Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis I

Vorlesung 31

In dieser Vorlesung entwickeln wir die Integrationstheorie weiter, und zwar untersuchen wir die Frage, was passiert, wenn wir in einem Integral $\int_a^b f(t)dt$ die Intervallgrenzen gegen unendlich oder gegen eine Zahl, wo die Funktion nicht definiert ist, wandern lassen.

Uneigentliche Integrale

Beispiel 31.1. Wir knüpfen an Beispiel 24.9 an, d.h., es liegen zwei Massen M und m vor, die untereinander den Abstand R_0 besitzen. Wie viel Energie muss man aufwenden, um die beiden Massen unendlich weit voneinander zu entfernen? In Beispiel 24.9 haben wir die Energie berechnet, um den Abstand von R_0 auf R_1 zu erhöhen, und erhielten

$$E(R_1) = \int_{R_0}^{R_1} \gamma \frac{Mm}{r^2}\, dr = \gamma Mm \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Für $R_1 \to \infty$ ist $\frac{1}{R_1} \to 0$ und daher ist $E(R_1) \to \gamma Mm \frac{1}{R_0}$.

Dieses Beispiel zeigt, dass es sinnvoll sein kann, bei bestimmten Integralen die Intervallgrenzen „gegen unendlich laufen zu lassen". Dies führt zum Begriff der *uneigentlichen Integrale*.

Unter einem (uneigentlichen) Randpunkt eines (ein- oder beidseitig) unbeschränkten Intervalls verstehen wir im Folgenden auch die Symbole ∞ und $-\infty$. Dies heißt nicht, dass diese Symbole zu $\mathbb{R}$ gehören, sondern lediglich, dass man dafür sinnvolle Grenzwertbetrachtungen durchführen kann. Die Definition für den Grenzwert einer Funktion gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ lautet folgendermaßen.

Definition 31.2. Es sei $T = [a, \infty]$ (oder $T = [-\infty, a]$) ein rechtsseitig (bzw. linksseitig) unbeschränktes Intervall und

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt $b \in \mathbb{R}$ *Grenzwert* (oder *Limes*) von f für $x \to +\infty$ (bzw. $x \to -\infty$), wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $x_0 \geq a$ (bzw. $x_0 \leq a$) gibt mit $|f(x) - b| \leq \epsilon$ für alle $x \geq x_0$ (bzw. $x \leq x_0$). In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

(bzw. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$).

Die Rechenregeln für diesen Grenzwertbegriff (siehe Aufgabe 31.2) sind weitgehend analog zu den Rechenregeln für den bisherigen Grenzwertbegriff für Funktionen (siehe Lemma 12.12). Sie sind auch analog zu den Rechenregeln für Limiten von Folgen (siehe Lemma 6.1).

DEFINITION 31.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, r ein (uneigentlicher) Randpunkt von I und $a \in I$. Es sei eine stetige Funktion

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

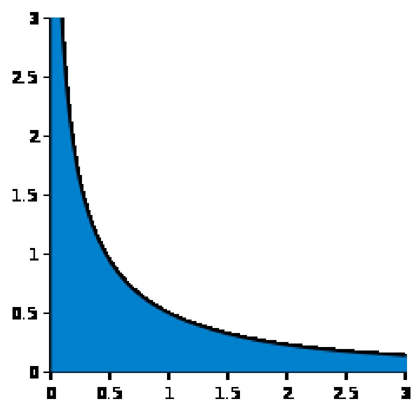
gegeben. Man sagt, dass das *uneigentliche Integral* zu f für $x \to r$ existiert, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to r} \int_a^x f(t)\, dt$$

existiert. In diesem Fall schreibt man für diesen Grenzwert auch

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* von a nach r



Die Funktion $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, der blaue Flächeninhalt repräsentiert das (beidseitig) uneigentliche Integral.

Die Existenz dieses uneigentlichen Integrals hängt nicht vom gewählten Intervallpunkt $a \in I$ ab, wohl aber der Wert des uneigentlichen Integrals. Die inhaltliche Interpretation des uneigentlichen Integrals ist wiederum der Flächeninhalt unterhalb des Funktionsgraphen, aber erstreckt über ein nicht notwendigerweise kompaktes Intervall. Wenn für die Funktion f eine Stammfunktion F bekannt ist, so geht es um das Bestimmen des Grenzwertes

$$\lim_{x \to r} \int_a^x f(t)\, dt \,=\, \lim_{x \to r} F(x) - F(a).$$

Die Frage, ob eine uneigentliches Integral existiert, ist nur relevant, wenn r ein uneigentlicher Randpunkt $+\infty$ oder $-\infty$ ist oder wenn r der eigentliche Randpunkt eines an dieser Stelle halboffenen Intervalls ist.

Lemma 31.4. *Es sei I ein reelles Intervall, $a \in I$ und r sei ein (uneigentlicher) Randpunkt von I. Es seien*

$$f, h \colon I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

stetige Funktionen mit

$$f(t) \leq h(t) \text{ für alle } t \in I$$

und es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_a^r h(t)\, dt$$

existiert. Dann existiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

und es gilt

$$\int_a^r f(t)\, dt \leq \int_a^r h(t)\, dt.$$

Beweis. Wir behandeln den Fall, wo r die obere Intervallgrenze ist. Für alle $b \in I$ ist

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b h(t)\, dt$$

wegen $f(t) \leq h(t)$ für alle $t \in I$. Wegen der Nichtnegativität von h und von f wachsen beide Seite bei $b \to r$, und die rechte Seite ist durch das uneigentliche Integral $\int_a^r h(t)\, dt$ beschränkt. Nach Satz 7.5 existiert der Grenzwert

$$\lim_{b \to r} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^r f(t)\, dt.$$

$\square$

Beispiel 31.5. Sei $f(t) := t^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für die uneigentlichen Integrale zu f für t von 0 bis 1. Dabei ist die Funktion bei der Intervallgrenze 0 (bei negativem c) nicht definiert, das ist also der kritische Randpunkt. Bei $c = -1$ ist $\ln t$ eine Stammfunktion von $1/t$. Daher ist

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt = -\ln x,$$

und der Grenzwert für $x \to 0$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun $c < -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1} t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x \to 0} \left(\int_x^1 t^c\, dt \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{c+1} t^{c+1} |_x^1 \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1} \right).$$

Da es sich rechts um eine Potenz von x mit einem negativen Exponenten handelt, ist $\lim_{x \to 0} x^{c+1} = \infty$ nach der inversen Version von Aufgabe 17.7.

Das uneigentliche Integral existiert also nicht. Dies folgt übrigens auch aus Lemma 31.4, da ja $t^{-1} \leq t^c$ für $c < -1$ und $0 < t \leq 1$ gilt.

Sei nun $c > -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\operatorname{lim}_{x\to 0}\left(\int_x^1 t^c\,dt\right) = \operatorname{lim}_{x\to 0}\left(\frac{1}{c+1}t^{c+1}|_x^1\right) = \operatorname{lim}_{x\to 0}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1}\right).$$

Da es sich um eine Potenz von x mit einem positiven Exponenten handelt, ist $\operatorname{lim}_{x\to 0} x^{c+1} = 0$ (nach Aufgabe 17.7). Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert $\frac{1}{c+1}$.

Beispiel 31.6. Sei $f(t) := t^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für das uneigentliche Integral zu f für t von 1 bis ∞. Der kritische (uneigentliche) Randpunkt ist also $+\infty$. Bei $c = -1$ ist $\ln t$ eine Stammfunktion von $1/t$. Daher ist

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x,$$

und der Grenzwert für $x \to +\infty$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun $c < -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\operatorname{lim}_{x\to\infty}\left(\int_1^x t^c\,dt\right) = \operatorname{lim}_{x\to\infty}\left(\frac{1}{c+1}t^{c+1}|_1^x\right) = \operatorname{lim}_{x\to\infty}\left(\frac{x^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{c+1}\right).$$

Da es sich um eine Potenz von x mit einem negativen Exponenten handelt, ist $\operatorname{lim}_{x\to\infty} x^{c+1} = 0$. Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert $-\frac{1}{c+1}$.

Bei $c > -1$ ist $t^c \geq t^{-1}$ für $t \geq 1$ und daher kann nach Lemma 31.4 das uneigentliche Integral nicht existieren.

Beispiel 31.7. Wir wollen das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t^2}^3}\,dt$ berechnen. Nach Lemma 27.8 ist

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+t^2}^3}\,dt = \int_{\operatorname{arsinh} 0}^{\operatorname{arsinh} u} \frac{1}{\cosh^2 s}\,ds.$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{\cosh^2 s}$ ist $\frac{\sinh s}{\cosh s}$. Die untere Intervallgrenze ergibt den Wert 0, für die obere Intervallgrenze ergibt sich

$$\operatorname{lim}_{s\to\infty}\frac{\sinh s}{\cosh s} = \operatorname{lim}_{s\to\infty}\frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = 1.$$

Daher hat das uneigentliche Integral der Wert 1.

Definition 31.8. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit den beiden (uneigentlichen) Randpunkten r und s von I. Es sei eine stetige Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Man sagt, dass das (*beidseitig*) *uneigentliche Integral*

$$\int_r^s f(t)\,dt$$

existiert, wenn für ein $a \in I$ die beiden einseitig uneigentlichen Integrale

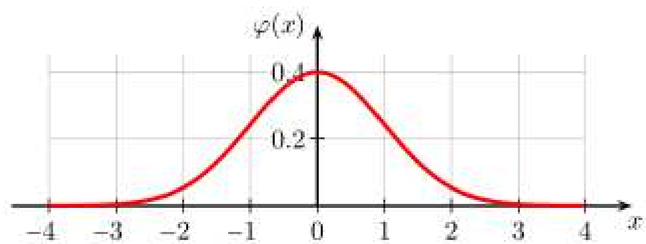
$$\int_r^a f(t)\,dt \text{ und } \int_a^s f(t)\,dt$$

existieren. In diesem Fall setzt man

$$\int_r^s f(t)\,dt \;:=\; \int_r^a f(t)\,dt + \int_a^s f(t)\,dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* zu f von r nach s.

Die Existenz des beidseitig uneigentlichen Integrals hängt nicht von der Wahl des Punktes $a \in I$ ab. Darüber hinaus hängt der Wert dieses Integrals, falls es existiert, ebenso wenig von dem gewählten Punkt ab.



Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ ist die Dichtefunktion der Gaußschen Normalverteilung. Der Flächeninhalt unterhalb der Kurve ist 1.

Beispiel 31.9. Die Funktion e^{-t^2} ist nicht elementar integrierbar, d.h., man kann keine geschlossene Stammfunktion mit rationalen Funktionen, Exponentialfunktion, trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen angeben. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt \;=\; \sqrt{\pi},$$

was wir hier ohne Beweis mitteilen, siehe Lemma 74.6 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)). Durch eine einfache Substitution ergibt sich daraus

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \;=\; 1.$$

Dieses Integral nennt man *Fehlerintegral*; es spielt in der Stochastik eine wichtige Rolle.

Vergleichskriterien mit Reihen

Lemma 31.10. *Es sei $I = [1, \infty]$ ein rechtsseitig unbeschränktes Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(t)\, dt$$

genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert.

Beweis. Wenn das uneigentliche Integral existiert, so betrachten wir die Abschätzung

$$\sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(t)\, dt,$$

die darauf beruht, dass die linke Seite das Treppenintegral zu einer unteren Treppenfunktion für f auf $[1, k]$ ist. Da die rechte Seite beschränkt ist, gilt dies auch für die linke Seite, so dass wegen $f(n) \geq 0$ die Reihe konvergiert. Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so betrachten wir die Abschätzung

$$\int_1^k f(t)\, dt \leq \sum_{n=1}^{k-1} f(n),$$

die gilt, da die rechte Seite das Treppenintegral zu einer oberen Treppenfunktion ist. Wegen $f(t) \geq 0$ ist die Integralfunktion $x \mapsto \int_1^x f(t)\, dt$ wachsend und beschränkt, da die rechte Seite wegen der Konvergenz der Reihe beschränkt ist. Daher besitzt die Integralfunktion für $x \mapsto \infty$ einen Grenzwert und das uneigentliche Integral existiert. □

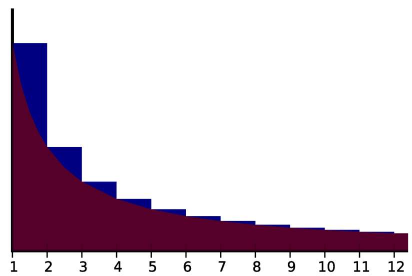
Beispiel 31.11. Die Funktion

$$f\colon [1, \infty] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto \frac{1}{t},$$

ist streng fallend. Daher ist die Funktion g, die für x mit $k \leq x < k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) durch $\frac{1}{k}$ definiert ist, eine „Majorante“ für f, also $g(t) \geq f(t)$. Auf jedem Intervall $[1, n]$ liefert g eine obere Treppenfunktion zu f. Ebenso liefert die durch $\frac{1}{k+1}$ bei $k \leq x < k + 1$ definierte Funktion h eine untere Treppenfunktion für f. Daher gelten die Abschätzungen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{t}\, dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Das Integral in der Mitte besitzt den Wert $\ln n$. Daraus ergibt sich mit Lemma 31.10 ein neuer Beweis, dass die harmonische Reihe divergiert.



Die blaue Fläche stellt die Eulersche Konstante dar, die Darstellung ist überhöht.

Die Differenz zwischen der linken und der rechten Summe ist $1 - \frac{1}{n}$. Daher ist die Differenz

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$$

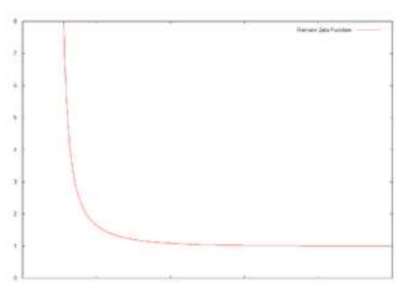
für jedes n positiv, mit n wachsend und nach oben beschränkt. Daher existiert für $n \to \infty$ der Limes, und dieser Limes ändert sich nicht, wenn man vorne in der Summe bis n aufsummiert anstatt bis $n - 1$. Wir setzen

$$\gamma := \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

und nennen sie die *eulersche Konstante* (oder *Mascheronische Konstante*). Ihr numerischer Wert ist ungefähr

$$\gamma = 0{,}5772156649\ldots.$$

Es ist ein offenes mathematisches Problem, ob diese Zahl rational ist oder nicht.



Die Riemannsche Zeta-Funktion im Reellen

Nach Beispiel 31.6 existiert für $c < -1$ das uneigentliche Integral $\int_1^\infty t^c \, dt$, so dass aufgrund von Lemma 31.10 auch die Reihen $\sum_{n=1}^\infty n^c = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{-c}}$ konvergieren. Daher ist die folgende Funktion wohldefiniert.

Definition 31.12. Die *Riemannsche ζ-Funktion* ist für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert.

Diese Funktion lässt sich komplex fortsetzen und spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

Abbildungsverzeichnis