Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis I

Vorlesung 52

Reguläre Punkte

Der Rang einer linearen Abbildung

$$L\colon V \longrightarrow W$$

ist definiert als die Dimension des Bildraumes $L(V)$. Mit diesem Begriff können wir die Regularität einer Abbildung in einem Punkt allgemein definieren.

Definition 52.1. Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, sei $P \in G$ und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow W$$

eine in P differenzierbare Abbildung. Dann heißt P ein *regulärer Punkt* von φ, wenn

$$\operatorname{rang}\,(D\varphi)_P = \min\left(\dim(V), \dim(W)\right)$$

ist. Andernfalls heißt P ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

Bemerkung 52.2. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi\colon G \to W$ ist genau dann regulär in einem Punkt $P \in G$, wenn das totale Differential $(D\varphi)_P$ den maximal möglichen Rang besitzt. Der Rang ist nach Lemma 12.14 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) und nach Lemma 12.15 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang einer beschreibenden Matrix. Daher ist der Rang maximal gleich der Anzahl der Zeilen und maximal gleich der Anzahl der Spalten, also maximal gleich dem Minimum der beiden Dimensionen.

Bei $\dim(W) = 1$ ist P ein regulärer Punkt genau dann, wenn $(D\varphi)_P$ nicht die Nullabbildung ist. Daher stimmt diese Definition von regulär mit Definition 47.13 überein. Bei $\dim(V) = 1$ bedeutet die Regularität wiederum, dass $(D\varphi)_P \neq 0$ ist. Generell bedeutet bei $\dim(V) \leq \dim(W)$ die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ injektiv ist, und bei $\dim(V) \geq \dim(W)$ bedeutet die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ surjektiv ist. Insbesondere bedeutet bei $\dim(V) = \dim(W)$ die Regularität in P, dass das totale Differential bijektiv ist und dass daher die Voraussetzung im Satz über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt ist.

Beispiel 52.3. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^2 - y, x + xy).$$

Diese Abbildung ist differenzierbar und die Jacobi-Matrix in einem Punkt $P = (x, y)$ ist

$$\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1+y & x \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$2x^2 + 1 + y\,,$$

so dass die Bedingung

$$y \neq -2x^2 - 1$$

die regulären Punkte der Abbildung charakterisiert. Im Nullpunkt $(0, 0)$ liegt beispielsweise ein regulärer Punkt vor, so dass dort aufgrund des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit lokal eine Bijektion vorliegt, d.h. es gibt offene Umgebungen U_1 und U_2 von $(0, 0)$ derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1} \colon\ U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist (mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung).

Wie groß kann dabei U_1 gewählt werden? Wir beschränken uns auf offene Ballumgebungen $U((0, 0), r)$. Bei $r > 1$ enthält eine solche Kreisscheibe zwei Punkte der Form

$$(\pm x, -1)\,.$$

Diese werden unter φ auf

$$\varphi(\pm x, -1) = \big(x^2 - (-1),\, x + x(-1)\big) = \big(x^2 + 1,\, 0\big)$$

abgebildet, also auf den gleichen Punkt. Daher ist die Einschränkung der Abbildung auf eine solche Kreisscheibe nicht injektiv, und auf einer solchen Menge kann es keine Umkehrabbildung geben.

Betrachten wir hingegen

$$U_1 = U((0, 0), 1)$$

und

$$U_2 := \varphi(U_1)$$

Da U_1 keine kritischen Punkte enthält, ist nach Aufgabe 51.20 das Bild U_2 offen. Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{U_1} \colon U_1 \to U_2$ ist nach Definition von U_2 surjektiv, so dass nur die Injektivität zu untersuchen ist.

Das Gleichungssystem

$$x^2 - y = u \text{ und } x + xy = v$$

führt auf

$$y = x^2 - u$$

und auf

$$x(1 + x^2 - u) = x^3 + (1 - u)x = v.$$

Seien (x, y) und $(\tilde{x}, \tilde{y})$ aus $U((0, 0), 1)$ mit

$$\varphi(x, y) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

gegeben. Dann ist

$$x^3 + (1-u)x = v = \tilde{x}^3 + (1-u)\tilde{x}$$

und somit

$$0 = x^3 - \tilde{x}^3 + (1-u)(x - \tilde{x}) = (x - \tilde{x})\big(x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u\big).$$

Bei $x = \tilde{x}$ folgt direkt $y = \tilde{y}$. Bei $x \neq \tilde{x}$ muss

$$x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u = 0$$

sein. Dies bedeutet $y = x^2 - u = -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1$ und ebenso $\tilde{y} = -x\tilde{x} - x^2 - 1$. Wegen

$$x(y+1) = v$$

und $y+1 > 0$ müssen x und v das gleiche Vorzeichen besitzen. Daher müssen auch x und $\tilde{x}$ das gleiche Vorzeichen besitzen. Daraus folgt aber

$$y = -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1 \leq -1,$$

so dass es in der offenen Kreisumgebung mit Radius 1 keine zwei verschiedenen Urbilder geben kann.[1] Mit $U_1 = U((0,0),1)$ liegt also eine Bijektion $U_1 \rightarrow U_2$ vor.

Diffeomorphismen

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 52.4. Es seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume und $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen. Eine Abbildung

$$\varphi\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt C^k- *Diffeomorphismus* , wenn φ bijektiv und k-mal stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist.

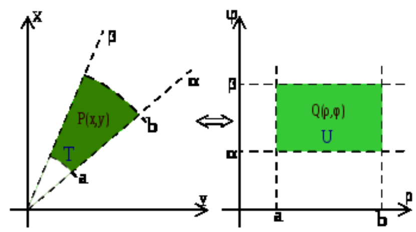
Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit besagt also, dass eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarem totalen Differential lokal (!) ein C^1-Diffeomorphismus ist (es gibt auch C^k-Versionen von diesem Satz). Zwei offene Mengen U_1 und U_2 heißen C^k-*diffeomorph*, wenn es einen C^k-Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt. Hier werden wir uns auf C^1-Diffeomorphismen beschränken und prominente Beispiele besprechen.

[1] Man kann auch folgendermaßen argumentieren: Die Ableitung von $x^3 + (1-u)x$ nach x ist $3x^2 + (1-u) = 3x^2 + 1 - (x^2 - y) = 2x^2 + 1 + y$. Wegen $|y| < 1$ ist dies positiv. Somit ist $x^3 + (1-u)x$ streng wachsend in x nach Satz 19.5. Daher gibt es zu einem vorgegebenen Punkt $(u,v) \in U_2$ nur ein x, das die Bedingung

$$x^3 + (1-u)x = v$$

erfüllt. Wegen $y = x^2 - u$ ist auch die zweite Komponente y eindeutig bestimmt.

Wir haben schon für die komplexen Zahlen Polarkoordinaten verwendet, siehe Satz 21.6. Hier besprechen wir Polarkoordinaten in Hinblick auf lokale Umkehrbarkeit.



Beispiel 52.5. Die Abbildung

$$\varphi\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (r, \alpha) \longmapsto (r\cos\alpha, r\sin\alpha),$$

heißt *Polarkoordinatenauswertung*. Sie ordnet einem Radius r und einem Winkel α (wegen diesen Bedeutungen schränkt man den Definitionsbereich häufig ein) denjenigen Punkt der Ebene (in kartesischen Koordinaten) zu, zu dem man gelangt, wenn man in Richtung des Winkels (gemessen von der x-Achse aus gegen den Uhrzeigersinn) die Strecke r zurücklegt. Sie ist in jedem Punkt (r, α) stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da die Abbildung im zweiten Argument, also im Winkel α, periodisch mit der Periode 2π ist. Bei $r = 0$ ist - unabhängig von α - das Bild gleich $(0,0)$. Ferner ist $\varphi(-r, \alpha+\pi) = \varphi(r, \alpha)$. Die Abbildung kann also nicht global invertierbar sein.

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist

$$r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r.$$

Bei $r \neq 0$ liegt also nach Satz 16.11 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) ein bijektives totales Differential vor. Nach dem Satz über die lokale Umkehrabbildung gibt es zu jedem Punkt (r, α) mit $r \neq 0$ eine offene Umgebung $(r, \alpha) \in U_1$ und eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{U_1}\colon\, U_1 \longrightarrow U_2 = \varphi(U_1).$$

Bei $r > 0$ kann man beispielsweise als offene Umgebung das offene Rechteck

$$U_1 = \,]r-\delta, r+\delta[\, \times \,]\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon[$$

mit $r > \delta > 0$ und mit $\pi > \epsilon > 0$ wählen. Das Bild davon, also U_2, ist der Schnitt des (offenen) Kreisringes zu den Radien $r-\delta$ und $r+\delta$ und dem (offenen) Kreissektor, der durch die beiden Winkel $\alpha-\epsilon$ und $\alpha+\epsilon$ begrenzt ist.

Man kann diese Abbildung zu einer bijektiven Abbildung, und zwar zu einem Diffeomorphismus, auf großen offenen Mengen einschränken, beispielsweise zu

$$\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\},\ (r, \alpha) \longmapsto (r\cos\alpha, r\sin\alpha).$$

Die Bijektivität folgt dabei aus den grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, siehe insbesondere Satz 21.3. Wenn man das offene Intervall $]-\pi, \pi[$ durch das halboffene Intervall $]-\pi, \pi]$ ersetzt, so bekommt man eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi]$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Man kann aber nicht von einem Diffeomorphismus sprechen, da dies nur für offene Mengen definiert ist. Die Umkehrabbildung ist übrigens noch nicht einmal stetig.

Beispiel 52.6. Eine räumliche Variante der Polarkoordinaten sind die *Zylinderkoordinaten*. Die zugehörige Abbildung wird durch

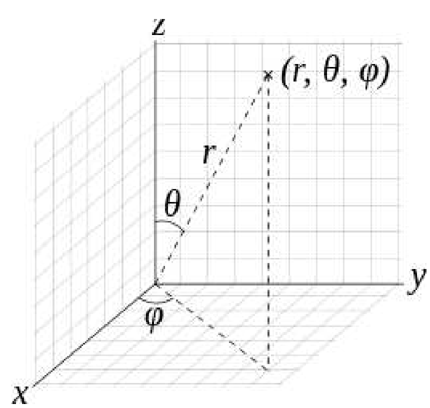
$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (r, \alpha, z) \longmapsto (r\cos\alpha, r\sin\alpha, z),$$

beschrieben. Für jedes feste z werden (r, α) als Polarkoordinaten ausgewertet und die Höhe z wird einfach übernommen.

Beispiel 52.7. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\,,$$

(bzw. die Einschränkung davon auf Teilmengen wie $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$) nennt man *Kugelkoordinatenauswertung*. Diese Abbildung bildet die *Kugelkoordinaten* (r, θ, φ) auf die zugehörigen kartesischen Koordinaten (x, y, z) ab.



Die Bedeutung der Kugelkoordinaten sind folgendermaßen: r ist der Abstand von (x, y, z) zum Nullpunkt. Bei $r = 1$ definieren die beiden Winkel φ und θ einen Punkt auf der Einheitskugel, und zwar bestimmt φ einen Punkt auf dem Einheitskreis in der $x-y$-Ebene (auf dem Äquator) und θ bestimmt einen Punkt auf dem zugehörigen Halbkreis (der durch den Äquatorpunkt und Nord- und Südpol festgelegt ist), wobei der Winkel zum Nordpol gemessen wird. Für ($r = 1$ und) einen festen Winkel θ parametrisiert φ einen

Breitenkreis, wobei $\theta = \frac{\pi}{2}$ den Äquator beschreibt. Bei einem festen Winkel φ hingegen parametrisiert θ den oben angesprochenen Halbkreis, einen *Längenkreis*. In der Geographie herrschen übrigens etwas andere Konventionen, man wählt den zweiten Winkel aus $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (statt $+$ und $-$ spricht man von nördlicher und südlicher Breite) und nimmt $-\sin\theta$.

Die Jacobi-Matrix der Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und die Determinante davon ist

$$r^2\sin\theta\,.$$

D.h. bei $r \neq 0$ und $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$ ist das totale Differential invertierbar und daher liegt nach Satz 51.4 ein lokaler Diffeomorphismus vor. Die inhaltliche Interpretation der Abbildung zeigt, dass hier überhaupt ein Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}_+ \times]0, \pi[\times [0, 2\pi[$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ vorliegt.

Abbildungsverzeichnis