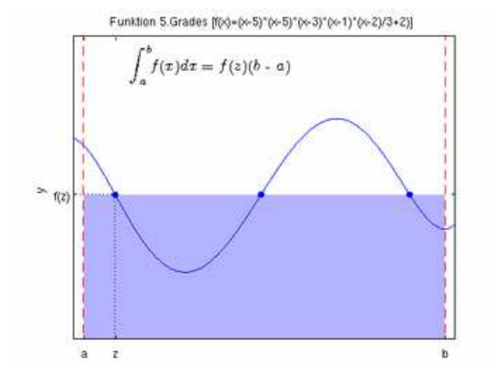
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2023**

Analysis I

Vorlesung 24

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung



Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kann man

$$\frac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a}$$

als die Durchschnittshöhe der Funktion ansehen, da dieser Wert mit der Länge $b-a$ des Grundintervalls multipliziert den Flächeninhalt unterhalb des Graphen zu f ergibt. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung* besagt, dass für eine stetige Funktion dieser *Durchschnittswert* (oder *Mittelwert*) von der Funktion auch angenommen wird.

Satz 24.1. *Es sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall und sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\,dt \,=\, f(c)(b-a).$$

Beweis. Über dem kompakten Intervall ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion, die aufgrund von Satz 13.10 angenommen werden. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ und

$$m(b-a) \,\leq\, \int_a^b f(t)\,dt \,\leq\, M(b-a).$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\,dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m, M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$. $\square$

Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Es ist geschickt, auch Integralgrenzen zuzulassen, bei denen die untere Integralgrenze die obere Intervallgrenze und die obere Integralgrenze die untere Intervallgrenze ist. Dazu definieren wir für $a < b$ und eine integrierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_b^a f(t)\,dt := -\int_a^b f(t)\,dt.$$

Definition 24.2. Es sei I ein reelles Intervall und sei

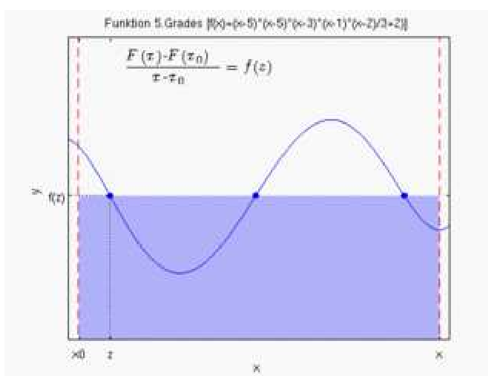
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$

die *Integralfunktion* zu f zum Startpunkt a.

Man spricht auch von der *Flächenfunktion* oder einem *unbestimmten Integral.*



Das x im Satz ist das x_0 in der Animation, und $x + h$ im Satz ist das wandernde x in der Animation. Der wandernde Punkt z in der Animation ist ein Punkt, wie er im Mittelwertsatz der Integralrechnung auftritt.

Die folgende Aussage heißt *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.*

Satz 24.3. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Dann ist F differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$.

Beweis. Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \to 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es zu jedem h ein[1] $c_h \in [x, x+h]$ mit

$$f(c_h) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

und damit ist

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Für $h \to 0$ konvergiert c_h gegen x und wegen der Stetigkeit von f konvergiert $f(c_h)$ gegen $f(x)$. □

Stammfunktion

Zur Definition von Stammfunktionen setzen wir wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Wir werden uns aber weitgehend auf den reellen Fall beschränken.

Definition 24.4. Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und sei

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Eine Funktion

$$F\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf D differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung kann man zusammen mit Satz 23.14 als einen Existenzsatz für Stammfunktionen interpretieren.

Korollar 24.5. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

[1] Bei h positiv. Bei h negativ ist $c_h \in [x+h, x]$. In jedem Fall liegt es in $[x-|h|, x+|h|]$.

Beweis. Es sei $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Aufgrund von Satz 23.14 existiert das Riemann-Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

und aufgrund des Hauptsatzes ist $F'(x) = f(x)$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f. $\square$

Lemma 24.6. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

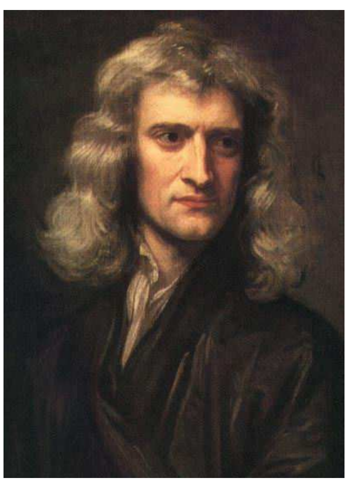
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es seien F und G zwei Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G$ eine konstante Funktion.

Beweis. Es ist

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Daher ist nach Korollar 19.4 die Differenz $F - G$ konstant. $\square$



Isaac Newton (1643-1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Die folgende Aussage ist ebenfalls eine Version des Hauptsatzes, der darin ausgedrückte Zusammenhang heißt auch *Newton-Leibniz-Formel*.

Korollar 24.7. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, für die F eine Stammfunktion sei. Dann gilt für $a, b \in I$ die Gleichheit

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Aufgrund von Satz 23.14 existiert das Integral. Mit der Integralfunktion

$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

gilt die Beziehung

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) = G(b) - G(a).$$

Aufgrund von Satz 24.3 ist G differenzierbar mit

$$G'(x) = f(x),$$

d.h. G ist eine Stammfunktion von f. Wegen Lemma 24.6 ist $F(x) = G(x) + c$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a).$$

□

Da eine Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, schreibt man manchmal

$$\int f(t)\,dt = F + c,$$

und nennt c eine *Integrationskonstante*. In gewissen Situationen, insbesondere im Zusammenhang mit *Differentialgleichungen*, wird diese Konstante durch zusätzliche Bedingungen festgelegt.

Notation 24.8. Es sei I ein reelles Intervall und $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $f\colon I \to \mathbb{R}$. Es seien $a, b \in I$. Dann setzt man

$$F|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Diese Notation wird hauptsächlich bei Rechnungen verwendet, vor allem beim Ermitteln von bestimmten Integralen.

Mit den schon früher bestimmten Ableitungen von differenzierbaren Funktionen erhält man sofort eine Liste von Stammfunktionen zu einigen wichtigen Funktionen. In der nächsten Vorlesung werden wir weitere Regeln zum Auffinden von Stammfunktionen kennenlernen, die auf Ableitungsregeln beruhen. Im Allgemeinen ist das Auffinden von Stammfunktionen schwierig.

Die Stammfunktion zu x^a, wobei $x \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, ist, ist $\frac{1}{a+1}x^{a+1}$.

Beispiel 24.9. Zwischen zwei (punktförmig gedachten) Massen M und m bestehe der Abstand R_0. Aufgrund der Gravitation besitzt dieses System eine gewisse Lageenergie. Wie ändert sich die Lageenergie, wenn die beiden Massen auf einen Abstand von $R_1 \geq R_0$ auseinander gezogen werden?

Die aufzubringende Energie ist Anziehungskraft mal Weg, wobei die Anziehungskraft allerdings selbst vom Abstand der Massen abhängt. Nach dem Gravitationsgesetz ist die Kraft beim Abstand r gleich

$$F(r) = \gamma \frac{Mm}{r^2},$$

wobei γ die Gravitationkonstante bezeichnet. Daher ist die Energie (oder Arbeit), die man aufbringen muss, um den Abstand von R_0 auf R_1 zu erhöhen, gleich

$$\begin{aligned} E &= \int_{R_0}^{R_1} \gamma \frac{Mm}{r^2}\, dr \\ &= \gamma Mm \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r^2}\, dr \\ &= \gamma Mm \left(-\frac{1}{r} |_{R_0}^{R_1} \right) \\ &= \gamma Mm \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right). \end{aligned}$$

Damit kann man der Differenz der Lageenergien zum Abstand R_0 bzw. R_1 einen sinnvollen Wert zuweisen, nicht aber den Lageenergien selbst.

Die Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{x}$ ist der natürliche Logarithmus.

Die Stammfunktion der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion selbst.

Die Stammfunktion von $\sin x$ ist $-\cos x$, die Stammfunktion von $\cos x$ ist $\sin x$.

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist $\arctan x$, es ist ja

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x)+\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1-x^2}$ auf $]-1,1[$ ist

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)),$$

es ist ja

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1+x)(1-x)}\\ &= \frac{1}{(1-x^2)}.\end{aligned}$$

Auf $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ ist $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ eine Stammfunktion.

In der übernächsten Vorlesung werden wir ein Verfahren angeben, wie man zu einer beliebigen rationalen Funktion (also einem Quotienten aus zwei Polynomen) eine Stammfunktion finden kann.

Achtung! Integrationsregeln sind nur anwendbar auf Funktionen, die im gesamten Intervall definiert sind. Z.B. gilt *nicht*

$$\int_{-a}^{a}\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{a}-\frac{1}{a} = -\frac{2}{a},$$

da hier über eine Definitionslücke hinweg integriert wird.

Beispiel 24.10. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ t\longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) := \begin{cases}0 \text{ für } t=0,\\ \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t^2} \text{ für } t\neq 0\,.\end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da sie weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Es existieren also weder untere noch obere Treppenfunktionen für f. Trotzdem besitzt f eine Stammfunktion. Dazu betrachten wir die Funktion

$$H(t) := \begin{cases}0 \text{ für } t=0,\\ \frac{t^2}{2}\cos\frac{1}{t^2} \text{ für } t\neq 0\,.\end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar. Für $t\neq 0$ ergibt sich die Ableitung

$$H'(t) = t\cos\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t^2}.$$

Für $t=0$ ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\frac{h^2}{2}\cos\frac{1}{h^2}}{h} = \frac{h}{2}\cos\frac{1}{h^2}.$$

Für $h\mapsto 0$ existiert der Grenzwert und ist gleich 0, so dass H überall differenzierbar ist (aber nicht stetig differenzierbar). Der erste Summand in H' ist stetig und besitzt daher nach Korollar 24.5 eine Stammfunktion G. Daher ist $H - G$ eine Stammfunktion von f. Dies ergibt sich für $t \neq 0$ aus der expliziten Ableitung und für $t = 0$ aus

$$H'(0) - G'(0) = 0 - 0 = 0.$$

Stammfunktionen zu Potenzreihen

Wir erinnern daran, dass die Ableitung einer konvergenten Potenzreihe gliedweise gewonnen werden kann.

Lemma 24.11. *Es sei*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine in $U(0,r)$ konvergente Potenzreihe. Dann ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

ebenfalls in $U(0,r)$ konvergent und stellt dort eine Stammfunktion für f dar.

Beweis. Sei $x \in U(0,r)$. Nach Voraussetzung und nach Lemma 16.7 ist dann auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

konvergent. Für jedes $n \geq |x|$ gelten die Abschätzungen

$$\left| \frac{a_{n-1}}{n} x^n \right| \leq \left| a_{n-1} x^{n-1} \right| \left| \frac{x}{n} \right| \leq \left| a_{n-1} x^{n-1} \right|.$$

Daher gilt für ein $k \geq |x|$ die Abschätzung

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{n} x^n \right| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \left| a_{n-1} x^{n-1} \right|.$$

Die rechte Reihe konvergiert nach Voraussetzung und ist daher eine konvergente Majorante für die linke Reihe. Daher konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{n} x^n \right|$ und nach Satz 9.9 auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$. Die Stammfunktionseigenschaft folgt aus Satz 20.9. □

Mit dieser Aussage kann man manchmal die Taylor-Polynome (bzw. die Taylor-Reihe) einer Funktion bestimmen, indem man die Taylor-Polynome der Ableitung verwendet. Wir geben dazu ein typisches Beispiel.

Beispiel 24.12. Wir wollen die Taylor-Reihe des natürlichen Logarithmus im Entwicklungspunkt 1 bestimmen. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist nach Korollar 20.12 gleich $1/x$. Diese Funktion besitzt nach Satz 9.13 die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$$

im Entwicklungspunkt 1 (die für $|x-1| < 1$ konvergiert). Daher besitzt nach Lemma 24.11 der natürliche Logarithmus die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k .$$

Mit $z = x - 1$ ist dies die Reihe

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots .$$

Abbildungsverzeichnis