

## Analysis II

### Arbeitsblatt 42

### Übungsaufgaben

AUFGABE 42.1. Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.2. Es sei  $M$  eine quadratische  $n \times n$ -Matrix über  $\mathbb{K}$ . Es sei  $\varphi_1$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t)$$

und  $\varphi_2$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_2(t).$$

Zeige, dass  $\varphi_1 + \varphi_2$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t) + z_2(t)$$

ist.

AUFGABE 42.3. Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten zu einer reellen  $n \times n$ -Matrix  $M$  und sei  $u \in \mathbb{C}^n$  ein Eigenvektor von  $M$  zum Eigenwert  $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ . Zeige, dass

$$e^{at} \cos(bt) \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(u_n) \end{pmatrix}$$

und

$$e^{at} \sin(bt) \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(u_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Im}(u_n) \end{pmatrix}$$

Lösungen des Systems sind.

AUFGABE 42.4. Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, sei  $L$  der Lösungsraum dieses Systems und sei  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{K}^n, \varphi \longmapsto \varphi(t_0),$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

AUFGABE 42.5. Wie transformieren sich in Lemma 42.5 die Anfangsbedingungen?

AUFGABE 42.6.\*

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.7. Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.8. Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.9.\*

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

## AUFGABE 42.10.\*

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

## AUFGABE 42.11.\*

Beschreibe für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

die allgemeine Lösungen mit

- (1) Exponentialfunktionen,
- (2) Hyperbelfunktionen.

AUFGABE 42.12. Finde für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lösungen mit  $u(0) = a$  und  $v(0) = b$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  sind.

AUFGABE 42.13. Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten mit einer oberen Dreiecksmatrix  $M$ . Zeige, dass es ein Fundamentalsystem von Lösungsfunktionen  $v_1, \dots, v_n$  mit

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

gibt.

Die folgenden Aufgaben löse man mit Satz Anhang 4.1, man spricht vom *Ansatz vom Typ der rechten Seite*.

AUFGABE 42.14. Löse die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = e^t.$$

AUFGABE 42.15.\*

Löse die Differentialgleichung

$$y'' - y = e^t.$$

AUFGABE 42.16.\*

Löse die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 9y = (t^2 - 8)e^{5t}.$$

AUFGABE 42.17. Löse die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 6y = (t^3 + 5t + 3)e^{2it}.$$

AUFGABE 42.18.\*

Es sei  $v' = Mv$  ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten in  $d$  Variablen und sei ein Punkt  $P \in \mathbb{R}^d$  vorgegeben.

- (1) Erstelle eine rekursive Formel für die Punkte  $P_n$  im Polygonzugverfahren zum Startpunkt  $P_0 = P$  und zur Schrittweite  $s$  in dieser Situation.
- (2) Erstelle eine geschlossene Formel für  $P_n$  zur Schrittweite  $s$ .
- (3) Erstelle eine Formel für  $P_n$  zur Schrittweite  $\frac{1}{n}$ .

In eine Potenzreihe kann man nicht nur Zahlen einsetzen, sondern auch quadratische Matrizen, wobei die Potenzen als Matrixpotenzen zu interpretieren sind, und sich fragen, ob die entstehenden Folgen im Raum der Matrizen konvergieren.

AUFGABE 42.19. Es sei  $M$  eine reelle (oder komplexe)  $d \times d$ -Matrix. Zeige, dass

$$\begin{aligned} \exp M &= E_d + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}M^k \end{aligned}$$

im Raum der Matrizen konvergiert.

AUFGABE 42.20. Es sei  $v' = Mv$  ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems mit der Anfangsbedingung  $v(0) = w \in \mathbb{R}^d$  durch

$$v(t) = (\exp(tM))w$$

gegeben ist.

Verwende, dass die Ableitung der Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \text{Mat}_d(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{d^2}, t \longmapsto \exp(tM),$$

gleich  $M \cdot \exp(tM)$  ist.

AUFGABE 42.21. Begründe Lemma 42.1 mit Aufgabe 42.20.

AUFGABE 42.22. Es sei  $v' = Mv$  ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten in  $d$  Variablen und sei  $s \in \mathbb{R}$ . Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

die einem Punkt  $w \in \mathbb{R}^d$  den Ortspunkt zum Zeitpunkt  $s$  der Lösung des Anfangswertproblems  $v(0) = w$  zuordnet, eine lineare Abbildung ist und durch die Matrix  $\exp(sM)$  beschrieben wird.

AUFGABE 42.23. Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

ist.

AUFGABE 42.24. Es sei  $M$  die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  und  $D$  die Ableitung, aufgefasst als Operator<sup>1</sup>

$$D: M \longrightarrow M, f \longmapsto D(f) = f'.$$

Zu einem Polynom  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P = a_nX^n + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ , betrachten wir den Operator

$$P(D): M \longrightarrow M, f \longmapsto (P(D))(f) = a_nD^n(f) + \dots + a_2D^2(f) + a_1D(f) + a_0f.$$

<sup>1</sup>Eine Abbildung, die Funktionen in Funktionen überführt, nennt man häufig Operator.

Berechne  $(P(D))(f)$  für  $P = 2X^3 - 4X^2 + 7X - 3$  und  $f = x^4, e^x, e^{2x}, \sin x$ .  
Zeige, dass  $P(D)$  eine lineare Abbildung auf  $M$  ist.

AUFGABE 42.25. Es sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass der Differentialoperator  $(D - \lambda)^n$  die Funktionen  $x^j e^{\lambda x}$  mit  $0 \leq j < n$  auf die Nullfunktion abbildet.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 42.26. (6 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.27. (5 Punkte)

Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.28. (6 Punkte)

Es sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.29. (5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.30. (4 Punkte)

Löse die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 8y = (t^2 - 4t + 7)e^{3t}.$$



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7