

Analysis II**Arbeitsblatt 52****Übungsaufgaben**

Mit diffeomorph ist im Folgenden stets C^1 -diffeomorph gemeint.

AUFGABE 52.1. Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen \mathbb{R}^n und einer offenen Kugel $U(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

AUFGABE 52.2. Zeige, dass eine offene Kreisscheibe $U(P, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ ($r > 0$) und ein offenes Rechteck $]a, b[\times]c, d[$ ($b > a, d > c$) diffeomorph sind.

AUFGABE 52.3. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Die Identität ist ein Diffeomorphismus.
- (2) Eine lineare bijektive Abbildung ist ein Diffeomorphismus.
- (3) Die Umkehrabbildung eines Diffeomorphismus ist wieder ein Diffeomorphismus.
- (4) Die Hintereinanderschaltung von Diffeomorphismen ist ein Diffeomorphismus.

AUFGABE 52.4. Es seien $U_1 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_2$, $U_3 \subseteq V_3$, und $U_4 \subseteq V_4$ offene Teilmengen in reellen endlichdimensionalen Vektorräumen. Es seien

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_3$$

und

$$\psi: U_2 \longrightarrow U_4$$

C^1 -Diffeomorphismen. Zeige, dass auch die Produktabbildung

$$\varphi \times \psi: U_1 \times U_3 \longrightarrow U_2 \times U_4$$

ein C^1 -Diffeomorphismus ist.

AUFGABE 52.5. Es sei

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$U_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 4v\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- a) Skizziere U_1 und U_2 .
 b) Zeige, dass U_1 und U_2 offen sind.
 c) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy),$$

ein Diffeomorphismus ist.

AUFGABE 52.6. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2y, x - \sin y).$$

Zeige, dass φ in $P = (1, 0)$ regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von $\varphi|_U$ in $\varphi(P)$, wobei U eine offene Umgebung von P sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

AUFGABE 52.7.*

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

AUFGABE 52.8. Es seien U, V, W euklidische Vektorräume und seien $\varphi: U \longrightarrow V$ und $\psi: V \longrightarrow W$ differenzierbare Abbildungen. Es sei φ regulär in $P \in U$ und ψ regulär in $Q = \varphi(P) \in V$. Ist dann $\psi \circ \varphi$ regulär in P ? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

AUFGABE 52.9. Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2,$$

kann man reell als

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, x + iy = (x, y) \longmapsto (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy),$$

schreiben. Untersuche φ auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist φ umkehrbar?

AUFGABE 52.10. Finde möglichst große offene Teilmengen $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und $H \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von G nach H induziert.

AUFGABE 52.11.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2} \right).$$

- Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ .
- Zeige, dass φ in $P = (1, 2)$ lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ besitzt, und bestimme das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$.
- Man gebe alle Punkte $Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ an, in denen φ nicht lokal invertierbar ist.

AUFGABE 52.12. Zeige, dass die Transformation

$$[0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow B(0, 1), (\alpha, w) \longmapsto (\sqrt{w} \cos \alpha, \sqrt{w} \sin \alpha),$$

auf geeigneten offenen Teilmengen ein Diffeomorphismus ist und berechne die Jacobi-Determinante in jedem Punkt.

AUFGABE 52.13. Es seien P_1, \dots, P_n und Q_1, \dots, Q_n Punkte in der Ebene \mathbb{R}^2 . Zeige, dass die beiden offenen Mengen $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1, \dots, Q_n\}$ zueinander diffeomorph sind.

AUFGABE 52.14. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$

$$U = \mathbb{R} \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander diffeomorph sind.

AUFGABE 52.15. Es sei

$$T = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{(0, 0)\},$$

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander nicht homöomorph sind.

AUFGABE 52.16.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (a, b, c, d, u, v) \longmapsto (au + bv + c + d, ad - bc, ac - b^2, bd - c^2).$$

- Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.
- Zeige, dass φ im Nullpunkt nicht regulär ist.
- Zeige, dass φ in $(1, 1, 0, 0, 1, 1)$ regulär ist.

AUFGABE 52.17.*

Wir betrachten die Abbildung

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt $P = (x, y, z)$ genau dann ein regulärer Punkt von F ist, wenn die Koordinaten von P paarweise verschieden (also $x \neq y$, $x \neq z$ und $y \neq z$) sind.

AUFGABE 52.18.*

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die Menge der regulären Punkte von φ offen ist.

AUFGABE 52.19. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (u, v) \longmapsto \left(\frac{-u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right),$$

ein Diffeomorphismus ist.

AUFGABE 52.20.*

Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, $U \subseteq V$ und $U' \subseteq W$ offene Teilmengen und

$$\varphi: U \longrightarrow U'$$

ein Diffeomorphismus. Es sei

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, x) \longmapsto F(t, x),$$

ein Vektorfeld auf U . Es sei G das durch

$$G(t, y) := (D\varphi)_{\varphi^{-1}(y)}(F(t, \varphi^{-1}(y)))$$

definierte Vektorfeld auf U' . Zeige, dass

$$\alpha: J \longrightarrow U$$

genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(t_0) = x_0,$$

wenn $\varphi \circ \alpha$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = G(t, y) \text{ mit } y(t_0) = \varphi(x_0)$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 52.21. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt (x, y, z) genau dann ein kritischer Punkt von φ ist, wenn in (x, y, z) zwei Zahlen doppelt vorkommen.

AUFGABE 52.22. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 - y^2z, y + \sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von φ eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.

AUFGABE 52.23. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x, xy).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern (also die Urbilder zu einem Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$), das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung. Man gebe möglichst große offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ derart an, dass

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

ein Diffeomorphismus ist.

AUFGABE 52.24. (4 Punkte)

Es seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen mit $0 \in V_1, V_2$ und es sei

$$\varphi: U_1 \times V_1 \longrightarrow U_2 \times V_2$$

ein Diffeomorphismus, der eine Bijektion zwischen $U_1 \times \{0\}$ und $U_2 \times \{0\}$ induziert. Zeige, dass dann auch die Einschränkung von φ auf $U_1 \cong U_1 \times \{0\}$ nach $U_2 \cong U_2 \times \{0\}$ ein Diffeomorphismus ist.

AUFGABE 52.25. (3 Punkte)

Beschreibe das komplexe Potenzieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^n,$$

in Polarkoordinaten.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7