

Analysis I

Vorlesung 45

Totale Differenzierbarkeit

Wir möchten Abbildungen $\varphi: V \rightarrow W$ zwischen endlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen differenzieren, und allgemeiner Abbildungen

$$\varphi: G \rightarrow W,$$

wobei $G \subseteq V$ eine gewisse offene Teilmenge ist. Wir wiederholen kurz die Situation in einer Variablen: Angenommen wir haben eine Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist die Grundidee einer differenzierbaren Abbildung und ihrer Ableitung, eine „Tangente an den Graphen“ anzulegen. Dabei kann man sagen, dass die Tangente die beste *lineare Approximation* von φ (genauer: der Graph einer affin-linearen Approximation) in einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}$ darstellt. Da die Steigung der Tangente wieder eine reelle Zahl ist, wird beim Differenzieren jedem Punkt x wieder eine Zahl zugeordnet. Wir erhalten also eine neue Funktion, welche wir mit φ' bezeichnen. Im höherdimensionalen Fall ist dies komplizierter, aber die Idee einer bestmöglichen *linearen Approximation* bleibt bestehen.

Die Übereinstimmung der Konzepte wird auch deutlich, wenn man den Graphen einer Abbildung anschaut. Zu einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ schmiegt sich die Tangente im Punkt $(P, f(P))$ an den Graphen zu f an. Zu einer Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, den man sich als ein Gebirge über der Ebene vorstellen sollte. Eine sinnvolle Fragestellung ist, ob es zu einem Punkt $(P, f(P))$ eine anschmiegende Tangentialebene an den Graphen zu f gibt, die man als den Graphen einer affin-linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ realisieren kann.

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Vektorräume endlichdimensional und mit einer euklidischen Norm versehen sind. Wie in der 37. Vorlesung gezeigt wurde, hängt die Topologie, also die Konzepte offene Menge, Stetigkeit, Konvergenz, nicht von der gewählten euklidischen Struktur ab. Bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ stattdessen wir den zugrunde liegenden reellen Vektorraum mit einer euklidischen Struktur aus.

DEFINITION 45.1. Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Menge und $\varphi: G \rightarrow W$ eine Abbildung. Dann heißt φ

differenzierbar (oder *total differenzierbar*) im Punkt $P \in G$, wenn es eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $L: V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\|r(v)$$

gibt, wobei $r: U(0, \delta) \rightarrow W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist und die Gleichung für alle $v \in V$ mit $P + v \in U(P, \delta) \subseteq G$ gilt.

Diese lineare Abbildung L heißt, falls sie existiert, das (*totale*) *Differential* von φ an der Stelle P und wird mit

$$(D\varphi)_P$$

bezeichnet.

Äquivalent zur totalen Differenzierbarkeit ist die Eigenschaft, dass der Ausdruck

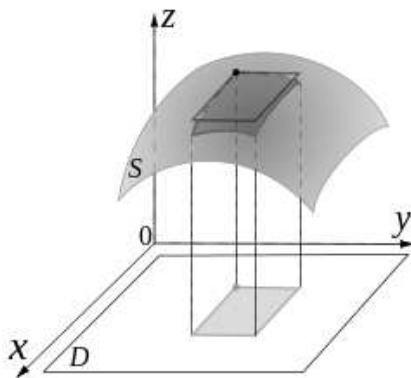
$$r(v) = \frac{\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)}{\|v\|}$$

für $v \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert. Ebenfalls äquivalent ist die Eigenschaft, dass der Limes (von Funktionen)

$$\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} \frac{\|\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)\|}{\|v\|}$$

existiert und gleich 0 ist.

Das Konzept der totalen Differenzierbarkeit ist eher theoretisch und für konkrete Berechnungen nicht optimal. Wir werden später dieses Konzept mit dem Konzept der partiellen Ableitungen in Verbindung bringen, welches eher für Berechnungen geeignet ist, jedoch von Koordinaten, d.h. von der Auswahl einer Basis, abhängt (siehe auch Beispiel 45.11 weiter unten).



Der geometrische Gehalt tritt besonders im Fall $W = \mathbb{R}$ deutlich hervor. Dann ist der Graph der affin-linearen Abbildung $\varphi(P) + (D\varphi)_P(x - P)$ eine lineare Approximation des Graphen der Funktion $\varphi(x)$ im Punkt P .

BEISPIEL 45.2. Ist $\varphi: V \rightarrow W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$, so ist φ differenzierbar mit totalem Differential 0 (siehe Aufgabe 45.5).

PROPOSITION 45.3. *Es sei $L: V \rightarrow W$ eine \mathbb{K} -lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen V und W . Dann ist L in jedem Punkt $P \in V$ differenzierbar und stimmt in jedem Punkt mit ihrem totalen Differential überein.*

Beweis. Aufgrund der Linearität gilt

$$L(P + v) = L(P) + L(v).$$

Also können wir $r = 0$ wählen. □

BEISPIEL 45.4. Wir betrachten die Funktion

$$\varphi: \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

deren Graph die untere Hälfte der Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ist. Wir interessieren uns, ob φ im Nullpunkt $(0, 0)$ total differenzierbar ist. Aus Symmetriegründen kommt als totales Differential nur die Nullabbildung in Frage. Es geht somit darum, ob für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gegen 0 der Ausdruck

$$\frac{\varphi(v)}{\|v\|} = \frac{\varphi(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

gegen 0 konvergiert. Mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist dies

$$\frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{r}.$$

Wir wenden darauf die Regel von l'Hospital an. Der abgeleitete Nenner ist 1 und der abgeleitete Zähler ist

$$\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}$$

und konvergiert gegen 0, so dass Konvergenz gegen 0 vorliegt. Die Nullabbildung ist also in der Tat das totale Differential.

LEMMA 45.5. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume und sei die Abbildung $\varphi: G \rightarrow W$ auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq V$ definiert. Sei $P \in G$ ein Punkt. Dann existiert höchstens eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften aus Definition 45.1. Ist φ im Punkt P differenzierbar, so ist das totale Differential $(D\varphi)_P$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen, es gelte

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$$

und

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$$

mit linearen Abbildungen L_1 und L_2 und mit im Punkt 0 stetigen Funktionen $r_1, r_2: U(0, \delta) \rightarrow W$ mit $r_1(0) = r_2(0) = 0$. Wir müssen $L_1 = L_2$ zeigen. Dazu ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab (da es sich hier um Gleichungen von Funktionswerten im Vektorraum W handelt, ist hier werteweises Abziehen gemeint) und erhalten die Gleichung

$$0 = (L_1 - L_2)(v) + \|v\| \cdot (r_1(v) - r_2(v)).$$

Daher müssen wir zeigen, dass die (konstante) Nullabbildung die Eigenschaft besitzt, dass die lineare Abbildung 0 ihre einzige lineare Approximation ist. Wir nehmen daher an, dass

$$0 = L(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

gilt, wobei L linear und r eine in 0 stetige Funktion mit $r(0) = 0$ ist. Wenn L nicht die Nullabbildung ist, so gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $L(v) = w \neq 0$. Dann gilt für $s \in \mathbb{K}$

$$0 = L(sv) + \|sv\|r(sv) = sw + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv).$$

Dies impliziert, dass $r(sv) = -\frac{sw}{|s|\|v\|}$ für $s \neq 0$ gilt. Die Norm von $r(sv)$ ist daher konstant gleich $\frac{\|w\|}{\|v\|} \neq 0$. Also gilt $\lim_{s \rightarrow 0} \|r(sv)\| \neq 0$, ein Widerspruch. \square

PROPOSITION 45.6. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume und es sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Seien $\varphi_1, \varphi_2: G \rightarrow W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildungen mit den totalen Differentialen $(D\varphi_1)_P$ und $(D\varphi_2)_P$. Dann ist auch $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ in P differenzierbar und es gilt*

$$(D(\varphi_1 + \varphi_2))_P = (D\varphi_1)_P + (D\varphi_2)_P.$$

Ebenso gilt $(D(a\varphi_1))_P = a(D\varphi_1)_P$ für alle $a \in \mathbb{K}$.

Beweis. Sei $\varphi_1(P + v) = \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$ und $\varphi_2(P + v) = \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(P + v) &= \varphi_1(P + v) + \varphi_2(P + v) \\ &= \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v) + \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2)(P) + (L_1 + L_2)(v) + \|v\|(r_1(v) + r_2(v)). \end{aligned}$$

Wir erhalten also die gewünschte Gestalt, da auch $r_1 + r_2$ in 0 stetig mit $(r_1 + r_2)(0) = 0$ ist. Der Beweis der zweiten Aussage ist ähnlich. \square

PROPOSITION 45.7. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Sei $\varphi: G \rightarrow W$ eine in $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ auch stetig im Punkt P .*

Beweis. Nach Definition gilt $\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| \cdot r(v)$. Die rechte Seite ist stetig (nach Definition 45.1 und Satz 34.10) in $v = 0$. Damit ist φ stetig in P . \square

Die Kettenregel

Die Eleganz des totalen Differentials wird in der folgenden allgemeinen Version der Kettenregel deutlich.

SATZ 45.8. *Es seien V, W und U endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume, $G \subseteq V$ und $D \subseteq W$ offene Mengen, und $\varphi: G \rightarrow W$ und $\psi: D \rightarrow U$ Abbildungen derart, dass $\varphi(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass φ in $P \in G$ und ψ in $\varphi(P) \in D$ total differenzierbar ist. Dann ist $\psi \circ \varphi: G \rightarrow U$ in P differenzierbar mit dem totalen Differential*

$$(D(\psi \circ \varphi))_P = (D\psi)_{\varphi(P)} \circ (D\varphi)_P.$$

Beweis. Wir haben nach Voraussetzung (wobei wir $Q := \varphi(P)$ setzen)

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\|r(v)$$

und

$$\psi(Q + w) = \psi(Q) + M(w) + \|w\|s(w)$$

mit linearen Abbildungen $L: V \rightarrow W$ und $M: W \rightarrow U$, und mit in 0 stetigen Funktionen $r: U(0, \delta) \rightarrow W$ und $s: U(0, \delta') \rightarrow U$, die beide in 0 den Wert 0 annehmen. Damit gilt

$$\begin{aligned} & (\psi \circ \varphi)(P + v) \\ &= \psi(\varphi(P + v)) \\ &= \psi(\varphi(P) + L(v) + \|v\|r(v)) \\ &= \psi(\varphi(P)) + M(L(v) + \|v\|r(v)) \\ &\quad + \|L(v) + \|v\|r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \\ &= \psi(\varphi(P)) + M(L(v)) + M(\|v\|r(v)) \\ &\quad + \|L(v) + \|v\|r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \\ &= \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) + \|v\|M(r(v)) \\ &\quad + \| \|v\|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + \|v\|r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \\ &= \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) \\ &\quad + \|v\|\left(M(r(v)) + \|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v))\right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der dritten Gleichung die lineare Approximation für

$$w = L(v) + \|v\|r(v)$$

eingesetzt. Die beiden letzten Gleichungen gelten nur für $v \neq 0$. Der Ausdruck

$$t(v) := M(r(v)) + \|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v))$$

ist unser Kandidat für die Abweichungsfunktion. Der erste Summand $M(r(v))$ ist in $v = 0$ stetig und hat dort auch den Wert 0. Es genügt also den zweiten Summanden zu betrachten. Der $\|-\|$ -Ausdruck ist in einer Umgebung der Null beschränkt, da L auf der kompakten Einheitskugel nach Satz 36.11 beschränkt ist und da r in 0 stetig ist. Daher hängt die Stetigkeit nur von dem rechten Faktor ab. Aber $L(v) + \|v\|r(v)$ hat für $v \rightarrow 0$ den Grenzwert 0. Damit ist auch $s(L(v) + \|v\|r(v))$ in 0 stetig und hat dort den Grenzwert 0. \square

Im folgenden Beispiel verwenden wir, dass man das totale Differential unter recht schwachen Bedingungen mit der Jacobi-Matrix beschreiben kann, was wir in der nächsten Vorlesung begründen werden.

BEISPIEL 45.9. Wir betrachten die Funktion

$$\varphi: \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

aus Beispiel 45.4 in einem beliebigen Punkt $P = (x, y)$. Wir schreiben die Abbildung als Hintereinanderschaltung von

$$(x, y) \longmapsto 1 - x^2 - y^2 \text{ und } u \longmapsto 1 - \sqrt{u}.$$

Die erste Funktion ist überall total differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$(-2x, -2y)$$

und die zweite Funktion ist für $u > 0$ differenzierbar mit der Ableitung $\frac{-1}{2\sqrt{u}}$. Die Gesamtabbildung ist somit nach der Kettenregel ebenfalls total differenzierbar mit dem totalen Differential

$$\frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}(-2x, -2y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right).$$

LEMMA 45.10. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt, $\varphi: G \rightarrow W$ und $f: G \rightarrow \mathbb{K}$ in P differenzierbare Abbildungen. Dann ist die Produktabbildung*

$$f \cdot \varphi: G \longrightarrow W$$

in P differenzierbar mit

$$(D(f \cdot \varphi))_P = f(P) \cdot (D\varphi)_P + (Df)_P \cdot \varphi(P).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 45.21. \square

Das folgende Beispiel illustriert, dass das totale Differential unabhängig von der Wahl einer Basis ist, die partiellen Ableitungen aber nicht.

BEISPIEL 45.11. Wir betrachten die Abbildung $f: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$, die durch

$$(x, y, z) \longmapsto 2xy^2 + x^2z^3 + z^2$$

gegeben sei. Es ist leicht die partiellen Ableitungen in jedem Punkt zu berechnen, nämlich:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(x,y,z)} = (2y^2 + 2xz^3, 4xy, 3x^2z^2 + 2z).$$

Wir werden in der nächsten Vorlesung sehen, dass diese Abbildung in jedem Punkt total differenzierbar ist, und dass die Jacobi-Matrix das totale Differential beschreibt.

Nehmen wir nun an, dass wir nur an der Restriktion dieser Funktion auf die Ebene

$$E \subset \mathbb{K}^3, E = \{(x, y, z) \mid 3x + 2y - 5z = 0\}$$

interessiert sind. E ist also der Kern der linearen Abbildung

$$L: \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y, z) \longmapsto 3x + 2y - 5z.$$

Als Kern ist E selbst ein (zweidimensionaler) Vektorraum. Die Einschränkung von f auf die Ebene ergibt also die Abbildung

$$\tilde{f} = f|_E: E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Diese Abbildung kann man als die Komposition $E \subset \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$ auffassen und diese ist nach der Kettenregel differenzierbar. Wenn wir die Inklusion von E in \mathbb{K}^3 mit N bezeichnen, so ist das totale Differential der Komposition in einem Punkt $P \in E$ gemäß der Kettenregel gerade die Abbildung

$$\left(D\tilde{f} \right)_P = (Df)_P \circ N: E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Daher ergibt es hier Sinn vom totalen Differential zu sprechen.

Es ergibt allerdings keinen Sinn von partiellen Ableitungen der Abbildung $f|_E: E \rightarrow \mathbb{K}$ zu sprechen, da es keine natürliche Basis auf E gibt und daher auch keine natürlichen Koordinaten. Es ist leicht eine Basis von E zu finden und damit Koordinaten, es gibt aber keine „beste Wahl“, und die partiellen Ableitungen sehen in jeder Basis verschieden aus.

Eine Basis von E ist beispielsweise durch $v_1 = (0, 5, 2)$ und $v_2 = (5, 0, 3)$ gegeben, und eine weitere durch $w_1 = (1, 1, 1)$ und $w_2 = (2, -3, 0)$. Mit solchen Basen erhalten wir Identifikationen $\mathbb{K}^2 \rightarrow E$ und somit numerische Beschreibungen der Abbildung $\mathbb{K}^2 \cong E \rightarrow \mathbb{K}$, womit wir die partiellen Ableitungen bezüglich der gewählten Basen berechnen können.

In der ersten Basis ist die Identifikation gegeben durch die Abbildung

$$(s, t) \longmapsto sv_1 + tv_2 = s(0, 5, 2) + t(5, 0, 3) = (5t, 5s, 2s + 3t)$$

und dieser Ausdruck wird durch f abgebildet auf

$$\begin{aligned} & 2(5t)(5s)^2 + (5t)^2(2s + 3t)^3 + (2s + 3t)^2 \\ &= 250ts^2 + 25t^2(8s^3 + 36s^2t + 54st^2 + 27t^3) \\ & \quad + 4s^2 + 9t^2 + 12st \\ &= 250ts^2 + 200s^3t^2 + 900s^2t^3 + 1350st^4 \end{aligned}$$

$$+675t^5 + 4s^2 + 9t^2 + 12st.$$

Die partiellen Ableitungen dieser Komposition (nennen wir sie g) bezüglich dieser Basis sind gegeben durch

$$\partial g / \partial s = 500ts + 600s^2t^2 + 1800st^3 + 1350t^4 + 8s + 12t$$

und

$$\partial g / \partial t = 250s^2 + 400s^3t + 2700s^2t^2 + 5400st^3 + 3375t^4 + 18t + 12s.$$

In der zweiten Basis $w_1 = (1, 1, 1)$ und $w_2 = (2, -3, 0)$ ist die Identifikation gegeben durch

$$(r, u) \mapsto rw_1 + uw_2 = r(1, 1, 1) + u(2, -3, 0) = (r + 2u, r - 3u, r)$$

und dieser Ausdruck wird unter f abgebildet auf

$$\begin{aligned} & 2(r + 2u)(r - 3u)^2 + (r + 2u)^2r^3 + r^2 \\ &= 2r^3 + 4r^2u - 12r^2u - 24ru^2 \\ &= 2r^3 - 8r^2u - 6ru^2 + 36u^3 + r^5 + 4r^4u. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen der Komposition (nennen wir sie h) bezüglich dieser Basis sind

$$\partial h / \partial r = 6r^2 - 16ru - 6u^2 + 5r^4 + 16r^3u + 12r^2u^2 + 2r$$

und

$$\partial h / \partial u = -8r^2 - 12ru + 108u^2 + 4r^4 + 8r^3u.$$

Fazit: Koordinaten sind manchmal gut für Berechnungen, manchmal verdunkeln sie aber auch den eigentlichen mathematischen Sachverhalt.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Surface integral1.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 2
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9