Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 3

Aufgaben

Aufgabe 3.1. Definiere eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\}$ derart, dass der Quotient unter der Äquivalenzrelation der projektive n-dimensionale Raum ist.

Aufgabe 3.2. Es seien $H = V_+(X)$ und $D = V_+(Y)$ Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_K^2$ mit dem einzigen Schnittpunkt $H \cap D = \{(0,0,1)\}$. Es seien $P, P' \notin D$ verschiedene Punkte. Finde ein homogenes Polynom $F \in K[X,Y,Z]$ mit $V_+(F) \cap D = H \cap D$, $P \in V_+(F)$ und $P' \notin V_+(F)$.

Aufgabe 3.3. Es seien $P = (a_0, \ldots, a_n)$ und $Q = (b_0, \ldots, b_n)$ Punkte im projektiven Raum $\mathbb{P}_K^n$ über einem Körper K. Zeige, dass $P = Q$ genau dann gilt, wenn $a_i b_j - a_j b_i = 0$ für alle i, j gilt.

Aufgabe 3.4. Es sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}_K^n$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass es eine offene affine Umgebung $U \cong \mathbb{A}_K^n \subset \mathbb{P}_K^n$ derart gibt, dass P in diesem affinen Raum dem Nullpunkt entspricht.

Aufgabe 3.5. Es sei $\mathbb{P}_K^n$ der projektive Raum der Dimension n über dem Körper K und seien

$$D_+(X_i) \cong \mathbb{A}_K^n, D_+(X_j) \cong \mathbb{A}_K^n \subset \mathbb{P}_K^n$$

zwei affine offene Teilmengen. Beschreibe die (nicht überall definierte) Übergangsabbildung von $D_+(X_i)$ nach $D_+(X_j)$.

Aufgabe 3.6. Man definiere den Begriff *projektiv-linearer Unterraum* eines projektiven Raumes $\mathbb{P}_K^n$.

Aufgabe 3.7. Es sei K ein Körper und sei $\mathbb{P}_K^2$ die projektive Ebene über K. Zeige, dass zwei projektive Geraden $L, M \subseteq \mathbb{P}_K^2$ stets einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.

Aufgabe 3.8.*

Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L = V_+(6X - 8Y + 3Z)$$

und

$$M = V_+(2X + 9Y - 5Z)$$

in der projektiven Ebene.

Aufgabe 3.9. Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L = V_+(7X - 7Y + 6Z)$$

und

$$M = V_+(8X + Y - 4Z)$$

in der projektiven Ebene.

Aufgabe 3.10. Zeige, dass die Menge aller Geraden in der projektiven Ebene selbst eine projektive Ebene bilden.

Aufgabe 3.11. Es sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Berechne auf zwei verschiedene Arten, wie viele Elemente der projektive Raum $\mathbb{P}^n_K$ besitzt.

Aufgabe 3.12. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann ein homogenes Ideal ist, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 3.13. Skizziere die projektive Nullstellenmenge

$$V_+(XYZ) \subseteq \mathbb{P}^2_K.$$

Aufgabe 3.14. Zeige, dass zwei verschiedene Punkte P und Q in der projektiven Ebene eindeutig eine projektive Gerade definieren, auf der beide Punkte liegen. Wie berechnet man die Geradengleichung aus den Koordinaten der Punkte?

Bestimme die homogene Geradengleichung für die beiden Punkte $(2, 3, 7)$ und $(1, 5, -2)$.

Aufgabe 3.15. Es sei $\mathbb{P}^n_K$ ein projektiver Raum der Dimension n und es seien $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ projektiv-lineare Unterräume der Dimension r und s. Es sei $r + s \geq n$. Zeige, dass dann $X \cap Y \neq \emptyset$ ist.

Aufgabe 3.16. Es sei K ein unendlicher Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der projektive Raum. Charakterisiere die homogenen Ideale $\mathfrak{a}$, für die $D_+(\mathfrak{a}) = \emptyset$ ist.

Aufgabe 3.17. Sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass der projektive Raum $\mathbb{P}^n_K$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3.18. Es sei

$$Q = V\big(X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_n^2 - 1\big) \subset \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{C}}$$

und betrachte die Gesamtabbildung

$$\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}\,,$$

wobei hinten die Kegelabbildung steht. Ist φ surjektiv? Wie verhält sich φ zur Einschränkung der Kegelabbildung auf die reell $2n+1$-dimensionale Sphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$?

Aufgabe 3.19. Sei K ein unendlicher Körper und sei $P_1, \ldots, P_m$ eine endliche Ansammlung von Punkten in einem projektiven Raum $\mathbb{P}^n_K$. Zeige: Dann gibt es eine homogene Linearform $L \in K[X_0, \ldots, X_n]$ derart, dass all diese Punkte auf der durch L definierten offenen Teilmenge $D_+(L)$ liegen.

Aufgabe 3.20. Es sei $\mathbb{P}^n_K$ der projektive Raum der Dimension n über dem Körper K und sei $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt davon mit $a_i, a_j \neq 0$, also $P \in D_+(X_i) \cap D_+(X_j)$. Die affinen Koordinaten des Punktes in $D_+(X_i) \cong \mathbb{A}^n_K$ sind $\left(\frac{a_0}{a_i}, \frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right)$ und die affinen Koordinaten des Punktes in $D_+(X_j) \cong \mathbb{A}^n_K$ sind $\left(\frac{a_0}{a_j}, \frac{a_1}{a_j}, \ldots, \frac{a_{j-1}}{a_j}, \frac{a_{j+1}}{a_j}, \ldots, \frac{a_n}{a_j}\right)$. Wir setzen den Polynomring zu $D_+(X_i)$ als

$$S_i = K[\frac{X_0}{X_i}, \frac{X_1}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}]$$

(als Unterring des rationalen Funktionenkörpers $K(X_0, X_1, \ldots, X_n)$) und entsprechend den Polynomring zu $D_+(X_j)$ als

$$S_j = K[\frac{X_0}{X_j}, \frac{X_1}{X_j}, \ldots, \frac{X_{j-1}}{X_j}, \frac{X_{j+1}}{X_j}, \ldots, \frac{X_n}{X_j}]$$

an. Zeige, dass der lokale Ring von P in $D_+(X_i)$ mit dem lokalen Ring von P in $D_+(X_j)$ als Unterring von $K(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ übereinstimmt.

Aufgabe 3.21. Es sei K ein Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der zugehörige projektive Raum. Es sei $\varphi\colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ eine bijektive lineare Abbildung.

(1) Zeige, dass φ einen Automorphismus

$$\varphi\colon\ \mathbb{P}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K,\ (x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n) \longmapsto \varphi\,(x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)\,,$$

induziert.

(2) Bestimme das Urbild von $D_+(X_i)$ in der in (1) beschriebenen Situation. Wie sieht der Morphismus für diese affinen Mengen aus?

(3) Zeige, dass φ_1 und φ_2 genau dann den gleichen Automorphismus auf dem projektiven Raum induzieren, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar $\neq 0$ ineinander überführbar sind.

(4) Induziert jede lineare Abbildung $\varphi\colon\ K^{n+1} \to K^{n+1}$ einen Morphismus $\varphi\colon\ \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$?

Unter einem solchen Automorphismus wird jede projektive Varietät $V \subset \mathbb{P}^n_K$ isomorph auf sein Bild abgebildet, die homogenen Gleichungen transformieren sich entsprechend der affinen Situation. Dadurch kann man häufig die beschreibenden Gleichungen einer Situation vereinfachen, man spicht von einem *projektiv-linearen Koordinatenwechsel*. Die vorstehende Aufgabe gibt Anlass zur folgenden Definition.

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Restklassengruppe

$$\mathrm{SL}_n(K)/\big(K^\times \cdot \mathrm{Id} \cap \mathrm{SL}_n(K)\big)$$

heißt *projektive spezielle lineare Gruppe*. Sie wird mit

$$\mathrm{PSL}_n(K)$$

bezeichnet.

Aufgabe 3.22. Es seien $P, Q \in \mathbb{P}^n_K$ Punkte im projektiven Raum über einem Körper K. Zeige, dass es einen Automorphismus $\varphi\colon\ \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ mit $\varphi(P) = Q$ gibt.

Aufgabe 3.23. Es seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1_K$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1_K$ jeweils drei (untereinander verschiedene) Punkte auf der projektiven Geraden über einem Körper K. Zeige, dass es einen K-Automorphismus $\varphi\colon\ \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ mit $\varphi(P_i) = Q_i$ für $i = 1, 2, 3$ gibt.

Aufgabe 3.24.*

Bestimme die Fixpunkte der Abbildung

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K,\ (s, t) \longmapsto (t, s).$$

Aufgabe 3.25. Es sei K ein Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der zugehörige projektive Raum. Es sei $\varphi\colon\ K^{n+1} \to K^{n+1}$ eine bijektive lineare Abbildung und

$$\psi\colon\ \mathbb{P}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K,\ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)\,,$$

der zugehörige Automorphismus. Zeige, dass ein Vektor $v \in K^{n+1}$ genau dann ein Eigenvektor zu φ ist, wenn der zugehörige Punkt im projektiven Raum ein Fixpunkt von ψ ist.

Aufgabe 3.26. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Es sei $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ ein n-dimensionaler affiner Unterraum, der den Nullpunkt nicht enthält, und es sei $\tilde{H}$ der dazu parallele Unterraum durch den Nullpunkt. Es sei $U \subseteq H$ eine in $H \cong \mathbb{K}^n$ offene Menge (in der metrischen Topologie) und es sei V die Vereinigung aller Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt von U. Zeige, dass der Durchschnitt von V mit $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \tilde{H}$ offen ist.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7