Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis I

Vorlesung 55

Der Satz über die injektive Abbildung

Als ein weiteres Korollar aus dem Satz über die Umkehrabbildung besprechen wir die Situation, wo das totale Differential injektiv ist.

Satz 55.1. *Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen und sei*

$$\varphi\colon G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem das totale Differential $(D\varphi)_P$ injektiv sei. Dann gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass $\varphi|_U$ injektiv ist.

Beweis. Es sei $\dim(V) = k$ und $\dim(W) = n$. Es sei $B = (D\varphi)_P(V)$ das Bild des totalen Differentials $(D\varphi)_P$. Nach Lemma 11.1 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) (1) ist $B \subseteq W$ ein Untervektorraum der Dimension $\dim(B) = k$. Wir ergänzen eine Basis von B durch $w_1, \ldots, w_{n-k}$ zu einer Basis von W und setzen $C = \langle w_1, \ldots, w_{n-k} \rangle$. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi\colon G \times C \longrightarrow W,\, (v,w) \longmapsto \varphi(v) + w,$$

wobei links und rechts zwei n-dimensionale Vektorräume stehen. Diese Abbildung kann man als die Hintereinanderschaltung

$$G \times C \stackrel{\varphi \times \mathrm{Id}_C}{\longrightarrow} W \times C \stackrel{+}{\longrightarrow} W$$

auffassen. Daher ist die Gesamtabbildung stetig differenzierbar und das totale Differential ist $(D\varphi)_P + i_C$, wobei $i_C\colon C \to W$ die lineare Einbettung des Unterraums ist. Dieses totale Differential ist surjektiv im Punkt $(P,0)$, da sowohl B als auch C zum Bild gehören, und somit bijektiv. Wir können also den Satz über die Umkehrabbildung anwenden und erhalten offene Mengen $U_1 \subseteq G \times C$ und $U_2 \subseteq W$ derart, dass $(\varphi \times \mathrm{Id}_C)|_{U_1}$ ein Diffeomorphismus zwischen U_1 und U_2 ist. Dies können wir einschränken auf eine offene Menge der Form $U_3 \times U_4 \subseteq U_1$ mit $P \in U_3 \subseteq G$ und $0 \in U_4 \subseteq C$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi|_{U_3}\colon U_3 \longrightarrow W$$

injektiv, da dies die Hintereinanderschaltung

$$U_3 \longrightarrow U_3 \times U_4 \longrightarrow U_2 \subseteq W$$

mit $Q \mapsto (Q,0)$ ist. $\square$

Lipschitz-Bedingungen

Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Wir kehren zu Differentialgleichungen zurück und wollen den Satz von Picard-Lindelöf beweisen, einen wichtigen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen. Dafür wird die Voraussetzung wesentlich sein, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Definition 55.2. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es eine reelle Zahl $L \geq 0$ mit

$$\| f(t,u) - f(t,v) \| \leq L \cdot \| u - v \|$$

für alle $t \in I$ und $u, v \in U$ gibt.

Die reelle Zahl L nennt man auch eine *Lipschitz-Konstante* für das Vektorfeld f.

Definition 55.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f *lokal* einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es zu jedem Punkt $(t,v) \in I \times U$ eine offene Umgebung

$$(t,v) \in I' \times U' \subseteq I \times U$$

derart gibt, dass das auf $I' \times U'$ eingeschränkte Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die folgende Aussage liefert ein wichtiges und leicht überprüfbares hinreichendes Kriterium, wann ein Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Lemma 55.4. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$f\colon I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, v_1, \ldots, v_n) \longmapsto f(t, v_1, \ldots, v_n),$$

ein Vektorfeld auf U derart, dass die partiellen Ableitungen nach v_j existieren und stetig sind. Dann genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis. Sei $P = (t, v) = (t, v_1, \ldots, v_n)$ ein Punkt in $I \times U$ und sei

$$U(t, \epsilon) \times U(v, \epsilon)$$

eine offene Umgebung von P innerhalb von $I \times U$ derart, dass auch

$$B = B(t, \epsilon) \times B(v, \epsilon) \subseteq I \times U$$

ist. Dieses B ist eine abgeschlossene Umgebung von P und daher kompakt. Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial v_j}$ nach Voraussetzung stetig sind, gibt es nach Satz 36.12 eine gemeinsame Schranke $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\| \frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q) \| \leq c$$

für alle $Q \in B$. Daher gibt es für die Matrizen $\left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Schranke L mit

$$\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q) \right)_{1 \leq i,j \leq n} \| \leq L.$$

Man kann daher zu jedem festen Zeitpunkt $s \in U(t, \epsilon)$ Lemma 51.3 anwenden und erhält für $u, u' \in U(v, \epsilon)$ die Abschätzung

$$\|f(s, u) - f(s, u')\| \leq L \cdot \|u - u'\|.$$

□

Abbildungsräume und Supremumsnorm

Wir stellen noch einige funktionalanalytische Hilfsmittel für den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf bereit. Wir verallgemeinern den Begriff der punktweisen (gleichmäßigen) Konvergenz von Funktionenfolgen auf metrische Räume.

Definition 55.5. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n\colon T \longrightarrow M$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Abbildungen. Man sagt, dass die Abbildungsfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes $x \in T$ die Folge

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert.

Definition 55.6. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n \colon T \longrightarrow M$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Abbildungen, die punktweise konvergiert. Dann nennt man die Abbildung

$$T \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

die *Grenzabbildung* der Abbildungsfolge.

Definition 55.7. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n \colon T \longrightarrow M$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Abbildungen. Man sagt, dass die Abbildungsfolge *gleichmäßig konvergiert*, wenn es eine Abbildung

$$f \colon T \longrightarrow M$$

derart gibt, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt mit

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in T\,.$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz liegt insbesondere punktweise Konvergenz vor und f ist die Grenzabbildung.

Lemma 55.8. *Es seien L und M metrische Räume und es sei*

$$f_n \colon L \longrightarrow M$$

eine Folge von stetigen Abbildungen, die gleichmäßig gegen die Abbildung f konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x \in L$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein n_0 mit $d(f_n(y), f(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $n \geq n_0$ und alle $y \in L$. Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} in x gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $y \in L$ mit $d(x, y) \leq \delta$. Für diese y gilt somit

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Wir erinnern an die Definition der Supremumsnorm.

Es sei T eine Menge und

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$\|f\| := \|f\|_T = \sup\left(|f(x)| \, | x \in T\right)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f. Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞.

Diese Definition kann man direkt verallgemeinern, wenn die Werte der Abbildungen in einem euklidischen Vektorraum liegen. Es sei also T eine Menge und E sei ein euklidischer Vektorraum. In dieser Situation definiert man zu einer Abbildung

$$f\colon T \longrightarrow E$$

$$\|f\| := \|f\|_T = \sup\left(\|f(x)\|, x \in T\right)$$

und nennt dies das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f (falls das Supremum nicht existiert, ist dies als ∞ zu interpretieren).

Wir setzen $M = \mathrm{Abb}(T, E)$; dies ist ein (i.A. unendlichdimensionaler) reeller Vektorraum. Die Supremumsnorm erfüllt die folgenden Eigenschaften (die geeignet zu interpretieren sind, falls ∞ auftritt).

(1) Es ist $\|f\| \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) Es ist $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ gilt

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

(4) Für $g, f \in M$ gilt

$$\|g + f\| \leq \|g\| + \|f\|.$$

Wenn T ein metrischer Raum ist, so betrachtet man

$$C = \{f : T \to E \mid f \text{ stetig}\}.$$

Dieser ist ein reeller Untervektorraum von M. Wenn $T \subseteq \mathbb{R}^k$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt ist, so ist nach Satz 36.12 das Supremum von $\|f(x)\|$, $x \in T$, gleich dem Maximum, d.h. es gibt ein $x \in T$ derart, dass $\|f(x')\| \leq \|f(x)\|$ für alle $x' \in T$ gilt. Daher ist in diesem Fall das Supremum stets eine reelle Zahl, und stimmt mit dem Maximum überein. Man spricht daher auch von der *Maximumsnorm*.

Satz 55.9. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ eine kompakte Teilmenge, es sei E ein euklidischer Vektorraum und es sei $C = C(T, E)$ der Vektorraum der stetigen Abbildungen von T nach E. Dann ist C, versehen mit der Maximumsnorm, ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis. Es sei

$$f_n\colon T \longrightarrow E$$

eine Cauchy-Folge von stetigen Abbildungen. Wir müssen zeigen, dass diese Folge gegen eine Grenzabbildung konvergiert, die ebenfalls stetig ist. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon$$

für alle $x \in T$ gilt. Daher ist für jedes $x \in T$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E und somit, wegen der Vollständigkeit von euklidischen Räumen, konvergent in E. Wir nennen den Grenzwert dieser Folge $f(x)$, so dass sich insgesamt eine Grenzabbildung

$$f\colon T \longrightarrow E,\, x \longmapsto f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

ergibt, gegen die die Funktionenfolge punktweise konvergiert. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ stets ein n_0 derart, dass die Cauchy-Bedingung für alle $x \in T$ gilt, konvergiert die Funktionenfolge sogar gleichmäßig gegen f (und das bedeutet die Konvergenz in der Supremumsnorm). Aufgrund von Lemma 55.8 ist daher f stetig und daher ist $f \in C$. $\square$

Abbildungsverzeichnis