Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 10

Aufgaben

Aufgabe 10.1. Formuliere und beweise für Untergitter in $\mathbb{R}$ die analogen Resultate zu Lemma 10.2, Lemma 10.3 und Lemma 10.4.

Aufgabe 10.2. Es sei $\Gamma = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und sei $\Gamma' = \mathbb{Z}(mu) + \mathbb{Z}(nv) \subseteq \Gamma$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme den Kern (mit Anzahl) der Isogenie $\mathbb{C}/\Gamma' \to \mathbb{C}/\Gamma$.

Aufgabe 10.3. Es sei $\Gamma = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und sei $\Gamma' = \langle au + bv, cu + dv \rangle \subseteq \Gamma$ ein Untergitter. Zeige, dass die Anzahl von Γ/Γ' gleich dem Betrag der Determinante von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 10.4. Bestimme die topologische Gestalt der Überlagerungen

$$\mathbb{C}/\Gamma_1 \cong S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma_2 \cong S^1 \times S^1$$

zu einem Untergitter $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 10.5. Skizziere auf einem Torus die Punkte, die unter der zum Untergitter $3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}\mathrm{i} \subseteq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\mathrm{i}$ gehörenden Abbildung

$$\mathbb{C}/(3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}\mathrm{i}) \longrightarrow \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\mathrm{i})$$

auf den Nullpunkt abgebildet werden.

Aufgabe 10.6. Zeige, dass durch die Isogenie eine Äquivalenzrelation auf den komplexen Tori über $\mathbb{C}$ gegeben ist.

Aufgabe 10.7.*

Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter, $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$, mit $s\Gamma \subseteq \Gamma$. Es sei $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ eine Identifizierung und M die beschreibende Matrix der Abbildung

$$s\colon \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

unter dieser Identifizierung. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma,\ [z] \longmapsto [sz]$$

die zugehörige Isogenie. Zeige, dass die Anzahl des Kernes von φ mit der Determinante von M übereinstimmt.

Aufgabe 10.8. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeige direkt, dass

$$\{s \in \mathbb{C} \mid s\Gamma \subseteq \Gamma\}$$

ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 10.9. Bestimme die Automorphismengruppe von $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\mathrm{i})$.

Aufgabe 10.10. Bestimme die Automorphismengruppe von

$$\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2})\,.$$

Aufgabe 10.11. Zeige, dass innerhalb der Menge aller komplexen Tori die Teilmenge derjenigen Tori, deren Endomorphismenring größer als $\mathbb{Z}$ ist, „dünn“ ist.

Abbildungsverzeichnis