Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 9

Aufgaben

AUFGABE 9.1. Zeige, dass in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Beziehungen $S^2 = -\mathrm{Id}$ und $(ST)^3 = -\mathrm{Id}$ gelten.

AUFGABE 9.2.*

Wir betrachten die Matrizen $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es ist
$$ST \neq T^n S$$
für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Die von T erzeugte Untergruppe in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist kein Normalteiler.

AUFGABE 9.3. Zeige, dass in der Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\pm\mathrm{Id}$ die Relationen $S^2 = \mathrm{Id}$ und $(ST)^3 = \mathrm{Id}$ gelten.

AUFGABE 9.4.*

Zeige, dass durch die Abbildungen
$$\varphi\colon \mathbb{H} \longrightarrow U(0,1),\ z \longmapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}},$$
und
$$\psi\colon U(0,1) \longrightarrow \mathbb{H},\ w \longmapsto \frac{(w+1)\mathrm{i}}{1-w},$$
eine biholomorphe Abbildung zwischen der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ und der offenen Einheitskreisscheibe $U(0,1)$ gegeben ist.

AUFGABE 9.5. Zeige, dass die Modulsubstitution eine Gruppenoperation auf der oberen Halbebene ist.

Aufgabe 9.6.*

Finde für das Gitter $\Gamma = \langle 3+\mathrm{i}, -1+2\mathrm{i}\rangle$ das Element τ im Fundamentalbereich D derart, dass Γ streckungsäquivalent zu $\langle 1, \tau\rangle$ ist.

Aufgabe 9.7. Finde für das Gitter $\Gamma = \langle 3+7\mathrm{i}, 2-5\mathrm{i}\rangle$ das Element τ im Fundamentalbereich D derart, dass Γ streckungsäquivalent zu $\langle 1, \tau\rangle$ ist.

Aufgabe 9.8. Finde für das Gitter $\Gamma = \langle \sqrt{5}+\mathrm{i}, 3-\sqrt{2}\mathrm{i}\rangle$ das Element τ im Fundamentalbereich D derart, dass Γ streckungsäquivalent zu $\langle 1, \tau\rangle$ ist.

Aufgabe 9.9. Finde für das Gitter $\Gamma = \langle 1, -e+\pi\mathrm{i}\rangle$ das Element τ im Fundamentalbereich D derart, dass Γ streckungsäquivalent zu $\langle 1, \tau\rangle$ ist.

Aufgabe 9.10. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Γ ist streckungsäquivalent zu einem Gitter in $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\mathrm{i} \subseteq \mathbb{C}$.
(2) Γ ist streckungsäquivalent zu einem Gitter in $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\mathrm{i} \subseteq \mathbb{C}$.
(3) Γ ist streckungsäquivalent zu einem Gitter der Form $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ mit $\tau \in D$ und $\tau \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\mathrm{i}$.

Aufgabe 9.11. Es sei

$$\varphi\colon\ \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung und sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeige, dass φ einen Diffeomorphismus und Homomorphismus der reellen Lie-Gruppe

$$\overline{\varphi}\colon\ \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/\varphi(\Gamma)$$

induziert, dass dies aber kein Homomorphismus von komplexen Lie-Gruppen sein muss.

Abbildungsverzeichnis