Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis II

Arbeitsblatt 45

Übungsaufgaben

Für dieses Aufgabenblatt darf die Beziehung zwischen totalem Differential und partiellen Ableitungen bzw. Richtungsableitungen nicht verwendet werden.

Aufgabe 45.1. Ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2,$$

im Punkt -3 total differenzierbar? Was ist das totale Differential in diesem Punkt?

Aufgabe 45.2.*

Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2y^3.$$

(1) Man schreibe $(x+v)^2(y+w)^3$ als
$$(x+v)^2(y+w)^3 \;=\; x^2y^3 + av + bw + cv^2 + dvw + ew^2$$
mit geeigneten Termen a,b,c,d,e, wobei a und b nicht von v und w abhängen dürfen.
(2) Man folgere aus der Darstellung aus (1), dass x^2y^3 in einem beliebigen Punkt (x,y) total differenzierbar ist.

Aufgabe 45.3. Berechne für die Addition

$$+\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\, (x,y) \longmapsto x+y,$$

und für die Multiplikation

$$\cdot\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\, (x,y) \longmapsto x\cdot y,$$

das totale Differential.

Aufgabe 45.4. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \min{(x,y)}.$$

(1) Skizziere die Funktion.
(2) Zeige, dass f stetig ist.

(3) Bestimme für jeden Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und jede Richung $v \in \mathbb{R}^2$, ob die Richtungsableitung in diesem Punkt und in diese Richtung existiert.
(4) Bestimme für jeden Punkt, ob in diesem Punkt die Funktion f total differenzierbar ist.

Aufgabe 45.5. Es sei $\varphi\colon V \to W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$. Zeige, dass φ differenzierbar ist mit totalem Differential 0.

Aufgabe 45.6. Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Es sei $\varphi\colon G \to W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbar mit dem Differential $(D\varphi)_P$. Zeige, dass für alle $a \in \mathbb{K}$ die Beziehung

$$(D(a\varphi))_P = a\,(D\varphi)_P$$

gilt.

Aufgabe 45.7. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass f im Nullpunkt total differenzierbar ist. Man gebe dabei explizit das totale Differential und die Abweichungsfunktion an.

Aufgabe 45.8. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass f in jedem Punkt total differenzierbar ist. Man gebe dabei explizit das totale Differential und die Abweichungsfunktion an.

Aufgabe 45.9. Es seien V, W_1 und W_2 endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(1) Seien $L_1\colon V \to W_1$ und $L_2\colon V \to W_2$ $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$L_1 \times L_2\colon V \longrightarrow W_1 \times W_2,\ v \longmapsto (L_1(v), L_2(v)),$$

$\mathbb{K}$-linear ist.
(2) Seien $f_1\colon V \to W_1$ und $f_2\colon V \to W_2$ im Punkt $P \in V$ differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$f = (f_1 \times f_2)\colon V \longrightarrow W_1 \times W_2,\ Q \longmapsto (f_1(Q), f_2(Q)),$$

im Punkt P differenzierbar ist mit dem totalen Differential

$$(Df)_P = (Df_1)_P \times (Df_2)_P\,.$$

Die folgende Aufgabe verwendet das Konzept Äquivalenzrelation.

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

(1) Es ist $x \sim x$ (*reflexiv*).
(2) Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*).
(3) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Aufgabe 45.10. Es seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f, g \colon G \to W$ Abbildungen und $P \in G$. Wir nennen f, g im Punkt P *tangential äquivalent*, wenn der Limes

$$\lim_{v \to 0} \frac{(f-g)(P+v)}{\|v\|}$$

existiert und gleich 0 ist.

(1) Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Abbildungsmenge von G nach W gegeben ist.
(2) Es sei f total differenzierbar. Zeige, dass f zu seiner linearen Approximation tangential äquivalent ist.
(3) Es seien f und g tangential äquivalent. Zeige, dass in diesem Fall f genau dann in P total differenzierbar ist, wenn dies für g gilt, und dass ihre totalen Differentiale im Punkt P übereinstimmen.

Aufgabe 45.11. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeige, dass die Skalarmultiplikation

$$\varphi \colon \mathbb{R} \times V \longrightarrow V,\ (s, v) \longmapsto sv,$$

in jedem Punkt $P = (s, v)$ total differenzierbar ist mit

$$(D\varphi)_P\,(t, w) = tv + sw.$$

Aufgabe 45.12. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für Funktionen in einer Variablen ab.

Aufgabe 45.13. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für differenzierbare Kurven (für eine differenzierbare Kurve $f \colon J \to V$ und eine differenzierbare Umparametrisierung $h \colon I \to J$) ab.

Aufgabe 45.14.*

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, W ein reeller Vektorraum und

$$\varphi\colon I \longrightarrow W$$

eine differenzierbare Kurve. Zeige, dass zwischen dem totalen Differential und der Kurven-Ableitung die Beziehung

$$(D\varphi)_P(1) = \varphi'(P)$$

besteht.

Aufgabe 45.15.*

Es sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, sei $f\colon G \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeige

$$(D(g \circ f))_P = g'(f(P)) \cdot (Df)_P$$

für $P \in G$.

Aufgabe 45.16. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Beweise die Produktregel aus der allgemeinen Kettenregel unter Verwendung von Aufgabe 45.4.

Aufgabe 45.17. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f, g\colon G \to \mathbb{R}$ zwei in $P \in G$ differenzierbare Funktionen. Wende die Kettenregel und Aufgabe 45.4 auf das Diagramm

$$G \xrightarrow{f,g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{mult}} \mathbb{R}$$

an, um zu zeigen, dass die Gleichung

$$(D(f \cdot g))_P = g(P) \cdot (Df)_P + f(P) \cdot (Dg)_P$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 45.18. (4 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $\varphi\colon G \to W$ eine Abbildung und $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) φ ist differenzierbar in P mit dem totalen Differential L.

(2) Der Limes

$$\lim_{v \to 0, v \neq 0} \frac{\varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)}{\|v\|}$$

existiert und ist gleich 0.

(3) Der Limes

$$\lim_{v \to 0, v \neq 0} \frac{\|\varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)\|}{\|v\|}$$

existiert und ist gleich 0.

Aufgabe 45.19. (4 Punkte)

Es seien $f_1, \ldots, f_n$ differenzierbare Funktionen in einer Variablen. Bestimme das totale Differential der Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)).$$

Aufgabe 45.20. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art $P \mapsto P + v$ mit einem festen Vektor $v \in V$, wenn

$$(D\varphi)_P = \mathrm{Id}_V$$

für alle $P \in V$ ist.

Aufgabe 45.21. (4 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Mengen, $P \in G$ ein Punkt, $\varphi \colon G \to W$ und $f \colon G \to \mathbb{K}$ in P differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass dann die Produktabbildung

$$f \cdot \varphi \colon G \longrightarrow W$$

in P differenzierbar ist mit

$$(D(f \cdot \varphi))_P = f(P) \cdot (D\varphi)_P + (Df)_P \cdot \varphi(P).$$

Tipp: Verwende Aufgabe 45.12 und die Kettenregel.

AUFGABE 45.22. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

eine im Punkt $P \in \mathbb{C}$ komplex-differenzierbare Funktion. Zeige, dass f auch als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ im reellen Sinn total differenzierbar ist. In welcher Beziehung steht die komplexe Zahl $f'(P)$ und das totale Differential $(Df)_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Abbildungsverzeichnis