Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 14

Aufgaben

Aufgabe 14.1. Es sei $E = \mathbb{C}/\Gamma$ ein komplexer Torus der gemäß Satz 12.13 und Satz 12.14 einer elliptischen Kurve über $\mathbb{C}$ entspricht. Zeige, dass die m-Multiplikation

$$[m]\colon E \longrightarrow E$$

den Grad m^2 besitzt.

Aufgabe 14.2. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit zugehörigem komplexen Torus $\mathbb{C}/\Gamma$. Es sei

$$\mathbb{C}/\Gamma \cong V_+(F)$$

die algebraische Realisierung des Torus als elliptische Kurve im Sinne von Satz 12.14. Zeige, dass eine (holomorphe) Isogenie auch eine Isogenie im algebraischen Sinn ist.

Aufgabe 14.3. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gitter in $\mathbb{C}$ mit den zugehörigen komplexen Tori $\mathbb{C}/\Gamma_1, \mathbb{C}/\Gamma_2$. Es seien

$$\mathbb{C}/\Gamma_i \cong V_+(F_i)$$

die algebraischen Realisierungen der Tori als elliptische Kurven im Sinne von Satz 12.14. Zeige, dass eine (holomorphe) Isogenie

$$\varphi\colon \mathbb{C}/\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma_2$$

auch eine Isogenie im algebraischen Sinn ist.

Aufgabe 14.4. Zeige, dass eine elliptische Kurve E über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K divisibel ist.

Aufgabe 14.5. Bestimme den Hauptdivisor zu $f = (t-3)^2(t-1)^{-5}t^2(t+2)^{-1}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$.

Aufgabe 14.6. Bestimme den Hauptdivisor zu $f = \frac{t}{t^2+1}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ mit $t = \frac{Y}{X}$ für die Körper $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$.

Aufgabe 14.7. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ über einem Körper K sowie die affine Gerade

$$\mathbb{A}^1_K \subseteq \mathbb{P}^1_K = D_+(X) \cup \{\infty\}$$

mit dem globalen Schnittring

$$K[\frac{Y}{X}] = K[t].$$

Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Der Hauptdivisor zu einem Polynom $P \in K[t]$ besitzt in $\mathbb{A}^1_K$ keine negative Ordnung (keine Polstelle).
(2) Die Ordnung von einem Polynom $P \in K[t]$ in ∞ ist das Negative des Grades von P.
(3) Es sei $D = \sum_P n_P \cdot P$ und K algebraisch abgeschlossen. Dann ist D genau dann ein Hauptdivisor, wenn $\sum_P n_P = 0$ ist.

Aufgabe 14.8.*

Es sei $C = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$ eine glatte projektive Kurve und seien $H, G \in K[X,Y,Z]$ homogene Polynome vom Grad d. Es seien G und H keine Vielfache von F und es sei $q = \frac{H}{G}$ die zugehörige rationale Funktion im Funktionenkörper der Kurve. Es sei

$$C \cap V_+(G) = \sum_P m_P P$$

und

$$C \cap V_+(H) = \sum_P n_P P,$$

wobei m_P bzw. n_P die Schnittmultiplizitäten bezeichnen. Zeige, dass für den Hauptdivisor zu q auf C die Gleichheit

$$\operatorname{div}(q) = \sum_P (m_P - n_P) P$$

gilt.

Aufgabe 14.9. Wir betrachten die Fermatkubik

$$E = V_+(X^3 + Y^3 + Z^3) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}.$$

Bestimme den Hauptdivisor auf E zur rationalen Funktion $\frac{X}{Y}$.

Aufgabe 14.10. Es sei C eine irreduzible glatte Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K mit Funktionenkörper $Q(C)$. Zeige, dass die Zuordnung

$$Q(C)^\times \longrightarrow \operatorname{Div}(C),\ f \longmapsto \operatorname{div}(f),$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 14.11. Zeige, dass die Divisorenklassengruppe der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K gleich $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 14.12. Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und sei $q \in Q(C)$ ein nichtkonstantes Element im Funktionenkörper $Q(C)$ mit dem zugehörigen Morphismus

$$q\colon\, C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K.$$

Zeige, dass zu jedem Punkt $P \in \mathbb{P}^1_K$ die zurückgezogenen Divisoren $q^*(P)$ untereinander linear äquivalent sind.

Aufgabe 14.13. Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zeige, dass durch den Grad eines Divisors eine natürliche Zerlegung der Divisorengruppe und der Divisorenklassengruppe gegeben ist, wobei die Teile zueinander in (nach Wahl eines Punktes kanonischer) Bijektion stehen.

Aufgabe 14.14. Es sei E eine elliptische Kurve und

$$[n]\colon\, E \longrightarrow E$$

die Multiplikation mit n auf E. Beschreibe die zugehörige Rückzugsabbildung der Divisorenklassengruppe

$$\operatorname{DKG}(E) \longrightarrow \operatorname{DKG}(E),\; D \longmapsto [n]^*D.$$

Abbildungsverzeichnis