 5ty^2 + 3t^3 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.7. (1) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -\sin y$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ durch einem Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

(2) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -y$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ durch einem Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

(3) Vergleiche die Lösungen zu (1) und (2).

Für die beiden folgenden Aufgaben verwende man die Potenzreihe

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 \pm \ldots .$$

Für den inhaltlichen Hintergrund siehe Beispiel Anhang 3.5 bzw. Beispiel 3.6.

Aufgabe 41.8.*

Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$x'' = \frac{-2gx - 4x(x')^2}{1 + 4x^2}$$

mit $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$ bis zur Ordnung 4. Dabei ist g eine Konstante.

Aufgabe 41.9. Löse das Anfangswertproblem

$$x'' = -gx\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2}x'^2.$$

mit $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$ durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 4.

Aufgabe 41.10.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = 3yy' + y^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.11. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} xt^2 - y^2 t \\ xy \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.12. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} t^3 - yt^2 \\ tx^2 y - \sinh t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.13. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ t^5 \end{pmatrix}$$

für $t > 0$.

Aufgabe 41.14. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41.15. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41.16. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41.17. Bestimme alle Lösungen (für $t > 0$) des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & t^3 - t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41.18. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t^2 - t + 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41.19. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen mit

$$f_{11}(t) f_{22}(t) - f_{21}(t) f_{12}(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{f'_{11} f_{22} - f'_{12} f_{21}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} & \frac{-f'_{11} f_{12} + f'_{12} f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} \\ \frac{f'_{21} f_{22} - f'_{22} f_{21}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} & \frac{-f_{12} f'_{21} + f'_{22} f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass sowohl $\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$ Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.

Aufgabe 41.20. Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$$

eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Zeige, dass die einzige konstante Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ die Nulllösung ist.

Aufgabe 41.21.*

Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem auf $I \times \mathbb{R}^n$ (I ein reelles Intervall) mit einer Funktionenmatrix

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n},$$

wobei das zugrunde liegende Vektorfeld zugleich ein Zentralfeld sei. Zeige, dass die Matrix die Gestalt

$$M(t) = \varphi(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einer geeigneten Funktion

$$\varphi\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

besitzt.

Aufgabe 41.22. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge Funktionen

$$a_{ij}\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für alle $t \in I$. Zeige, dass $e^{\lambda t} \cdot u$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ ist.

Aufgabe 41.23. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein (konstanter) Eigenvektor von $M(t)$ zum (variablen, von t differenzierbar abhängigen) Eigenwert $\lambda(t)$. Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda(t)t} \cdot u$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgabe 41.24. Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$$

eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u(t) \in \mathbb{R}^n$ ein (variabler, von t differenzierbar abhängiger) Eigenvektor von $M(t)$ zum konstanten Eigenwert λ. Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda t} \cdot u(t)$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgabe 41.25. Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und $\varphi\colon\, V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass die transformierte Differentialgleichung auf W ebenfalls linear ist.

Aufgabe 41.26. Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2-1 & t^3+t+2 \\ t+3 & t^2+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
mit der Anfangsbedingung
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
bis zur fünften Ordnung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 41.27. (6 Punkte)

a) Schreibe ein Computerprogramm, das zu dem Vektorfeld aus Beispiel 41.3 zu einem Startzeitpunkt t_0, einem Startpunkt $P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und einer vorgegebenen Schrittweite $s > 0$ die approximierenden Punkte P_n berechnet.

b) Berechne mit diesem Programm die Punkte P_n für

(1) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{10}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10$.

(2) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{100}$, $n = 100$.

(3) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(4) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,999 \\ 1,001 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(5) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,99 \\ 1,01 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(6) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(7) $t_0 = -4$, $P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{10}$, $n = 100$.

(8) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(Abzugeben ist lediglich Teil b), und zwar in einer leserfreundlichen Form.)

Aufgabe 41.28. (5 (1+2+2) Punkte)

a) Übersetze das Anfangswertproblem zweiter Ordnung
$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

b) Bestimme mit dem Polygonzugverfahren zur Schrittweite $s = \frac{1}{2}$ die Näherungspunkte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 für dieses System.

c) Berechne den Wert des zugehörigen Streckenzuges an der Stelle $t = \pi/2$.

Aufgabe 41.29. (6 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} x^2t - xyt + y^3 - yt^3 \\ x^3 - xy^2 + \cos t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.30. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -t^2 - 3t + 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41.31. (8 (2+2+4) Punkte)

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) Erstelle eine Differentialgleichung in einer Variablen, die die Funktion $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$ zu einer Lösung (x, y) erfüllen muss.
(2) Finde eine Lösung für $z(t)$ aus Teil (1).
(3) Finde eine nichttriviale Lösung des Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Im ersten und zweiten Teil wird untersucht, wie sich bei einer Lösung des Systems der Abstand zum Nullpunkt (bzw. dessen Quadrat) verhält. Es liegt nahe, sich für den dritten Teil zu überlegen, wie sich bei einer Lösung der Winkel zur x-Achse verhält (Polarkoordinaten).

Aufgabe 41.32. (4 Punkte)

Finde eine nichttriviale Lösung (für $t > 1$) zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{4t^4-1}{t^5-t} & \frac{-3t}{t^4-1} \\ \frac{-t}{t^4-1} & \frac{3t^4-2}{t^5-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Aufgabe 41.19.

Die für $t \in \mathbb{R}$, $-1 < t < 1$, und ein $n \in \mathbb{N}$ definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2}y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter n.

Aufgabe 41.33. (5 Punkte)

Zeige, dass das n-te *Legendre-Polynom*[1]

$$\frac{1}{2^n(n!)}((t^2-1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter n ist.

[1]Hier bedeutet das hochgestellte (n) die n-te Ableitung.

Abbildungsverzeichnis