Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

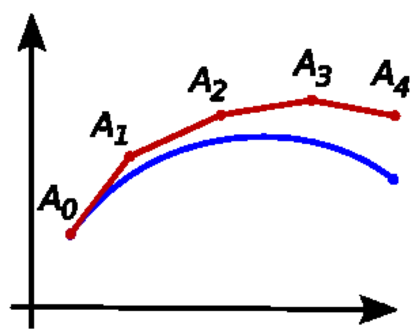
Analysis I

Vorlesung 41

Es ist im Allgemeinen schwierig, eine Differentialgleichung explizit zu lösen. Wir besprechen daher zwei approximierende Verfahren, nämlich das *eulersche Polygonzugverfahren* und den *Potenzreihenansatz*.

Das Polygonzugverfahren

Mit dem (eulerschen) Polygonzugverfahren wird die Lösungskurve einer Differentialgleichung diskret approximiert.



VERFAHREN 41.1. Es sei ein Vektorfeld

$$F\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und eine Anfangsbedingung $y(t_0) = P \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Das *eulersche Polygonzugverfahren* funktioniert folgendermaßen: Man wählt eine Schrittweite $s > 0$ und berechnet rekursiv die Punktfolge P_n, $n \in \mathbb{N}$, durch $P_0 = P$ und

$$P_{n+1} = P_n + sF(t_0 + ns, P_n).$$

Zu einem schon konstruierten Punkt P_n wird also das s-fache des Richtungsvektors zum Zeitpunkt $t_0 + ns$ an diesem Punkt hinzuaddiert. Dies funktioniert nur, solange die Punkte im Definitionsbereich des Vektorfeldes liegen. Der zu dieser Punktfolge gehörende *Streckenzug* oder *Polygonzug*

$$\delta\colon \mathbb{R}_{\geq t_0} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

ist die lineare Interpolation mit $\delta(t_0 + ns) = P_n$, d.h. für t mit $t_0 + ns \leq t \leq t_0 + (n+1)s$ ist

$$\delta(t) = P_n + \frac{t - t_0 - ns}{s}(P_{n+1} - P_n).$$

Dieser Streckenzug δ stellt eine stückweise lineare Approximation der Lösungskurve des Anfangswertproblems dar. Für eine kleinere Schrittweite wird die Approximation im Allgemeinen besser.

Beispiel 41.2. Bei einer eindimensionalen ortsunabhängigen Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

ergibt sich y einfach als eine Stammfunktion zu g. Wendet man in dieser Situation Verfahren 41.1 zum Startzeitpunkt t_0, zum Startpunkt c und zur Schrittweite s an, so ergibt sich die rekursive Beziehung

$$P_0 = c \text{ und } P_{n+1} = P_n + sg(t_0 + ns)\,.$$

Daher ist offenbar

$$P_n = c + s(g(t_0) + g(t_0 + s) + g(t_0 + 2s) + \cdots + g(t_0 + (n-1)s)).$$

D.h. dass man zu dem Ausgangswert c das Treppenintegral zur äquidistanten Unterteilung $t_0, t_0+s, t_0+2s, \ldots, t_0+(n-1)s$ (und zur durch $g(t_0+ks)$ auf dem Teilintervall $[t_0+ks, t_0+(k+1)s[$ gegebenen Treppenfunktion) hinzuaddiert. Der zugehörige Streckenzug ist die (stückweise lineare) Integralfunktion zu dieser Treppenfunktion.

Beispiel 41.3. Wir wollen für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - ty \\ txy \end{pmatrix} = F(t, x, y)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gemäß Verfahren 41.1 einen approximierenden Streckenzug berechnen. Wir wählen die Schrittweite $s = \frac{1}{10}$. Somit ist

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{10}F(0, P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + \frac{1}{10}F\left(\frac{1}{10}, P_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{1}{10}\cdot 1 \\ \frac{1}{10}\cdot\frac{11}{10}\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \frac{111}{100} \\ \frac{11}{100} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + \frac{1}{10} F\left(\frac{2}{10}, P_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{1211}{1000}\right)^2 - \frac{2}{10} \cdot \frac{1011}{1000} \\ \frac{2}{10} \cdot \frac{1211}{1000} \cdot \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{1264321}{1000000} \\ \frac{2448642}{10000000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{133743210}{100000000} \\ \frac{103548642}{100000000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wer erwähnen kurz eine weitere approximative Lösungsmöglichkeit für Differentialgleichungen, siehe hierzu den Anhang und die Übungen.

Bemerkung 41.4. Es sei ein Anfangswertproblem

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(0) = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

zu einem Vektorfeld

$$F\colon I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gegeben, wobei die Komponentenfunktionen F_i, $i = 1, \ldots, n$, polynomial (oder durch Potenzreihen gegeben) seien. Dann lässt sich ein *Potenzreihenansatz* für die Lösung durchführen. Das bedeutet, dass man den Ansatz $x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ki} t^k$ mit unbestimmten Koeffizienten a_{ki} macht, und diese Koeffizienten (bis zu einem gewünschten Grad) aus den n Gleichungen

$$x_i'(t) = F_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

sukzessive bestimmt. Die Anfangsbedingungen

$$x_i(0) = a_{0i} = c_i$$

legen dabei die konstanten Koeffizienten der Potenzreihen fest. In das Differentialgleichungssystem werden die Potenzreihen links und rechts eingesetzt und ausgewertet, wobei die Ableitung links formal zu nehmen ist und rechts die Reihen formal zu addieren und zu multiplizieren sind. Dies ergibt Gleichungen für Potenzreihen in t, die durch Koeffizientenvergleich, beginnend mit den Koeffizienten von kleinem Grad, gelöst werden können.

Lineare Differentialgleichungssysteme

Definition 41.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*.

Es handelt sich also um die Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$f\colon I\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, (t,v) \longmapsto f(t,v) = (M(t))v = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist zu jedem fixierten Zeitpunkt $t \in I$ eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, v \longmapsto M(t)v.$$

Ausgeschrieben liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

vor. Es gibt immer die Nulllösung, also die konstante Abbildung mit dem Nullvektor als Wert, diese nennt man auch die triviale Lösung.

Für lineare Differentialgleichungssysteme gibt es wieder eine inhomogene Variante.

Definition 41.6. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind und wobei

$$z\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, t \longmapsto z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix},$$

eine Abbildung ist, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*. Die Abbildung z heißt dabei *Störabbildung*.

Insgesamt liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n + z_1(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

vor.

Die explizite Lösbarkeit eines solchen Systems hängt natürlich von der Kompliziertheit der beteiligten Funktionen a_{ij} und z_i ab. In der folgenden Situation kann man das System auf einzelne eindimensionale lineare inhomogene Differentialgleichungen zurückführen und dadurch sukzessive lösen.

Lemma 41.7. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es liege eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen $a_{ij}\colon I \to \mathbb{R}$ und $z_i\colon I \to \mathbb{R}$ und den Anfangsbedingungen

$$v_i(t_0) = w_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, n \ (t_0 \in I)$$

vor. Dann lässt sich diese Gleichung lösen, indem man sukzessive unter Verwendung der zuvor gefundenen Lösungen die inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen, nämlich

$$v_n' = a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \text{ mit } v_n(t_0) = w_n\,,$$

$$v_{n-1}' = a_{n-1\,n-1}(t)v_{n-1} + a_{n-1\,n}(t)v_n(t) + z_{n-1}(t) \text{ mit } v_{n-1}(t_0) = w_{n-1}\,,$$

$$v_{n-2}' = a_{n-2\,n-2}(t)v_{n-2} + a_{n-2\,n-1}(t)v_{n-1}(t) + a_{n-2\,n}(t)v_n(t) + z_{n-2}(t) \text{ mit } v_{n-2}(t_0) = w_{n-2}\,,$$

$$\vdots$$

$$v_1' = a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)v_n(t) + z_1(t) \text{ mit } v_1(t_0) = w_1\,,$$

löst.

Beweis. Das ist trivial. □

Die Lösungen eines solchen linearen Differentialgleichungssystems in oberer Dreiecksgestalt stehen also in Bijektion zu den Lösungen der n linearen inhomogenen Differentialgleichungen in einer Ortsvariablen, wobei die Störfunktionen jeweils mit den anderen Lösungen in der beschriebenen Weise zusammenhängen. Insbesondere übertragen sich Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen.

Auch wenn man ein homogenes System lösen möchte, so muss man in den Einzelschritten inhomogene Differentialgleichungen lösen.

Beispiel 41.8. Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t-1 \\ 0 & \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für $t > 0$. Die zweite Zeile dieses Systems bedeutet

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} \cdot y,$$

das ist eine homogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Ihre Lösungen sind gemäß Satz 29.2 gleich

$$y(t) = c\left(t^2+1\right) = ct^2 + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Die erste Zeile des Systems führt daher auf

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{t}x + (t-1)y \\ &= \frac{1}{t}x + c(t-1)\left(t^2+1\right) \\ &= \frac{1}{t}x + c\left(t^3 - t^2 + t - 1\right). \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Die zugehörige homogene Gleichung $x' = \frac{1}{t}x$ besitzt t als eine Lösung. Nach Satz 29.10 müssen wir eine Stammfunktion von

$$c\frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t} = c\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t}\right)$$

finden, eine solche ist

$$c\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln t\right) + d\,.$$

Daher ist

$$t\left(c\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln t\right) + d\right) = \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct\ln t + dt$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Also ist die allgemeine Lösung des Systems gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct\ln t + dt \\ ct^2 + c \end{pmatrix}.$$

Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Falls die Funktionen a_{ij} alle konstant sind, so spricht man von einem *linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*, welche im Wesentlichen mit Mitteln der linearen Algebra gelöst werden können. Dazu ist es sinnvoll, von vornherein auch komplexe Koeffizienten zuzulassen.

Definition 41.9. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.*

Definition 41.10. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist und

$$z \colon I \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine Abbildung, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.*

Die Störfunktion muss also nicht konstant sein.

Bemerkung 41.11. Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y + f(t) = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h. die a_i sind reelle (oder komplexe) Zahlen. Das gemäß Lemma 40.14 zugehörige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}$$

mit

$$v_i := y^{(i)}$$

und

$$h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) := -a_{n-1}v_{n-1} - \cdots - a_1 y v_1 - a_0 v_0 - f(t)$$

wird in dieser Situation zum linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -f(t) \end{pmatrix}.$$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Euler method.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD 1

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9