

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 4

ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 4.1. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$G \times V \longrightarrow V$$

eine lineare Operation einer Gruppe G auf V . Zeige, dass dadurch in natürlicher Weise die folgenden linearen Operationen induziert sind.

- (1) Die Operation auf dem k -ten Produkt von V mit sich selbst, also

$$G \times V^k \longrightarrow V^k, (\sigma, v_1, \dots, v_k) \longmapsto (\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_k)).$$

- (2) Die Operation auf dem k -ten Dachprodukt $\bigwedge^k V$, also

$$G \times \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^k V,$$

die durch $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto \sigma(v_1) \wedge \dots \wedge \sigma(v_k)$ festgelegt ist.

- (3) Die duale Operation (von rechts) auf dem Dualraum V^* , also die Abbildung

$$V^* \times G \longrightarrow V^*, (f, \sigma) \longmapsto f \circ \sigma.$$

Aufgabe 4.2. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und

$$G \times V \longrightarrow V$$

eine lineare Operation einer Gruppe G auf V . Zeige, dass die induzierte Operation auf dem Polynomring $K[V]$ homogen, d.h. dass für jedes $\sigma \in G$ und $f \in R_d$ auch $f\sigma \in R_d$ gilt.

Aufgabe 4.3. Bestimme in Beispiel 3.15 und Beispiel 3.18 die induzierte Wirkung der Gruppe auf der d -ten Stufe des Polynomringes $K[V]$.

Aufgabe 4.4. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige die folgende Aussagen.

- (1) Für die Einheiten gilt

$$(R^G)^\times = R^G \cap R^\times.$$

(2) Wenn R ein Körper ist, so ist auch R^G ein Körper.

Aufgabe 4.5. Inwiefern ist die Galoistheorie ein Spezialfall der (algebraischen) Invariantentheorie?

Aufgabe 4.6. Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass zu jedem $f \in R$ sowohl $\sum_{\sigma \in G} f\sigma$ als auch $\prod_{\sigma \in G} f\sigma$ zum Fixring R^G gehören.

Aufgabe 4.7.*

Wir betrachten die lineare Operation der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(3)$ auf dem \mathbb{R}^2 , die durch die Drittdrehung gegeben ist, also durch die drei Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

und die zugehörige Operation der Gruppe auf dem Polynomring $R = \mathbb{R}[X, Y]$.

- Bestimme das Bild von X unter den beiden zugehörigen nichttrivialen Ringautomorphismen, also $X\sigma$ und $X\sigma^2$.
- Berechne $X + X\sigma + X\sigma^2$.
- Zeige, dass es keine invariante Linearform $\neq 0$ gibt.
- Berechne $X \cdot X\sigma \cdot X\sigma^2$. Bestätige, dass dieses Polynom invariant ist.

Aufgabe 4.8. Es sei K ein unendlicher Körper und $K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring über K . Die Einheitengruppe K^\times operiere durch skalare Multiplikation auf R , d.h. zu $\lambda \in K^\times$ gehört der durch $X_i \mapsto \lambda X_i$ definierte K -Algebraautomorphismus. Zeige, dass der Fixring zu dieser Operation K ist.

Aufgabe 4.9. Betrachte die Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf dem Polynomring $R = K[X_1, \dots, X_n]$ über einem Körper K . Bestimme (zu $n = 2, 3, 4$) für jede Untergruppe $H \subseteq S_n$ den Fixring R^H .

Aufgabe 4.10. Es sei S ein kommutativer Ring mit $2 \neq 0$ und $a \in S$. Zeige, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/(2) \cong \{1, -1\}$ auf der quadratischen Erweiterung

$$R := S[X]/(X^2 - a)$$

als Gruppe von S -Algebrahomomorphismen operiert, indem -1 durch $X \mapsto -X$ wirkt. Bestimme den Fixring zu dieser Operation.

Aufgabe 4.11.*

Es sei R ein kommutativer Ring und G eine Gruppe, die auf R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass die Operation genau dann trivial ist, wenn $R^G = R$ ist.

Aufgabe 4.12. Es sei K ein Körper. Zeige, dass auf $K[X, Y]/(XY)$ eine Gruppenoperation von $\mathbb{Z}/(2)$ gegeben ist, indem das nichttriviale Gruppenelement X und Y vertauscht. Bestimme den Fixring zu dieser Operation.

Aufgabe 4.13. Es sei R ein kommutativer Ring und $G = (R, +)$ die additive Gruppe zu R .

(a) Zeige, dass durch die Zuordnung

$$G \longrightarrow \text{Hom}_R^{\text{alg}}(R[X], R[X]), r \longmapsto \varphi_r,$$

wobei φ_r den durch $X \mapsto X+r$ gegebenen R -Algebrahomomorphismus bezeichnet, eine Gruppenoperation von G auf dem Polynomring $R[X]$ definiert ist.

(b) Zeige, dass der Fixring zu dieser Operation gleich R ist.

Aufgabe 4.14. Es sei R ein kommutativer Ring und $G = (R^\times, \cdot)$ die multiplikative Gruppe zu R .

(a) Zeige, dass durch die Zuordnung

$$G \longrightarrow \text{Hom}_R^{\text{alg}}(R[X], R[X]), r \longmapsto \psi_r,$$

wobei ψ_r den durch $X \mapsto rX$ gegebenen R -Algebrahomomorphismus bezeichnet, eine Gruppenoperation von G auf dem Polynomring $R[X]$ definiert ist.

(b) Man gebe Beispiele für kommutative Ringe derart, dass der Fixring zu dieser Operation gleich R ist.

(c) Man gebe Beispiele für kommutative Ringe derart, dass der Fixring zu dieser Operation nicht gleich R ist.

Aufgabe 4.15. Es sei K ein unendlicher Körper und V ein K -Vektorraum, auf dem eine Gruppe linear operiere. Zeige, dass $f \in K[V]$ genau dann zu $K[V]^G$ gehört, wenn $f: V \rightarrow K$ G -invariant ist.

Aufgabe 4.16. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei F eine komplexe, auf \mathbb{C} konvergente Potenzreihe der Form

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jn} z^{jn}.$$

Zeige, dass für jede n -te komplexe Einheitswurzel ζ die Gleichheit $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 4.17. Es sei $F = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ eine komplexe auf \mathbb{C} konvergente Potenzreihe und $n \in \mathbb{N}_+$. Für jede n -te komplexe Einheitswurzel ζ gelte $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $c_i = 0$ für alle i gilt, die kein Vielfaches von n sind.

Aufgabe 4.18. Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) Es gibt eine stetige Funktion

$$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

- (2) Für alle n -ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- (3) Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ ist $f(wz) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4.19. Wir betrachten die Operation der r -ten komplexen Einheitswurzeln $G = \mu_r(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C} durch Multiplikation und die zugehörige Operation auf dem Polynomring $\mathbb{C}[X]$, dessen Fixring $\mathbb{C}[X^r]$ ist. Ferner betrachten wir die reelle Entsprechung dieser Situation, also die Operation auf \mathbb{R}^2 durch die Gruppe der Drehmatrizen der Ordnung r und die zugehörige Operation auf $\mathbb{R}[X, Y]$.

- (a) Zeige

$$\mathbb{R}[\operatorname{Re}(z^r), \operatorname{Im}(z^r)] \subseteq \mathbb{R}[X, Y]^G.$$

- (b) Zeige, dass diese Inklusion echt sein kann.

Aufgabe 4.20. Betrachte die Untergruppe $G \subset \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$ aus Aufgabe 3.20. Bestimme zu jeder Untergruppe $H \subseteq G$ ein Polynom aus $\mathbb{R}[X, Y]$, das bezüglich H invariant ist, aber nicht bezüglich einer größeren Untergruppe.

Aufgabe 4.21. Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik p . Wir betrachten die durch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte zyklische Gruppe und ihre natürliche Operation auf $K[X, Y]$. Zeige, dass der Invariantenring gleich

$$K[Y, X^p - XY^{p-1}]$$

ist.

Aufgabe 4.22. Es sei A ein kommutativer Ring und

$$R = A \times A \times \cdots \times A$$

der n -fache Produktring von A mit sich selbst.

- (a) Zeige, dass die symmetrische Gruppe S_n auf R durch Vertauschen der Komponenten operiert.
- (b) Bestimme den Fixring zu dieser Operation.
- (c) Zeige, dass für jede transitive Untergruppe $H \subseteq S_n$ der Fixring gleich dem Fixring aus Teil (b) ist.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.

7

Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.

7