Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis II

Arbeitsblatt 49

Übungsaufgaben

AUFGABE 49.1. Es sei $X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$ ein Monom und es sei $D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n}$ eine Hintereinanderschaltung von partiellen Ableitungen, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

(1) Zeige
$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}) = 0,$$
falls $s_j > r_j$ für ein j ist.

(2) Zeige
$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}) = \frac{r_1! \cdots r_n!}{(r_1 - s_1)! \cdots (r_n - s_n)!} X_1^{r_1 - s_1} \cdots X_n^{r_n - s_n},$$
falls $s_j \leq r_j$ für alle j ist.

AUFGABE 49.2. Es sei $X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$ ein Monom und es sei $D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n}$ eine Hintereinanderschaltung von partiellen Ableitungen, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

(1) Zeige
$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n})\,(0, \ldots, 0) = 0,$$
falls $s_j \neq r_j$ für ein j ist.

(2) Zeige
$$(D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n})\,(0, \ldots, 0) = r_1! \cdots r_n!.$$

AUFGABE 49.3. Bestätige Satz 49.1 für $f(x, y) = x^a y^b$ in $(0, 0)$ und $v = (2, 3)$ bis zur dritten Ableitung.

AUFGABE 49.4. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 - y \cdot \sin x,$$
im Nullpunkt $(0, 0)$.

Aufgabe 49.5.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto f(x,y) = e^{x-y^2},$$

im Punkt $(1,1)$.

Aufgabe 49.6.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = e^x yz^2 - xy,$$

im Punkt $(1,0,-1)$.

Aufgabe 49.7.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto f(x,y) = e^{\sin x - \cos y},$$

im Punkt $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 49.8. Notiere das Taylor-Polynom für eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion in 2 oder 3 Variablen für die Grade $k = 1,2,3$.

Aufgabe 49.9. Es sei

$$f(x,y) \;=\; x^2y - 3xy + 5y^2 + 4x.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt $P = (1,-2)$ algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen $u = x-1, v = y+2$ aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

Aufgabe 49.10. Es sei f ein Polynom in n Variablen vom Grad $\leq k$. Zeige, dass f mit dem Taylor-Polynom vom Grad $\leq k$ von f im Nullpunkt übereinstimmt.

Aufgabe 49.11. Es sei $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ ein Monom vom Grad $|\, r \,| \;=\; \sum_{j=1}^n r_j \;>\; k$. Zeige

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}}{\|x\|^k} \;=\; 0.$$

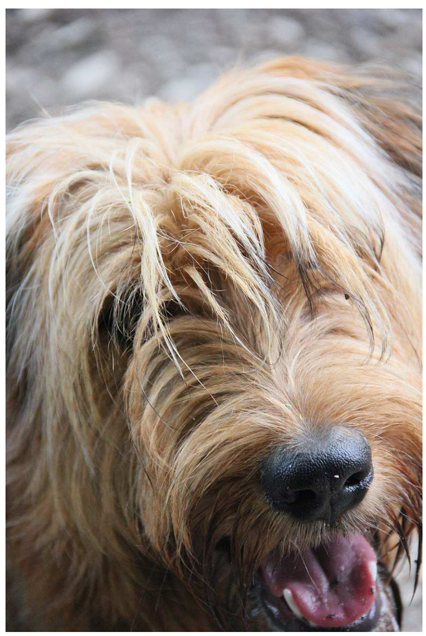
In den folgenden Aufgaben werden einige Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten besprochen, die eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ ein n-Tupel natürlicher Zahlen. Es sei $k := \sum_{j=1}^{n} r_j$. Dann nennt man die Zahl

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}$$

einen *Polynomialkoeffizienten*.

Aufgabe 49.12. Im Fressnapf von Vorli liegen heute drei Würste, vier Knochen, sieben Trockenbällchen und zwei Kaustangen. In wie vielen Reihenfolgen kann Vorli das auffressen?



Aufgabe 49.13. In einem Studium werden 11 Leistungsnachweise verlangt, und zwar 3 Seminarscheine, 5 Klausuren, 2 mündliche Prüfungen und eine Hausarbeit, die in beliebiger Reihenfolge erbracht werden können. Wie viele Reihenfolgen gibt es, um diese Leistungsnachweise zu erbringen?

Aufgabe 49.14. Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_k)$ mit n. Zeige, dass die Anzahl der Abbildungen

$$\{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, k\},$$

bei denen das Urbild zu $j \in \{1, \ldots, n\}$ aus genau r_j Elementen besteht, gleich dem Multinomialkoeffizienten

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

ist.

Aufgabe 49.15. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^{k} r_j = n$. Zeige, dass die Anzahl der n-Tupel

$$(j_1, \ldots, j_n) \in \{1, \ldots, k\}^n ,$$

in denen die Zahl j genau r_j-mal vorkommt, gleich

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

ist.

Aufgabe 49.16. Zeige, dass die Anzahl der geordneten Partitionen mit eventuell leeren Blöcken zum Anzahltupel $r = (r_1, \ldots, r_k)$ einer n-elementigen Menge gleich

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

ist.

Aufgabe 49.17. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Beweise den *Polynomialsatz*, das ist die Gleichung

$$(a_1 + \cdots + a_n)^k = \sum_{r=(r_1,\ldots,r_n),\, \sum_{i=1}^{n} r_i = k} \binom{k}{r} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n} .$$

Aufgabe 49.18.*

Es sei

$$f \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge sei. Zeige, dass für $P \in G$ und $v \in V$ die Beziehung

$$\sum_{r \in \mathbb{N}^n,\, |\, r\,| = 2} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r \;=\; \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_P f(v, v)$$

gilt.

AUFGABE 49.19. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige durch ein Beispiel, dass das Taylor-Polynom zum Produkt fg im Punkt P vom Grad ≤ 2 nicht das Produkt der beiden Taylor-Polynome von f und g in P vom Grad ≤ 1 sein muss.

AUFGABE 49.20. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $0 \in G$ und

$$R \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, falls für eine Konstante $c > 0$ und alle v in einer offenen Umgebung von 0 die Abschätzung $\|R(v)\| \leq c\|v\|^{k+1}$ gilt, dass dann $\lim_{v \to 0} \frac{\|R(v)\|}{\|v\|^k} = 0$ folgt.

Zeige umgekehrt durch ein Beispiel, dass aus $\lim_{v \to 0} \frac{\|R(v)\|}{\|v\|^k} = 0$ im Allgemeinen nicht die Abschätzung $\|R(v)\| \leq c\|v\|^{k+1}$ folgt.

AUFGABE 49.21.*

Finde ein reelles Polynom f in zwei Variablen vom Grad ≤ 2, das die folgenden Eigenschaften besitzt. Ist die Lösung eindeutig?

(1) Es ist $f((0,0)) = 0$.
(2) Es ist $f((1,1)) = 2$.
(3) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial x}((0,0)) = 1.$$
(4) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)) = -2.$$
(5) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial x}((1,1)) = 2.$$
(6) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial y}((1,1)) = 3.$$

AUFGABE 49.22.*

Gibt es ein reelles Polynom f in zwei Variablen vom Grad ≤ 2, das die folgenden Eigenschaften besitzt?

(1) Es ist $f((0,0)) = 0$.
(2) Es ist $f((0,1)) = 0$.

(3) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial x}((0,0)) = 1.$$
(4) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)) = -2.$$
(5) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial x}((0,1)) = -1.$$
(6) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial y}((0,1)) = 1.$$

Aufgabe 49.23.*

Zeige, dass es kein reelles Polynom f in zwei Variablen vom Grad ≤ 2 gibt, das die folgenden Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $f((0,0)) = 0$.
(2) Es ist $f((1,1)) = 0$.
(3) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial x}((0,0)) = 1.$$
(4) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)) = -2.$$
(5) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial x}((1,1)) = -1.$$
(6) Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial y}((1,1)) = 1.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 49.24. (5 Punkte)

Bestätige Satz 49.1 anhand des folgenden Beispiels.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2y^3 - \cos\left(x-y^2\right),$$
$P = (1,-3)$, $v = (5,-2)$, $k = 2$.

AUFGABE 49.25. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto z \cdot \exp(xy),$$

im Nullpunkt $(0,0,0)$.

AUFGABE 49.26. (4 Punkte)

Es sei

$$f(x,y) \,=\, -2xy^3 - 5x^2y^2 + 4xy^2 - 7y + 3.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt $P = (-3,4)$ algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen $u = x+3, v = y-4$ aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

AUFGABE 49.27. (5 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f,g\colon\, G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei k-mal stetig differenzierbare Funktionen mit den Taylor-Polynomen $T_k(f)$ und $T_k(g)$ in P vom Grad $\leq k$. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist, und dass für das Taylor-Polynom $T_k(fg)$ von fg in P vom Grad $\leq k$ die Beziehung

$$T_k(fg) \,=\, (T_k(f) \cdot T_k(g))_{\leq k}$$

besteht, wobei der Subskript $\leq k$ bedeutet, dass das Polynom bis zum Grad k genommen wird.

AUFGABE 49.28. (5 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und

$$f\colon\, G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es maximal ein Polynom $p(x_1,\ldots,x_n)$ vom Grad $\leq k$ mit der Eigenschaft geben kann, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|f(x) - p(x)\|}{\|x\|^k} \,=\, 0$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Waeller26.jpg , Autor = Benutzer Odatrulle auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 3

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9