Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2023**

Analysis I

Vorlesung 6

Rechenregeln für Folgen

Lemma 6.1. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \Big(\lim_{n \to \infty} x_n\Big) + \Big(\lim_{n \to \infty} y_n\Big).$$
(2) *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = \Big(\lim_{n \to \infty} x_n\Big) \cdot \Big(\lim_{n \to \infty} y_n\Big).$$
(3) *Für $c \in K$ gilt*
$$\lim_{n \to \infty} c x_n = c \Big(\lim_{n \to \infty} x_n\Big).$$
(4) *Es sei $\lim_{n \to \infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$
(5) *Es sei $\lim_{n \to \infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} y_n}{x}.$$

Beweis. (2). Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach Lemma 5.10 insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n \to \infty} x_n$ und $y := \lim_{n \to \infty} y_n$. Wir setzen $C := \max\{D, |y|\}$. Aufgrund der Konvergenz gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit
$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2\,.$$
Diese Abschätzungen gelten dann auch für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher
$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(4). Da der Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht 0 ist, gilt für $n \geq N_1$ die Bedingung $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$ und damit

$$\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}.$$

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon\,|x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2\,.$$

Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x_n - x}{xx_n}\right| = \frac{1}{|x|\,|x_n|}\,|x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{\epsilon\,|x|^2}{2} = \epsilon.$$

□

Beispiel 6.2. Wir betrachten die durch

$$x_n = \frac{-5n^3 + 6n^2 - n + 8}{11n^3 + 7n^2 + 3n - 1}$$

definierte Folge und wollen wissen, ob und gegebenenfalls wogegen sie konvergiert. Man kann Lemma 6.1 nicht unmittelbar anwenden, da weder der Zähler noch der Nenner konvergiert. Allerdings kann man den folgenden Trick anwenden, man schreibt

$$x_n = \frac{-5n^3 + 6n^2 - n + 8}{11n^3 + 7n^2 + 3n - 1} = \frac{(-5n^3 + 6n^2 - n + 8)\frac{1}{n^3}}{(11n^3 + 7n^2 + 3n - 1)\frac{1}{n^3}} = \frac{-5 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}}{11 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}.$$

In dieser Form sind die Zähler- und die Nennerfolge konvergent, und zwar gegen -5 bzw. 11, und daher konvergiert die Folge gegen $-\frac{5}{11}$.

Lemma 6.3. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 6.7. □

Daraus folgt insbesondere, dass bei einer konvergenten Folge, für die $x_n \geq a$ für jedes Folgenglied gilt, auch der Limes $\geq a$ sein muss (die entsprechende Aussage für $>$ statt $\geq$ gilt nicht, wie die Folge der Stammbrüche zeigt). Ebenso folgt, dass zu einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a, b]$, die konvergiert, auch der Grenzwert zu dem abgeschlossenen Intervall gehören muss.

Die folgende Aussage nennt man das *Quetschkriterium*.

Lemma 6.4. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

Beweis. Siehe Aufgabe 6.8. □

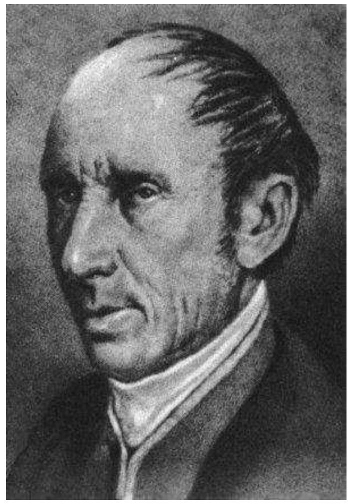
Definition 6.5. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann heißt die Folge *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng wachsend*, wenn $x_{n+1} > x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt *fallend*, wenn $x_{n+1} \leq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und *streng fallend*, wenn $x_{n+1} < x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als gemeinsamen Begriff für wachsende oder fallende Folgen verwendet man die Bezeichnung *monotone Folgen*.

Man stelle sich nun eine wachsende Folge vor, die aber dennoch (nach oben) beschränkt ist. Muss eine solche Folge konvergieren? Das hängt vom angeordneten Körper ab! Innerhalb der rationalen Zahlen sind beispielsweise die mit dem Heronverfahren konstruierten Folgen fallend (wenn man mit einem zu großen Startwert anfängt) und auch beschränkt (durch jede rationale Zahl, deren Quadrat kleiner als a ist), sie besitzen aber im Allgemeinen keinen Limes in $\mathbb{Q}$. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, denen wir uns jetzt zuwenden, sind gerade dadurch ausgezeichnet, dass darin jede wachsende (fallende), nach oben (unten) beschränkte Folge einen Grenzwert besitzt.

Cauchy-Folgen

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das babylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in einem beliebigen angeordneten Körper betrachten, in dem $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 6.6. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Lemma 6.7. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchy-Folge, wenn folgende Bedingung gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \geq n_0$ die Abschätzung*

$$|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon$$

gilt.

Beweis. Eine Cauchy-Folge erfüllt auch die angegebene Bedingung, da man ja $n_0 = n$ setzen kann. Für die Umkehrung sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Bedingung der Aussage gilt insbesondere für $\epsilon/2$, d.h. es gibt ein n_0 derart, dass für jedes $m \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_m - x_{n_0}| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Damit gilt aufgrund der Dreiecksungleichung für beliebige $m, n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

so dass eine Cauchy-Folge vorliegt. $\square$

Lemma 6.8. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit Grenzwert x. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \le \epsilon/2 \text{ für alle } n \ge n_0 .$$

Für beliebige $n, m \ge n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \le |x_n - x| + |x - x_m| \le \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. □

Lemma 6.9. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $b \in K$ eine obere Schranke, also $x_n \le b$ für alle Folgenglieder x_n. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist, und verwenden die Charakterisierung aus Lemma 6.7. Somit gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes n_0 ein $m > n_0$ mit $x_m - x_{n_0} \ge \epsilon$ gibt (wir können die Betragstriche wegen der Monotonie weglassen). Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch $n_0 = 0$,

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \ge \epsilon ,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \ge \epsilon ,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedesaxioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k\epsilon > b - x_0$. Die Summe der ersten k Differenzen der Teilfolge x_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} & x_{n_k} - x_0 \\ = \; & (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \cdots + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x_{n_0}) \\ \ge \; & k\epsilon \\ > \; & b - x_0. \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass b eine obere Schranke der Folge ist. □

Der Körper der reellen Zahlen

In Bezug auf die reellen Zahlen hört man häufig Existenzaussagen: dort gibt es $\sqrt{5}$, in $\mathbb{R}$ besitzt jede positive Zahl eine Quadratwurzel, eine dritte Wurzel, dort haben Polynome mit negativen und positiven Werten auch Nullstellen, dort gibt es die Zahlen e und π, in $\mathbb{R}$ beschreibt jede Dezimalbruchfolge eine Zahl, ... Diese Existenzandeutungen werden im axiomatischen Aufbau der reellen Zahlen ein für alle Mal durch das Vollständigkeitsaxiom fundiert.

Definition 6.10. Ein angeordneter Körper K heißt *vollständig* oder *vollständig angeordnet*, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert (also in K einen Grenzwert besitzt).

Definition 6.11. Einen archimedisch angeordneten vollständigen Körper nennt man *Körper der reellen Zahlen*. Er wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Die reellen Zahlen sind also ein vollständig und archimedisch angeordneter Körper. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen vollständig und archimedisch angeordnete Körper sind, so kann man eine (eindeutig bestimmte) bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, die alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen Isomorphismus). Man kann auch sagen, dass die reellen Zahlen den größten archimedisch angeordneten Körper bilden ($\mathbb{Q}$ ist der kleinste).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man die Vorstellung einer lückenfreien „kontinuierlichen Zahlengerade" zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Dedekindschen Schnitte oder die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung. Darauf werden wir hier verzichten.

Statt von einem vollständig und archimedisch angeordneten Körper werden wir von nun an von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sprechen. Als Beweismittel sind aber lediglich die genannten Axiome erlaubt.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Augustin Louis Cauchy.JPG , Autor = Benutzer Anarkman auf Commons, Lizenz = PD 4

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7