

Analysis II**Arbeitsblatt 55****Übungsaufgaben**

AUFGABE 55.1.*

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei

$$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Es sei $t \in I$ ein Punkt mit $\gamma'(t) \neq 0$. Zeige auf zweifache Weise, dass es ein offenes Intervall $t \in J \subseteq I$ derart gibt, dass $\gamma|_J$ injektiv ist.

- (1) Mit dem Satz über die injektive Abbildung.
- (2) Direkt.

AUFGABE 55.2.*

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (s, t) \longmapsto (s, -s - t^2, t^3) = (x, y, z).$$

- a) Erstelle die Jacobi-Matrix von φ .
- b) Bestimme die regulären Punkte (s, t) von φ .
- c) Zeige, dass $\varphi(s, t)$ die Bedingung

$$(x + y)^3 + z^2 = 0$$

erfüllt.

- d) Zeige, dass die Abbildung injektiv ist.

AUFGABE 55.3.*

Es sei

$$U = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \{(2, 4), (4, 2)\}.$$

Begründe, ob die Abbildung

$$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (x + y, xy, x^y) = (u, v, w).$$

injektiv ist oder nicht.

AUFGABE 55.4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Zeige die folgenden Aussagen.

a) Wenn f (als Abbildung) Lipschitz-stetig ist, so genügt das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung.

b) Wenn das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt, so sind für jedes feste $t \in I$ die Abbildungen

$$U \longrightarrow V, v \longmapsto f(t, v),$$

Lipschitz-stetig.

c) Man gebe Beispiele, die zeigen, dass die Implikationen aus a) und b) nicht umkehrbar sind.

AUFGABE 55.5. Es sei

$$M = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{unendlich oft differenzierbar}\},$$

versehen mit der durch die Supremumsnorm gegebenen Metrik. Zeige, dass die Ableitung

$$M \longrightarrow M, f \longmapsto f',$$

keine starke Kontraktion ist.

AUFGABE 55.6. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M , die gegen $x \in M$ konvergiert. Es sei T eine Menge und es seien

$$f_n: T \longrightarrow M, t \longmapsto f_n(t) = x_n,$$

die zu x_n gehörenden konstanten Funktionen. Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion

$$f: T \longrightarrow M, t \longmapsto f(t) = x,$$

konvergiert.

AUFGABE 55.7. Es sei T eine endliche Menge und

$$f_n: T \longrightarrow X$$

eine Abbildungsfolge in einen metrischen Raum X . Zeige, dass diese Folge genau dann punktweise konvergiert, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

AUFGABE 55.8. Es sei (Y, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq Y$ eine Teilmenge. Es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \bar{T}$ und

$$g_n: \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von stetigen Funktionen. Zeige, dass diese Folge genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn die auf T eingeschränkte Folge $f_n = g_n|_T$ gleichmäßig konvergiert.

AUFGABE 55.9. Es sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $M = \text{Abb}(T, E)$ versehen mit der Supremumsnorm. Beweise die folgenden Eigenschaften für diese „Norm“ (dabei ist der Wert ∞ erlaubt und sinnvoll zu interpretieren).

- (1) $\|f\| \geq 0$ für alle $f \in M$.
- (2) $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
- (3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ gilt

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

- (4) Für $g, f \in M$ gilt

$$\|g + f\| \leq \|g\| + \|f\|.$$

AUFGABE 55.10. Es sei

$$C = C^0([0, 1], \mathbb{R})$$

die Menge der stetigen Funktionen, die mit der Supremumsnorm versehen sei. Skizziere zu $\epsilon > 0$ die offene und die abgeschlossene ϵ -Umgebung von einem $f \in C$.

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|-\|: V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

heißt *Norm*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle $v, w \in V$ gelten.

- (1) $\|v\| \geq 0$.
- (2) $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.
- (3) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

- (4) Für $v, w \in V$ gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Die Norm zu einem Skalarprodukt erfüllt diese Eigenschaften.

AUFGABE 55.11. Es sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei

$$M = \{f : T \rightarrow E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E . Zeige, dass die Supremumsnorm auf M eine Norm ist.

AUFGABE 55.12. Zeige, dass ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum durch

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

zu einem metrischen Raum wird.

AUFGABE 55.13. Es sei T eine Menge, E ein euklidischer Vektorraum und

$$M = \{f : T \rightarrow E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E . Zeige, dass eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus M genau dann gegen $f \in M$ gleichmäßig konvergiert, wenn diese Folge im durch die Supremumsnorm gegebenen metrischen Raum M konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 55.14. (5 Punkte)

Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare reguläre Kurve. Zeige, dass die Faser über jedem Punkt $c \in \mathbb{R}^n$ endlich ist.

AUFGABE 55.15. (6 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine in $P \in G$ total differenzierbare Abbildung mit injektivem totalen Differential. Zeige, dass es eine offene Umgebung U von P mit $\varphi^{-1}(\varphi(P)) \cap U = \{P\}$ gibt.

Tipp: Betrachte das totale Differential auf der Einheitssphäre. Der Satz über die injektive Abbildung ist hier nicht anwendbar.

AUFGABE 55.16. (4 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $C = C^0(T, E)$ der Raum der stetigen Abbildungen von T nach E , versehen mit der Supremumsnorm. Es seien $x_1, \dots, x_n \in T$ und $y_1, \dots, y_n \in E$ Punkte. Zeige, dass die Teilmenge

$$\{f \in C \mid f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n\}$$

abgeschlossen in C ist.

AUFGABE 55.17. (4 Punkte)

Es sei $M_k = ((a_{ij})_k)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Folge von reellen $m \times n$ -Matrizen und

$$\varphi_k: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die zugehörige Folge von linearen Abbildungen. Zeige, dass die Folgen der Einträge $(a_{ij})_k$ für alle i, j genau dann konvergieren, wenn die Folge der Abbildungen punktweise konvergiert.

AUFGABE 55.18. (4 Punkte)

Es sei T eine Menge und

$$f_n: T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Folge von Abbildungen. Zeige, dass f_n genau dann gegen eine Grenzabbildung

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

gleichmäßig konvergiert, wenn die Komponentenfunktionen $(f_i)_n$ gleichmäßig gegen f_i konvergieren.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7