

# Lineare Algebra II

Prof. Dr. Holger Brenner

Fachbereich Mathematik/Informatik/Physik

Universität Osnabrück

Sommersemester 2025

## 31. VORLESUNG - VEKTORRÄUME MIT SKALARPRODUKT

## VEKTORRÄUME MIT SKALARPRODUKT

Im  $\mathbb{R}^n$  kann man nicht nur Vektoren addieren und skalieren, sondern ein Vektor hat auch eine Länge, und die Lagebeziehung von zwei Vektoren zueinander wird durch den Winkel zwischen ihnen ausgedrückt. Länge und Winkel werden beide durch den Begriff des *Skalarprodukts* präzisiert. Dafür muss ein reeller Vektorraum oder ein komplexer Vektorraum vorliegen. Wir diskutieren die beiden Fälle parallel und verwenden als gemeinsame Bezeichnung für  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  das Symbol  $\mathbb{K}$ . Zu  $z \in \mathbb{C}$  bezeichnet  $\bar{z}$  die konjugiert-komplexe Zahl, bei  $z \in \mathbb{R}$  einfach die Zahl selbst.

**Definition 31.1.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf  $V$  ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$

für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ ,  $x_1, x_2, y \in V$  und

$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, y_2 \rangle$$

für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ ,  $x, y_1, y_2 \in V$ .

(2) Es ist

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

für alle  $v, w \in V$ .

(3) Es ist  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$  und  $\langle v, v \rangle = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  ist.

Die dabei auftretenden Eigenschaften heißen im reellen Fall *Bilinearität* (das ist nur eine andere Bezeichnung für multilinear, wenn der Definitionsbereich das Produkt von zwei Vektorräumen ist), *Symmetrie* und *positive Definitheit*. Im komplexen Fall spricht man von *sesquilinear* und von *hermitesch*. Diese auf den ersten Blick unschöne Abweichung muss gemacht werden, um die positive Definitheit zu erhalten, was wiederum die Voraussetzung für einen sinnvollen Abstandsbegriff im Komplexen ist.

**Beispiel 31.2.** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) = ((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

ein Skalarprodukt, das man das *Standardskalarprodukt* nennt. Einfache Rechnungen zeigen, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Beispielsweise ist im  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = -11.$$

**Definition 31.3.** Ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidischer Vektorraum*.

Zu einem Vektorraum  $V$  mit einem Skalarprodukt besitzt jeder Untervektorraum  $U \subseteq V$  selbst wieder durch Einschränkung ein Skalarprodukt. Insbesondere ist zu einem euklidischen Vektorraum jeder Untervektorraum  $U \subseteq V$  selbst wieder ein euklidischer Vektorraum. Jeder Untervektorraum  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  trägt somit das eingeschränkte Standardskalarprodukt. Da es stets eine Isomorphie  $U \cong \mathbb{R}^m$  gibt, kann man auch das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^m$  nach  $U$  übertragen, doch hängt dies von der gewählten Isomorphie ab und hat im Allgemeinen nichts mit dem eingeschränkten Standardskalarprodukt zu tun.

**Definition 31.4.** Das auf dem  $\mathbb{C}^n$  durch

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$$

gegebene Skalarprodukt heißt (*komplexes*) *Standardskalarprodukt*.

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 4 - 3i \\ 2 + 7i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 + 5i \\ 3 - 6i \end{pmatrix} \right\rangle &= (4 - 3i) \cdot \overline{-2 + 5i} + (2 + 7i) \cdot \overline{3 - 6i} \\ &= (4 - 3i) \cdot (-2 - 5i) + (2 + 7i) \cdot (3 + 6i) \\ &= -23 - 14i - 36 + 33i \\ &= -59 + 19i. \end{aligned}$$

**Bemerkung 31.5.** Wenn man einen komplexen Vektorraum  $V$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  als reellen Vektorraum auffasst, so ist durch den Realteil

$$\operatorname{Re} (\langle v, w \rangle)$$

ein reelles Skalarprodukt gegeben, siehe Aufgabe 31.3. Wegen

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \operatorname{Re} (\langle v, w \rangle) + i \operatorname{Im} (\langle v, w \rangle) \\ &= \operatorname{Re} (\langle v, w \rangle) - i \operatorname{Re} (i \langle v, w \rangle) \\ &= \operatorname{Re} (\langle v, w \rangle) - i \operatorname{Re} (\langle iv, w \rangle) \end{aligned}$$

kann man aus dem Realteil das ursprüngliche Skalarprodukt rekonstruieren.

**Beispiel 31.6.** Es sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes reelles Intervall mit  $a < b$  und sei

$$V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\},$$

versehen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation. Wir setzen

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

und erhalten damit ein Skalarprodukt auf  $V$ . Die Additivität folgt beispielsweise aus

$$\begin{aligned} \langle f_1 + f_2, g \rangle &= \int_a^b (f_1(t) + f_2(t)) \overline{g(t)} dt \\ &= \int_a^b f_1(t) \overline{g(t)} dt + \int_a^b f_2(t) \overline{g(t)} dt \\ &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle. \end{aligned}$$

Die positive Definitheit folgt so: Wenn  $f$  nicht die Nullfunktion ist, so sei  $s \in [a, b]$  ein Punkt mit  $f(s) \neq 0$ . Dann ist  $|f(s)| > 0$  und wegen der Stetigkeit von  $f$  gibt es dann auch eine Umgebung  $[s - \epsilon, s + \epsilon] \cap [a, b]$  der Länge  $\geq \epsilon$ , auf der überall

$$|f(t)| \geq c > 0$$

für ein gewisses  $c \in \mathbb{R}_+$  ist (man kann  $c = \frac{|f(s)|}{2}$  nehmen). Somit ist

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq \int_{\max(a, s-\epsilon)}^{\min(b, s+\epsilon)} |f(t)|^2 dt \geq \epsilon c^2 > 0$$

positiv.

## NORM

Mit einem Skalarprodukt kann man die Länge eines Vektors und damit auch den Abstand zwischen zwei Vektoren erklären.

**Definition 31.7.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann nennt man zu einem Vektor  $v \in V$  die reelle Zahl

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* von  $v$ .

Das Skalarprodukt  $\langle v, v \rangle$  ist stets reell und nicht negativ, und somit ist die Quadratwurzel eine eindeutig bestimmte reelle Zahl. Für einen komplexen Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist es gleichgültig, ob man die Norm direkt oder über den zugrunde liegenden reellen Vektorraum bestimmt, siehe Aufgabe 31.11.

**Satz 31.8.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\|-\|$ . Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Abschätzung, nämlich*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

für alle  $v, w \in V$ .

*Beweis.* Bei  $w = 0$  ist die Aussage richtig. Es sei also  $w \neq 0$  und damit auch  $\|w\| \neq 0$ . Damit hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w, v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle \\
&= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, v \rangle - \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^4} \langle w, w \rangle \\
&= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \overline{\langle v, w \rangle} - \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \\
&= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \\
&= \langle v, v \rangle - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2}.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit  $\|w\|^2$  und Wurzelziehen ergibt das Resultat.  $\square$

**Lemma 31.9.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann gelten für die zugehörige Norm folgende Eigenschaften.*

- (1) *Es ist  $\|v\| \geq 0$ .*
- (2) *Es ist  $\|v\| = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  ist.*
- (3) *Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $v \in V$  gilt*

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

- (4) *Für  $v, w \in V$  gilt*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

*Beweis.* Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts. Die Multiplikativität folgt aus

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung schreiben wir

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) \\
&\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 |\langle v, w \rangle|.
\end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 31.8 ist dies  $\leq (\|v\| + \|w\|)^2$ . Diese Abschätzung überträgt sich auf die Quadratwurzeln.  $\square$

Mit der folgenden Aussage, der *Polarisationsformel*, kann man ein Skalarprodukt aus der Norm rekonstruieren.

**Lemma 31.10.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\|-\|$ . Dann gilt bei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  die Beziehung*

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

und bei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 31.10. □

### NORMIERTE VEKTORRÄUME

Aufgrund von Lemma 31.9 ist die Norm zu einem Skalarprodukt eine Norm im Sinne der folgenden Definition, und ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist insbesondere ein normierter Vektorraum.

**Definition 31.11.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|-\|: V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

heißt *Norm*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

- (1) Es ist  $\|v\| \geq 0$  für alle  $v \in V$ .
- (2) Es ist  $\|v\| = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  ist.
- (3) Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $v \in V$  gilt

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

- (4) Für  $v, w \in V$  gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

**Definition 31.12.** Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum heißt *normierter Vektorraum*, wenn auf ihm eine Norm  $\|-\|$  definiert ist.

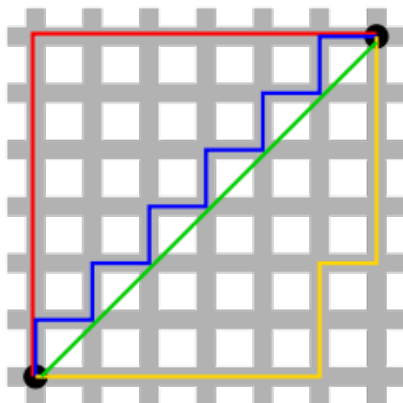
Auf einem euklidischen Vektorraum nennt man die über das Skalarprodukt gegebene Norm auch die *euklidische Norm*. Bei  $V = \mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt ist

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

**Beispiel 31.13.** Im  $\mathbb{K}^n$  ist durch

$$\|x\|_{\max} := \max(|x_i|, i = 1, \dots, n)$$

eine Norm definiert, die die *Maximumsnorm* heißt.



Die Summenmetrik heißt auch *Taxi-Metrik*. Die grüne Linie repräsentiert den euklidischen Abstand, die anderen repräsentieren den Summenabstand.

**Beispiel 31.14.** Im  $\mathbb{K}^n$  ist durch

$$\|x\|_{\text{sum}} := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

eine Norm definiert, die die *Summennorm* heißt.

Zu einem Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , in einem normierten Vektorraum  $V$  nennt man den Vektor  $\frac{v}{\|v\|}$  den zugehörigen *normierten Vektor*. Ein solcher normierter Vektor besitzt die Norm 1. Der Übergang zum normierten Vektor heißt *Normierung*.

## NORMIERTE RÄUME ALS METRISCHE RÄUME

**Definition 31.15.** Es sei  $M$  eine Menge. Eine Abbildung  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Metrik* (oder *Distanzfunktion*), wenn für alle  $x, y, z \in M$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$  ist (Definitheit),
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie), und
- (3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(M, d)$ , wobei  $M$  eine Menge und  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik ist.

**Definition 31.16.** Auf einem normierten Vektorraum  $V$  mit Norm  $\|\cdot\|$  definiert man die *zugehörige Metrik* durch

$$d(v, w) := \|v - w\|.$$

Dies ist in der Tat eine Metrik.

**Lemma 31.17.** *Ein normierter Vektorraum  $V$  ist durch die zugehörige Metrik ein metrischer Raum.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 31.17. □

Damit ist ein euklidischer Raum insbesondere ein *metrischer Raum*.

**Bemerkung 31.18.** Ein affiner Raum über einem normierten Vektorraum  $V$  wird zu einem metrischen Raum, indem man

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

setzt. Diese Metrik ist invariant unter Translationen.

**Beispiel 31.19.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Dann ist  $T$  ebenfalls ein metrischer Raum, wenn man

$$d_T(x, y) := d(x, y)$$

für alle  $x, y \in T$  setzt. Diese Metrik heißt die *induzierte Metrik*.

Daher ist insgesamt jede Teilmenge eines affinen Raumes über einem euklidischen oder normierten Vektorraum ein metrischer Raum.

## 31. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 31.1.** Zeige, dass das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$  in der Tat ein Skalarprodukt ist.

**Aufgabe 31.2.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf  $U$  ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

**Aufgabe 31.3.** Es sei  $V$  ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass der Realteil dieses Skalarproduktes ein Skalarprodukt auf dem zugrunde liegenden reellen Vektorraum ist.

**Aufgabe 31.4.** Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf dem  $\mathbb{R}^2$  mit den Werten  $\langle e_1, e_1 \rangle = 5$ ,  $\langle e_1, e_2 \rangle = -4$ ,  $\langle e_2, e_1 \rangle = 7$  und  $\langle e_2, e_2 \rangle = -3$ . Berechne  $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Handelt es sich um ein Skalarprodukt?

**Aufgabe 31.5.** Es seien

$$f, g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(x) = -x^2 + 1$  und  $g(x) = x^2 + x + 3$ . Berechne  $\langle f, g \rangle$  im Sinne von Beispiel 31.6.

**Aufgabe 31.6.** Es sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes reelles Intervall mit  $a < b$  und sei  $V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ . Zu  $n \in \mathbb{N}_+$  und  $f, g \in V$  sei

$$\langle f, g \rangle_n := \sum_{i=0}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) g\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$

Welche Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt  $\langle -, - \rangle_n$ , welche nicht? Welche Beziehung besteht zwischen  $\langle -, - \rangle_n$  und dem Skalarprodukt aus Beispiel 31.6?

**Aufgabe 31.7.** Es seien  $(V_1, \langle -, - \rangle_1)$  und  $(V_2, \langle -, - \rangle_2)$  reelle Vektorräume mit Skalarprodukten. Zeige, dass auf dem Produktraum  $V_1 \times V_2$  durch

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle_1 + \langle v_2, w_2 \rangle_2$$

ein Skalarprodukt definiert ist.

**Aufgabe 31.8.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\|-\|$ . Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

gilt.

**Aufgabe 31.9.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass in der Abschätzung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

von Cauchy-Schwarz genau dann die Gleichheit gilt, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.

**Aufgabe 31.10.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\|-\|$ .

(a) Zeige, dass bei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

gilt.

(b) Zeige, dass bei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2).$$

**Aufgabe 31.11.** Es sei  $V$  ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass die Norm zu diesem Skalarprodukt mit der Norm übereinstimmt, die man erhält, wenn man  $V$  als reellen Vektorraum mit dem zugehörigen reellen Skalarprodukt auffasst.

**Aufgabe 31.12.** Zeige, dass die Maximumsnorm auf dem  $\mathbb{K}^n$  eine Norm ist.

**Aufgabe 31.13.** Zeige, dass die Summennorm auf dem  $\mathbb{K}^n$  eine Norm ist.

**Aufgabe 31.14.** Bestimme für den Vektor

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

den zugehörigen normierten Vektor bezüglich der euklidischen Norm, der Maximumsnorm und der Summennorm.

**Aufgabe 31.15.** Es sei  $n \geq 2$ . Zeige, dass für die Norm  $\|x\| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  kein Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  mit der Eigenschaft  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  existiert.

**Aufgabe 31.16.** Es sei  $V$  ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{C}$ . Zeige, dass  $V$ , aufgefasst als reeller Vektorraum, mit der gleichen Norm ebenfalls ein normierter Vektorraum ist.

**Aufgabe 31.17.** Zeige, dass ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum durch

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

zu einem metrischen Raum wird.

**Aufgabe 31.18.** Es seien  $P = (\frac{3}{4}, -1)$  und  $Q = (2, \frac{1}{5})$  zwei Punkte im  $\mathbb{R}^2$ . Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in

- (a) der euklidischen Metrik,
- (b) der Summenmetrik,
- (c) der Maximumsmetrik.

(d) Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $x \in M$  und  $\epsilon > 0$  eine positive reelle Zahl. Man nennt

$$U(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

die *offene Kugel* um  $x$  mit Radius  $\epsilon$ .

**Aufgabe 31.19.** Es sei  $A$  eine nichtleere Menge,  $n \in \mathbb{N}_+$  und  $M = A^n$  das  $n$ -fache Produkt der Menge mit sich selbst.

(a) Zeige, dass auf  $M$  durch

$$d(x, y) = d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \#(\{i \mid x_i \neq y_i\})$$

eine Metrik definiert wird.

(b) Bestimme zu  $A = \{a, b, c\}$  und  $n = 4$  den Abstand  $d((a, a, b, c), (c, a, b, a))$ .

(c) Liste für  $A = \{a, b, c\}$  und  $n = 3$  alle Elemente aus der offenen Kugel  $U((a, a, b), 2)$  auf.

**Aufgabe 31.20.** Es sei  $M$  die Menge aller (Personen)-Bahnhöfe in Deutschland. Zu  $a, b \in M$  sei

$$d(a, b)$$

die (zeitlich) kürzeste fahrplanmäßige Verbindung von  $a$  nach  $b$ . Handelt es sich dabei um eine Metrik?

**Aufgabe 31.21.** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  das Achsenkreuz, also die Vereinigung von  $x$ -Achse und  $y$ -Achse.

(a) Definiere auf  $A$  den Abstand, der durch die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten  $P, Q \in A$  durch einen Weg auf  $A$  gegeben ist.

(b) Zeige, dass es sich dabei um eine Metrik handelt.

(c) Gibt es eine Norm auf dem  $\mathbb{R}^2$  derart, dass die Einschränkung der zugehörigen Metrik mit unserer Verbindungsmetrik übereinstimmt?

**Aufgabe 31.22.** Es sei  $V$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $E$  ein affiner Raum über  $V$ . Zeige, dass  $E$  durch

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$$

zu einem metrischen Raum wird.

Es sei  $T$  eine Menge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$\|f\| := \|f\|_T = \sup (|f(x)| \mid x \in T)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von  $f$ . Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder  $\infty$ .

**Aufgabe 31.23.** Es sei  $T$  eine Menge und

$$M = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf  $T$ . Zeige, dass  $M$  ein komplexer Vektorraum ist.

**Aufgabe 31.24.** Es sei  $T$  eine Menge und

$$M = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf  $T$ . Zeige, dass die Supremumsnorm auf  $M$  folgende Eigenschaften erfüllt.

- (1)  $\|f\| \geq 0$  für alle  $f \in M$ .
- (2)  $\|f\| = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  ist.
- (3) Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $f \in M$  gilt

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

- (4) Für  $g, f \in M$  gilt

$$\|g + f\| \leq \|g\| + \|f\|.$$

**Aufgabe 31.25.** Es sei  $T$  eine Menge und  $E$  ein euklidischer Vektorraum. Es sei

$$M = \{f : T \rightarrow E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von  $T$  nach  $E$ . Zeige, dass die Supremumsnorm auf  $M$  eine Norm ist.

**Aufgabe 31.26.** Es sei  $T$  eine Menge,  $E$  ein euklidischer Vektorraum und

$$M = \{f : T \rightarrow E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von  $T$  nach  $E$ . Zeige, dass eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $M$  genau dann gegen  $f \in M$  gleichmäßig konvergiert, wenn diese Folge im durch die Supremumsnorm gegebenen metrischen Raum  $M$  konvergiert.

AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 31.27.** (4 Punkte)

Es seien

$$f, g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(x) = 2x^3 - x + 3$  und  $g(x) = -5x^2 + 4x - 7$ . Berechne

$$\langle f, g \rangle, \|f\|, \|g\|$$

im Sinne von Beispiel 31.6.

**Aufgabe 31.28.** (2 Punkte)

Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Bestätige

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle.$$

**Aufgabe 31.29.** (4 Punkte)

Es sei  $V = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Zeige, dass  $V$  versehen mit der Abbildung

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (A, B) \longmapsto \text{Spur}(B^t A)$$

ein euklidischer Vektorraum ist.

**Aufgabe 31.30.** (5 Punkte)

Es seien  $n$  Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  in der Kreisscheibe  $B$  mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius 1, also in  $B = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, 0) \leq 1\}$ , gegeben. Zeige, dass es einen Punkt  $Q \in B$  mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^n d(P_i, Q) \geq n$$

gibt.

**Aufgabe 31.31.** (3 Punkte)

Es seien  $v, w \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| \leq 1$  und  $\|w\| = 1$ . Zeige, dass es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $\|v + aw\| = 1$  gibt.

## 32. VORLESUNG - ORTHOGONALITÄT

## ORTHOGONALITÄT

Mit einem Skalarprodukt kann man die Eigenschaft zweier Vektoren, aufeinander senkrecht zu stehen, ausdrücken.

**Definition 32.1.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Man nennt zwei Vektoren  $v, w \in V$  *orthogonal* zueinander (oder *senkrecht*), wenn

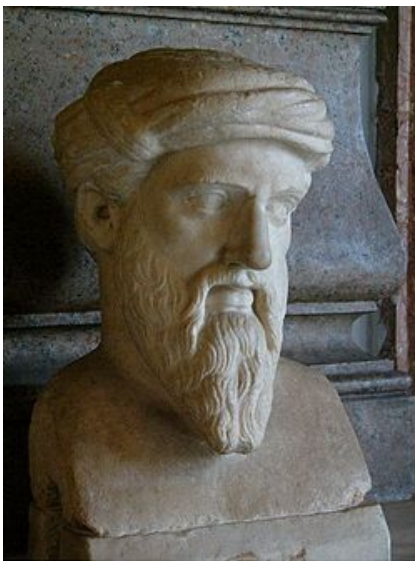
$$\langle v, w \rangle = 0$$

ist.

**Bemerkung 32.2.** Dass die über das Skalarprodukt definierte Orthogonalität der anschaulichen Orthogonalität entspricht, kann man sich folgendermaßen klar machen.<sup>1</sup> Zu orthogonalen Vektoren  $u, v \in V$  gilt, dass  $v$  zu den beiden Punkten  $u$  und  $-u$  den gleichen Abstand besitzt. Es ist ja

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \langle v - u, v - u \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle \\ &= \langle v + u, v + u \rangle \\ &= \|v + u\|^2. \end{aligned}$$

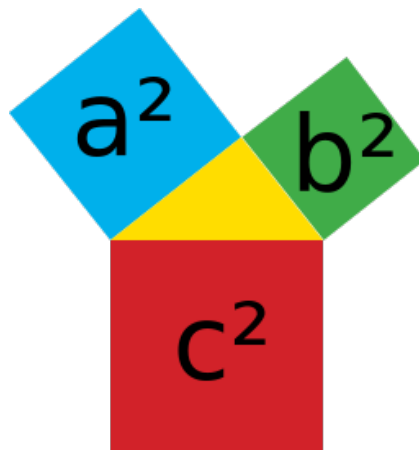
Die Umkehrung gilt ebenfalls, siehe Aufgabe 32.1.



Pythagoras von Samos lebte im sechsten vorchristlichen Jahrhundert. „Sein“ Satz war aber schon tausend Jahre früher in Babylon bekannt.

<sup>1</sup>Wenn man akzeptiert, dass die über das Skalarprodukt definierte Länge der anschaulichen Länge entspricht, was auf dem elementar-geometrischen Satz des Pythagoras beruht.

Wir rufen uns den Satz des Pythagoras in Erinnerung.



Der folgende Satz ist der *Satz des Pythagoras*, genauer die Skalarproduktversion davon, die trivial ist. Die Beziehung zum klassischen, elementargeometrischen Satz des Pythagoras ist diffizil, da es nicht selbstverständlich ist, dass unser über das Skalarprodukt eingeführter Orthogonalitätsbegriff und unser ebenso eingeführter Längenbegriff mit den entsprechenden intuitiven Begriffen übereinstimmen. Dass unser Normbegriff der wahre Längenbegriff ist, beruht wiederum auf dem Satz des Pythagoras in einem cartesischen Koordinatensystem, was den klassischen Satz voraussetzt.

**Satz 32.3.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Es seien  $u, v \in V$  Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen. Dann ist*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

*Beweis.* Es ist

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

□

**Definition 32.4.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von  $U$ .

Das orthogonale Komplement zu einem Untervektorraum ist selbst wieder ein Untervektorraum, siehe Aufgabe 32.8. Wenn ein Erzeugendensystem von  $U$  gegeben ist, so gehört ein Vektor  $v \in V$  bereits dann zum orthogonalen Komplement von  $U$ , wenn er auf allen Vektoren des Erzeugendensystems senkrecht steht, siehe Aufgabe 32.9.

**Beispiel 32.5.** Es sei  $V = \mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt versehen. Zum eindimensionalen Untervektorraum  $\mathbb{R}e_i$  zum Standardvektor  $e_i$  besteht

das orthogonale Komplement aus allen Vektoren  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ 0 \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , deren  $i$ -ter Eintrag

0 ist. Zum eindimensionalen Untervektorraum  $\mathbb{R}v$  zu einem Vektor

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

kann man das orthogonale Komplement bestimmen, indem man den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

bestimmt. Der Orthogonalraum

$$U = (\mathbb{R}v)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$$

besitzt die Dimension  $n - 1$ , es handelt sich also um eine sogenannte Hyperebene. Man nennt dann  $v$  einen *Normalenvektor* für die Hyperebene  $U$ .

Zu einem Untervektorraum  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , der durch eine Basis (oder ein Erzeugendensystem)  $v_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , gegeben ist, bestimmt man das

orthogonale Komplement als Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

wobei  $A = (a_{ij})$  die aus den  $v_i$  (als Zeilen) gebildete Matrix ist.

#### ORTHONORMALBASEN

**Definition 32.6.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Eine Basis  $v_i$ ,  $i \in I$ , von  $V$  heißt *Orthogonalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

**Definition 32.7.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Eine Basis  $v_i, i \in I$ , von  $V$  heißt *Orthonormalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \in I \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

Die Elemente in einer Orthonormalbasis haben alle die Norm 1 und sie stehen senkrecht aufeinander. Eine Orthonormalbasis ist also eine Orthogonalbasis, bei der zusätzlich die Normbedingung

$$\|v_i\| = \sqrt{\langle v_i, v_i \rangle} = 1$$

erfüllt ist. Man kann problemlos von einer Orthogonalbasis zu einer Orthonormalbasis übergehen, indem man jedes  $v_i$  durch die Normierung  $\frac{v_i}{\|v_i\|}$  ersetzt (da  $v_i$  Teil einer Basis ist, ist die Norm von 0 verschieden). Eine Familie von Vektoren, die jeweils die Norm 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, aber nicht unbedingt eine Basis bilden, nennt man ein *Orthonormalsystem*.

**Lemma 32.8.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei  $u_i, i \in I$ , eine Orthonormalbasis von  $V$ . Dann ergeben sich die Koeffizienten eines Vektors  $v$  bezüglich dieser Basis durch*

$$v = \sum_{i \in I} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

*Beweis.* Da eine Basis vorliegt, gibt es eine eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{j \in I} a_j u_j$$

(wobei alle  $a_j$  bis auf endlich viele gleich 0 sind). Die Behauptung ergibt sich somit aus

$$\langle v, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j \in I} a_j u_j, u_i \right\rangle = \sum_{j \in I} a_j \langle u_j, u_i \rangle = a_i.$$

□

Wir werden Orthonormalbasen hauptsächlich im endlichdimensionalen Fall betrachten. Im  $\mathbb{R}^n$  ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis. In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist eine Orthonormalbasis von der Form  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ , wobei jeweils  $a^2 + b^2 = 1$  erfüllt sein muss. Beispielsweise ist  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  eine Orthonormalbasis. Das folgende *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren* erlaubt es, ausgehend von einer Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes eine Orthonormalbasis zu konstruieren, die die gleiche Fahne von Untervektorräumen festlegt.

**Satz 32.9.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei  $v_1, v_2, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Dann gibt es eine Orthonormalbasis  $u_1, u_2, \dots, u_n$  von  $V$  mit<sup>2</sup>*

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_i \rangle$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* Die Aussage wird durch Induktion über  $i$  bewiesen, d.h. es wird sukzessive eine Familie von orthonormalen Vektoren konstruiert, die jeweils den gleichen Untervektorraum aufspannen. Für  $i = 1$  muss man lediglich  $v_1$  normieren, also durch  $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$  ersetzen. Es sei die Aussage für  $i$  schon bewiesen und sei eine Familie von orthonormalen Vektoren  $u_1, \dots, u_i$  mit  $\langle u_1, \dots, u_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$  bereits konstruiert. Wir setzen

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i.$$

Dieser Vektor steht wegen

$$\begin{aligned} \langle w_{i+1}, u_j \rangle &= \langle v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i, u_j \rangle \\ &= \langle v_{i+1}, u_j \rangle - \sum_{k \leq i, k \neq j} \langle v_{i+1}, u_k \rangle \langle u_k, u_j \rangle - \langle v_{i+1}, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle \\ &= \langle v_{i+1}, u_j \rangle - \langle v_{i+1}, u_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

senkrecht auf allen  $u_1, \dots, u_i$  und offenbar ist

$$\langle u_1, \dots, u_i, w_{i+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_i, v_{i+1} \rangle.$$

Durch Normieren von  $w_{i+1}$  erhält man  $u_{i+1}$ . □

**Beispiel 32.10.** Es sei  $V$  der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 2x + 3y - z.$$

Als Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  trägt  $V$  das induzierte Skalarprodukt. Wir möchten eine Orthonormalbasis von  $V$  bestimmen. Dazu betrachten wir die Basis bestehend aus den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es ist  $\|v_1\| = \sqrt{5}$  und somit ist

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>Hier bezeichnet  $\langle - \rangle$  den von den Vektoren erzeugten Untervektorraum, nicht das Skalarprodukt.

der zugehörige normierte Vektor. Gemäß dem<sup>3</sup> Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren setzen wir

$$\begin{aligned}
 w_2 &= v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Es ist

$$\|w_2\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{36}{25} + 1 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{70}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

und daher ist

$$u_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

der zweite Vektor der Orthonormalbasis.

**Korollar 32.11.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gibt es eine Orthonormalbasis in  $V$ .*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 32.9. □

Man kann auch stets in einem endlichdimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt ein vorgegebenes Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis ergänzen, siehe Aufgabe 32.24.

**Korollar 32.12.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann ist*

$$V = U \oplus U^\perp,$$

*d.h.  $V$  ist die direkte Summe aus  $U$  und seinem orthogonalen Komplement.*

---

<sup>3</sup>Häufig ist es numerisch geschickter, zuerst nur zu orthogonalisieren und die Normierung erst zum Schluss durchzuführen, siehe Beispiel Anhang 1.1.

*Beweis.* Aus  $u \in U \cap U^\perp$  folgt direkt

$$\langle u, u \rangle = 0$$

und daher  $u = 0$ . Somit ist die Summe direkt. Es sei  $u_1, \dots, u_k$  eine Orthonormalbasis von  $U$ , die wir zu einer Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_n$  von  $V$  ergänzen. Dann ist

$$U^\perp = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$$

und somit ist  $V$  die Summe aus den Unterräumen.  $\square$

Zur folgenden Aussage vergleiche man auch Lemma 15.6 und Aufgabe 32.28.

**Korollar 32.13.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu Untervektorräumen  $U \subseteq U' \subseteq V$  ist*

$$U^\perp \supseteq U'^\perp.$$

(2) *Es ist  $0^\perp = V$  und  $V^\perp = 0$ .*

(3) *Es sei  $V$  endlichdimensional. Dann ist*

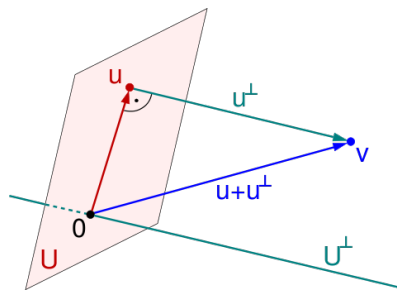
$$(U^\perp)^\perp = U.$$

(4) *Es sei  $V$  endlichdimensional. Dann ist*

$$\dim_K(U^\perp) = \dim_K(V) - \dim_K(U).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 32.26.  $\square$

## ORTHOGONALE PROJEKTIONEN



Zu einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt und einem Untervektorraum  $U \subseteq V$  gibt es ein orthogonales Komplement  $U^\perp$  und der Raum hat nach Korollar 32.12 die direkte Summenzerlegung

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Die Projektion

$$p_U: V \longrightarrow U$$

längs  $U^\perp$  heißt die *orthogonale Projektion* auf  $U$ . Diese hängt allein von  $U$  ab, da ja das orthogonale Komplement eindeutig bestimmt ist. Häufig bezeichnet man auch die Abbildung  $V \rightarrow U \rightarrow V$  als orthogonale Projektion auf  $U$ . Bei einer orthogonalen Projektion wird ein Punkt auf seinen *Lotfußpunkt* auf  $U$  abgebildet.

**Lemma 32.14.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit einer Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_m$  von  $U$ . Dann ist die orthogonale Projektion auf  $U$  durch*

$$p_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle u_i$$

gegeben.

*Beweis.* Wir ergänzen die Basis zu einer Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_n$  von  $V$ . Das orthogonale Komplement zu  $U$  ist

$$U^\perp = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle.$$

Nach Lemma 32.8 ist

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i = \left( \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle u_i \right) + \left( \sum_{i=m+1}^n \langle v, u_i \rangle u_i \right).$$

Somit ist  $\sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle u_i$  die Projektion auf  $U$  längs  $U^\perp$ .  $\square$

## 32. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

Die folgenden drei Aufgaben begründen, dass die über das Skalarprodukt eingeführte Orthogonalität mit der elementargeometrischen Orthogonalität übereinstimmt.

**Aufgabe 32.1.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass für  $u, v \in V$  die Gleichheit  $\|v + u\| = \|v - u\|$  genau dann gilt, wenn  $\langle v, u \rangle = 0$  ist.

**Aufgabe 32.2.** Begründe elementargeometrisch, dass im  $\mathbb{R}^2$  die Vektoren  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  senkrecht aufeinander stehen.

**Aufgabe 32.3.** Es sei

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ein Vektor.

(a) Begründe elementargeometrisch, dass jeder Vektor der Form

$$v_{ij} = -a_j e_i + a_i e_j$$

zu  $i \neq j$  senkrecht auf  $v$  steht.

(b) Zeige, dass jeder Vektor

$$w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$$

eine Linearkombination der  $v_{ij}$  ist (und damit senkrecht auf  $v$  steht).

(c) Begründe, dass ein Vektor  $w$ , der im elementargeometrischen Sinn senkrecht auf  $v$  steht, die Bedingung  $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$  erfüllt.

**Aufgabe 32.4.** Bestimme, welche der folgenden Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  zueinander orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes sind.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 32.5.** Bestimme, welche der folgenden Vektoren im  $\mathbb{C}^2$  zueinander orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes sind.

$$\begin{pmatrix} 6 - 3i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 - 7i \\ -9 - 5i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i \\ 2 + i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 - 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 + 2i \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 32.6.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Es sei  $v \in V$  ein fixierter Vektor und  $a \in \mathbb{K}$ . Zeige, dass

$$\{u \in V \mid \langle u, v \rangle = a\}$$

ein affiner Unterraum von  $V$  ist.

**Aufgabe 32.7.** Diskutiere den Satz des Pythagoras im Sinne von Satz 32.3 im Vergleich zu der elementargeometrischen Version.

**Aufgabe 32.8.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von  $V$  ist.

**Aufgabe 32.9.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Es sei  $u_i, i \in I$ , ein Erzeugendensystem von  $U$ . Zeige, dass ein Vektor  $v \in V$  genau dann zum orthogonalen Komplement  $U^\perp$  gehört, wenn

$$\langle v, u_i \rangle = 0$$

für alle  $i \in I$  ist.

**Aufgabe 32.10.** Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von  $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$  erzeugten Untervektorraum im  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 32.11.** Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von  $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  erzeugten Untervektorraum im  $\mathbb{R}^4$ .

**Aufgabe 32.12.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $v_i, i \in I$ , eine Orthogonalbasis von  $V$ . Zu jeder Teilmenge  $J \subseteq I$  sei der von  $v_i, i \in J$ , erzeugte Untervektorraum mit  $U_J$  bezeichnet. Zeige, dass das orthogonale Komplement von  $U_J$  gleich  $U_{I \setminus J}$  ist.

**Aufgabe 32.13.** Betrachte eine Ecke in einem (rechtwinkligen) Zimmer. Bilden die drei Diagonalvektoren in den beiden anliegenden Wänden und dem Boden der Länge 1 eine Orthonormalbasis?

**Aufgabe 32.14.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Zeige, dass

$$u_1, iu_1, u_2, iu_2, \dots, u_n, iu_n$$

eine Orthonormalbasis des reellen Vektorraums  $V$  bezüglich des zugehörigen reellen Skalarprodukts ist.

**Aufgabe 32.15.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $u_i, i \in I$ , eine Orthonormalbasis von  $V$ . Zeige, dass für Vektoren  $v = \sum_{i \in I} a_i u_i$  und  $w = \sum_{i \in I} b_i u_i$  die Gleichheit

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} a_i b_i$$

gilt.

Die folgende Aufgabe ist die Grundlage der sogenannten *Fourier-Analysis*, bei der es darum geht, Schwingungen als unendliche Summe von trigonometrischen (harmonischen) Schwingungen darzustellen.

**Aufgabe 32.16.** Zeige, dass die Funktionen

$$f_m: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$f_m(x) := e^{2\pi i m x}$$

zu  $m \in \mathbb{Z}$  im Raum der stetigen Funktionen von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{C}$  ein Orthonormalsystem bezüglich des durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f \bar{g} dx$$

gegebenen Skalarproduktes bilden. Man verwende dabei Grundtatsachen über die komplexe Exponentialfunktion.

**Aufgabe 32.17.** Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des  $\mathbb{R}^3$  an.

**Aufgabe 32.18.** Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

des  $\mathbb{R}^3$  an.

**Aufgabe 32.19.** Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des  $\mathbb{R}^3$ , versehen mit dem Standardskalarprodukt, an.

**Aufgabe 32.20.** Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 4 - i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2 - i \end{pmatrix}$$

des  $\mathbb{C}^2$  an.

**Aufgabe 32.21.** Erstelle eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$ , die ein Vielfaches von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  enthält.

**Aufgabe 32.22.** Der  $\mathbb{R}^3$  sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für  $U$ .

**Aufgabe 32.23.** Der  $\mathbb{R}^4$  sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^4$  der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, w) \longmapsto 4x - 3y + 2z - 5w,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für  $U$ .

**Aufgabe 32.24.** Formuliere und beweise den „orthonormalen Basisergänzungssatz“.

**Aufgabe 32.25.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und seien  $U_1, U_2 \subseteq V$  Untervektorräume. Zeige, dass für die orthogonalen Komplemente die Gleichheit

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

gilt.

**Aufgabe 32.26.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zu Untervektorräumen  $U \subseteq U' \subseteq V$  ist

$$U^\perp \supseteq U'^\perp.$$

(2) Es ist  $0^\perp = V$  und  $V^\perp = 0$ .

(3) Es sei  $V$  endlichdimensional. Dann ist

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

(4) Es sei  $V$  endlichdimensional. Dann ist

$$\dim_K(U^\perp) = \dim_K(V) - \dim_K(U).$$

**Aufgabe 32.27.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass durch

$$V \longrightarrow V^*, v \longmapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle),$$

eine Isomorphie zwischen  $V$  und seinem Dualraum  $V^*$  gestiftet wird.

**Aufgabe 32.28.** Beweise Korollar 32.13 mit Hilfe von Aufgabe 32.27 und Lemma 15.6.

**Aufgabe 32.29.** Bestimme den Wert des Vektors  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  unter der orthogonalen Projektion auf die von  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$  erzeugte Gerade.

**Aufgabe 32.30.** Bestimme den Wert des Vektors  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  unter der orthogonalen Projektion auf den von  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$  erzeugten Untervektorraum.

**Aufgabe 32.31.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und es seien

$$U \subseteq W \subseteq V$$

Untervektorräume. Es bezeichne  $p_U^V$  die orthogonale Projektion von  $V$  auf  $U$ . Zeige

$$p_U^V = p_U^W \circ p_W^V.$$

AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 32.32.** (3 Punkte)

Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von  $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$  erzeugten Untervektorraum im  $\mathbb{R}^4$ .

**Aufgabe 32.33.** (3 (1+1+1) Punkte)

Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  seien mit dem Standardskalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  versehen.

- (a) Bestimme zu dem von  $4 + 7i$  erzeugten komplexen Untervektorraum von  $\mathbb{C}$  das orthogonale Komplement bezüglich  $\langle -, - \rangle$ .
- (b) Bestimme zu dem von  $4 + 7i$  erzeugten komplexen Untervektorraum von  $\mathbb{C}$  das orthogonale Komplement bezüglich des Realteils zu  $\langle -, - \rangle$  (also dem zugehörigen reellen Skalarprodukt).
- (c) Bestimme zu dem von  $4 + 7i$  erzeugten reellen Untervektorraum von  $\mathbb{C}$  das orthogonale Komplement bezüglich des Realteils zu  $\langle -, - \rangle$ .

**Aufgabe 32.34.** (5 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die linear unabhängigen polynomialen Funktionen

$$1, x, x^2, x^3 \in V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit dem in Beispiel 31.6 beschriebenen Skalarprodukt an.

**Aufgabe 32.35.** (2 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 5 - 2i \\ 3 - 3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 - i \\ -2 + 4i \end{pmatrix}$$

des  $\mathbb{C}^2$  an.

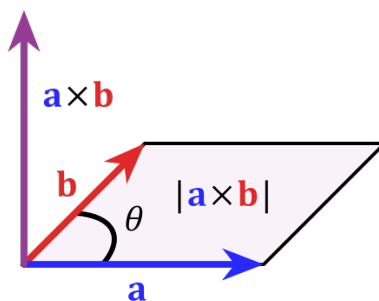
**Aufgabe 32.36.** (4 Punkte)

Bestimme den Wert des Vektors  $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  unter der orthogonalen Projektion auf den von  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  erzeugten Untervektorraum.

### 33. VORLESUNG - ISOMETRIEN I

#### DAS KREUZPRODUKT

Eine Besonderheit im  $\mathbb{R}^3$  ist das sogenannte *Kreuzprodukt*, das zu zwei gegebenen Vektoren einen dazu senkrechten Vektor berechnet.



**Definition 33.1.** Zu einem Körper  $K$  ist auf dem  $K^3$  durch

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

eine Verknüpfung erklärt, die das *Kreuzprodukt* heißt.

Statt Kreuzprodukt sagt man auch *Vektorprodukt*. Als Merkregel kann man

$$x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

verwenden, wobei  $e_1, e_2, e_3$  die Standardvektoren sind und formal nach der ersten Spalte zu entwickeln ist. So wie es dasteht, ist das Kreuzprodukt unter Bezug auf die Standardbasis definiert.

**Beispiel 33.2.** Das Kreuzprodukt der beiden Vektoren  $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

ist

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \\ -5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 - 8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Lemma 33.3.** Das Kreuzprodukt auf dem  $K^3$  erfüllt die folgenden Eigenschaften (dabei sind  $x, y, z \in K^3$  und  $a, b \in K$ ).

(1) Es ist

$$x \times y = -(y \times x).$$

(2) Es ist

$$(ax + by) \times z = a(x \times z) + b(y \times z)$$

und

$$z \times (ax + by) = a(z \times x) + b(z \times y).$$

(3) Es ist

$$x \times y = 0$$

genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

(4) Es ist

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$

(5) Es ist

$$\langle x \times y, z \rangle = \det(x, y, z),$$

wobei hier mit  $\langle -, - \rangle$  die formale Auswertung<sup>4</sup> im Sinne des Standardskalarproduktes gemeint ist.

(6) Es ist

$$\langle x, x \times y \rangle = 0 = \langle y, x \times y \rangle,$$

wobei hier mit  $\langle -, - \rangle$  die formale Auswertung im Sinne des Standardskalarproduktes gemeint ist.

*Beweis.* (1) ist klar von der Definition her.

(2). Es ist

$$\begin{aligned} \left( a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ ax_3 + by_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ax_2 + by_2)z_3 - (ax_3 + by_3)z_2 \\ -(ax_1 + by_1)z_3 + (ax_3 + by_3)z_1 \\ (ax_1 + by_1)z_2 - (ax_2 + by_2)z_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Diese Formulierung ist gewählt, da es ein Skalarprodukt im Sinne der Definition nur über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  gibt. Die Formel, die im reellen Fall das Standardskalarprodukt festlegt, gibt es aber über jedem Körper.

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ax_2z_3 - ax_3z_2 \\ -ax_1z_3 + ax_3z_1 \\ ax_1z_2 - ax_2z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} by_2z_3 - by_3z_2 \\ -by_1z_3 + by_1z_3 \\ by_1z_2 - by_2z_1 \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} x_2z_3 - x_3z_2 \\ -x_1z_3 + x_3z_1 \\ x_1z_2 - x_2z_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ -y_1z_3 + y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} \\
&= a(x \times z) + b(y \times z).
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt daraus und aus (1).

(3). Wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind, so kann man  $x = cy$  (oder umgekehrt) schreiben. Dann ist

$$\begin{pmatrix} cy_1 \\ cy_2 \\ cy_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy_2y_3 - cy_2y_3 \\ -cy_1y_3 + cy_3y_1 \\ cy_1y_2 - cy_2y_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Wenn umgekehrt das Kreuzprodukt 0 ist, so sind alle Einträge des Vektors  $\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$  gleich 0. Es sei beispielsweise  $y_1 \neq 0$ . Wenn  $x_1 = 0$ , so folgt direkt

$$x_2 = x_3 = 0$$

und  $x$  wäre der Nullvektor. Es sei also  $x_1 \neq 0$ . Dann ist  $y_2 = \frac{y_1}{x_1}x_2$  und  $y_3 = \frac{y_1}{x_1}x_3$  und somit ist

$$y = \frac{y_1}{x_1}x.$$

(4). Siehe Aufgabe 33.6.

(5). Es ist

$$\begin{aligned}
\langle x \times y, z \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= z_1x_2y_3 - z_1x_3y_2 - z_2x_1y_3 + z_2x_3y_1 + z_3x_1y_2 - z_3x_2y_1,
\end{aligned}$$

was mit der Determinante wegen der Regel von Sarrus übereinstimmt.

(6) folgt aus (5). □

Der uns in (5) begegnende Ausdruck  $\langle x \times y, z \rangle$ , also die Determinante der drei Vektoren, wenn man diese als Spaltenvektoren auffasst, heißt auch *Spatprodukt*.

**Lemma 33.4.** *Es sei  $u_1, u_2, u_3$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$  mit<sup>5</sup>*

$$\det(u_1, u_2, u_3) = 1.$$

<sup>5</sup>Eine solche Basis nennt man auch eine die Standardorientierung repräsentierende Orthonormalbasis. Orientierungen werden wir später besprechen.

Dann kann man das Kreuzprodukt  $x \times y$  mit den Koordinaten von  $x$  und  $y$  zu dieser Basis (und den Formeln aus Definition 33.1) ausrechnen.

*Beweis.* Es sei

$$x = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$$

und

$$y = d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3.$$

Nach Lemma 33.3 (2) ist

$$x \times y = (c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) \times (d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} c_i d_j (u_i \times u_j).$$

Nach Lemma 33.3 (3) ist

$$u_i \times u_i = 0$$

und nach Lemma 33.3 (1) ist

$$u_i \times u_j = -u_j \times u_i.$$

Nach Lemma 33.3 (6) steht  $u_1 \times u_2$  senkrecht auf  $u_1$  und  $u_2$ , daher ist

$$u_1 \times u_2 = \lambda u_3$$

mit einem  $\lambda \in \mathbb{R}$ , da diese Orthogonalitätsbedingung eine Gerade definiert. Wegen Lemma 33.3 (5) und der Voraussetzung ergibt sich

$$\lambda = \langle \lambda u_3, u_3 \rangle = \langle u_1 \times u_2, u_3 \rangle = \det(u_1, u_2, u_3) = 1,$$

also ist

$$u_1 \times u_2 = u_3.$$

Ebenso ergibt sich, unter Verwendung von Lemma 17.2 (3),  $u_1 \times u_3 = -u_2$  und  $u_2 \times u_3 = u_1$ . Somit ist insgesamt

$$\begin{aligned} x \times y &= \sum_{1 \leq i, j \leq 3} c_i d_j (u_i \times u_j) \\ &= \sum_{i < j} (c_i d_j - c_j d_i) (u_i \times u_j) \\ &= (c_1 d_2 - c_2 d_1) u_3 - (c_1 d_3 - c_3 d_1) u_2 + (c_2 d_3 - c_3 d_2) u_1 \end{aligned}$$

und dies ist die Behauptung.  $\square$

## ISOMETRIEN

**Definition 33.5.** Es seien  $V, W$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$  mit Skalarprodukten und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  eine *Isometrie*, wenn

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle  $v, w \in V$  gilt.

Eine Isometrie ist stets injektiv. Bei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  spricht man auch von *unitären Abbildungen*. In Abgrenzung zu affinen Isometrien (die wir später behandeln werden), spricht man auch von *linearen Isometrien*.

**Lemma 33.6.** *Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$ , die mit einem Skalarprodukt versehen seien, und sei  $\varphi: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  $\varphi$  ist eine Isometrie.
- (2) Für alle  $u, v \in V$  ist  $d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v)$ .
- (3) Für alle  $v \in V$  ist  $\|\varphi(v)\| = \|v\|$ .
- (4) Für alle  $v \in V$  mit  $\|v\| = 1$  ist auch  $\|\varphi(v)\| = 1$ .

*Beweis.* Die Richtungen (1)  $\Rightarrow$  (2), (2)  $\Rightarrow$  (3) und (3)  $\Rightarrow$  (4) sind Einschränkungen. (4)  $\Rightarrow$  (3). Für den Nullvektor ist die Aussage (3) klar, sei also  $v \neq 0$ . Dann besitzt  $\frac{v}{\|v\|}$  die Norm 1 und wegen

$$\varphi(v) = \varphi\left(\|v\| \frac{v}{\|v\|}\right) = \|v\| \varphi\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$$

ist

$$\|\varphi(v)\| = \|v\|.$$

(3)  $\Rightarrow$  (1) folgt aus Lemma 31.10. □

Eine Isometrie ist also einfach eine *abstandserhaltende* (lineare) Abbildung. Die Menge der Vektoren mit Norm 1 in einem euklidischen Vektorraum nennt man auch die *Sphäre*. Eine Isometrie lässt sich also dadurch charakterisieren, dass unter ihr die Sphäre in die Sphäre abgebildet wird.

**Lemma 33.7.** *Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1)  $\varphi$  ist eine Isometrie.
- (2) Für jede Orthonormalbasis  $u_i, i = 1, \dots, n$ , von  $V$  ist  $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$ , Teil einer Orthonormalbasis von  $W$ .
- (3) Es gibt eine Orthonormalbasis  $u_i, i = 1, \dots, n$ , von  $V$  derart, dass  $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$ , Teil einer Orthonormalbasis von  $W$  ist.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 33.16. □

**Satz 33.8.** *Zu jedem euklidischen Vektorraum  $V$  gibt es eine bijektive Isometrie*

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow V,$$

*wobei  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt versehen sei.*

*Beweis.* Es sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

die durch

$$\varphi(e_i) = u_i$$

festgelegte lineare Abbildung. Nach Lemma 33.7 (3) ist dies eine Isometrie.  $\square$

### ISOMETRIEN AUF EINEM EUKLIDISCHEN VEKTORRAUM

Wir besprechen nun Isometrien von einem euklidischen Vektorraum in sich selbst. Diese sind stets bijektiv. Bezüglich einer jeden Orthonormalbasis von  $V$  werden sie folgendermaßen beschrieben.

**Lemma 33.9.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung und  $M$  die beschreibende Matrix zu  $\varphi$  bezüglich der gegebenen Basis. Dann ist  $\varphi$  genau dann eine Isometrie, wenn*

$$M^{\text{tr}}M = E_n$$

*ist.*

*Beweis.* Es sei zunächst  $\varphi$  eine Isometrie. Dann ist  $v_i = \varphi(u_i)$  eine Orthonormalbasis nach Lemma 33.7, und deren Koordinaten bezüglich  $u_i$  bilden die Spalten der beschreibenden Matrix  $M$ . Daher ist unter Verwendung von Aufgabe 32.15

$$v_i^{\text{tr}}v_j = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Als Matrixgleichung bedeutet dies

$$M^{\text{tr}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Argument rückwärts gelesen ergibt die Umkehrung.  $\square$

Die Menge der Isometrien auf einem euklidischen Vektorraum bildet eine Gruppe, und zwar eine Untergruppe der Gruppe aller bijektiven linearen Abbildungen. Wir erinnern kurz an die allgemeine und die spezielle lineare Gruppe.

Zu einem Körper  $K$  und  $n \in \mathbb{N}_+$  nennt man die Menge aller invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in  $K$  die *allgemeine lineare Gruppe* über  $K$ . Sie wird mit  $\text{GL}_n(K)$  bezeichnet.

Zu einem Körper  $K$  und  $n \in \mathbb{N}_+$  nennt man die Menge aller invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen mit

$$\det M = 1$$

die *spezielle lineare Gruppe* über  $K$ . Sie wird mit  $\mathrm{SL}_n(K)$  bezeichnet.

**Definition 33.10.** Es sei  $K$  ein Körper und  $E_n$  die Einheitsmatrix der Länge  $n$ . Eine Matrix  $M \in \mathrm{GL}_n(K)$  mit

$$M^{\mathrm{tr}} M = E_n$$

heißt *orthogonale Matrix*. Die Menge aller orthogonalen Matrizen heißt *orthogonale Gruppe*, sie wird mit

$$\mathrm{O}_n(K) = \{M \in \mathrm{GL}_n(K) \mid M^{\mathrm{tr}} M = E_n\}$$

bezeichnet.

**Definition 33.11.** Eine Matrix  $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  mit

$$\overline{M}^{\mathrm{tr}} M = E_n$$

heißt *unitäre Matrix*. Die Menge aller unitären Matrizen heißt *unitäre Gruppe*, sie wird mit

$$\mathrm{U}_n = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{M}^{\mathrm{tr}} M = E_n\}$$

bezeichnet.

## EIGENWERTE BEI ISOMETRIEN

**Satz 33.12.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Isometrie. Dann besitzt jeder Eigenwert von  $\varphi$  den Betrag 1. Bei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sind nur die Eigenwerte 1 und  $-1$  möglich.*

*Beweis.* Es sei  $\varphi(v) = \lambda v$  mit  $v \neq 0$ , d.h.  $v$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Wegen der Isometrieeigenschaft gilt

$$\|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

Wegen  $\|v\| \neq 0$  folgt daraus  $|\lambda| = 1$ . Im Reellen bedeutet dies  $\lambda = \pm 1$ . □

Im Allgemeinen muss eine Isometrie keine Eigenwerte besitzen, bei ungerader Dimension allerdings schon, siehe dazu die nächste Vorlesung.

**Lemma 33.13.** *Die Determinante einer linearen Isometrie*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*auf einem euklidischen Vektorraum  $V$  ist 1 oder  $-1$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 33.9 ist

$$M^{\text{tr}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit folgt die Aussage aus dem Determinantenmultiplikationssatz und aus Satz 17.5.  $\square$

### EIGENTLICHE ISOMETRIEN

**Definition 33.14.** Eine Isometrie auf einem euklidischen Vektorraum heißt *eigentlich*, wenn ihre Determinante gleich 1 ist.

Bei nichteigentlichen Isometrien, also solchen mit Determinante  $-1$ , spricht man von *uneigentlichen Isometrien*.

**Definition 33.15.** Es sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}_+$ . Eine orthogonale  $n \times n$ -Matrix  $M$  mit

$$\det M = 1$$

heißt *spezielle orthogonale Matrix*. Die Menge aller speziellen orthogonalen Matrizen heißt *spezielle orthogonale Gruppe*, sie wird mit  $\text{SO}_n(K)$  bezeichnet.

**Definition 33.16.** Eine unitäre  $n \times n$ -Matrix  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  mit

$$\det M = 1$$

heißt *spezielle unitäre Matrix*. Die Menge aller speziellen unitären Matrizen heißt *spezielle unitäre Gruppe*, sie wird mit  $\text{SU}_n$  bezeichnet.

## 33. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 33.1.** Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 33.2.** Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 - 7i \\ 3 + 5i \\ -1 - 2i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 + 4i \\ -2 - 8i \\ 1 - 9i \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{C}^3$ .

**Aufgabe 33.3.** Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im  $K^3$ , wobei  $K$  den Körper mit fünf Elementen bezeichnet.

**Aufgabe 33.4.** Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im  $K^3$ , wobei  $K$  den Körper mit sieben Elementen bezeichnet.

**Aufgabe 33.5.** Es sei  $K$  ein Körper. Zeige, dass das Kreuzprodukt auf dem  $K^3$  bilinear und alternierend ist.

**Aufgabe 33.6.** Zeige, dass für das Kreuzprodukt für Vektoren  $x, y, z \in K^3$  die Beziehung

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0$$

gilt.

**Aufgabe 33.7.** Es sei  $u_1, u_2, u_3$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Zeige  $u_1 \times u_2 = \pm u_3$ .

**Aufgabe 33.8.** Zeige, dass über einem beliebigen Körper  $K$  zu linear unabhängigen Vektoren  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  und  $v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$  die Familie bestehend aus

$u, v$  und dem Kreuzprodukt  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$  keine Basis des  $K^3$  bilden muss.

**Aufgabe 33.9.** Bestimme die Isometrien von  $\mathbb{R}$ .

**Aufgabe 33.10.** Welche Isometrien des  $\mathbb{R}^2$  kennen Sie aus der Schule?

**Aufgabe 33.11.** Es seien  $U, V$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Skalarprodukt und  $\varphi: U \rightarrow V$  eine Isometrie. Zeige, dass  $\varphi$  injektiv ist.

**Aufgabe 33.12.** Es seien  $U, V, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Skalarprodukt. Zeige die folgenden Aussagen.

- (a) Die Identität  $V \rightarrow V$  ist eine Isometrie.
- (b) Wenn  $\varphi: U \rightarrow V$  eine bijektive Isometrie ist, so ist auch die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  eine Isometrie.
- (c) Wenn  $\varphi: U \rightarrow V$  und  $\psi: V \rightarrow W$  Isometrien sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung  $\psi \circ \varphi$  eine Isometrie.

**Aufgabe 33.13.** Bestimme die Isometrien von  $\mathbb{C}$ .

**Aufgabe 33.14.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt,

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine Isometrie und  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum. Zeige, dass

$$\varphi|_U: U \longrightarrow U$$

ebenfalls eine Isometrie ist.

**Aufgabe 33.15.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum der Dimension  $n$ . Zeige, dass eine Vektorfamilie  $u_1, \dots, u_n \in V$  genau dann eine Orthonormalbasis von  $V$  ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen  $\mathbb{R}^n$  und  $V$  ist.

**Aufgabe 33.16.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $\varphi$  ist eine Isometrie.
- (2) Für jede Orthonormalbasis  $u_i, i = 1, \dots, n$ , von  $V$  ist  $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$ , Teil einer Orthonormalbasis von  $W$ .

- (3) Es gibt eine Orthonormalbasis  $u_i, i = 1, \dots, n$ , von  $V$  derart, dass  $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$ , Teil einer Orthonormalbasis von  $W$  ist.

**Aufgabe 33.17.** Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit der Eigenschaft, dass es einerseits eine Orthogonalbasis des  $\mathbb{R}^2$  gibt, die unter  $\varphi$  in eine Orthogonalbasis überführt wird, es andererseits aber auch eine Orthogonalbasis gibt, die unter  $\varphi$  nicht in eine Orthogonalbasis überführt wird.

**Aufgabe 33.18.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass die Determinante von  $\varphi$  gleich 1 oder  $-1$  ist. Ferner besitze  $\varphi$  die Eigenschaft, dass zueinander orthogonale Vektoren stets auf orthogonale Vektoren abgebildet werden. Zeige, dass  $\varphi$  eine Isometrie ist.

**Aufgabe 33.19.** Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle  $u, v \in V$  die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.

**Aufgabe 33.20.** Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass  $\varphi$  flächentreu, aber keine Isometrie ist.

**Aufgabe 33.21.** Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Ordnung 2 ist und die keine Isometrie ist.

**Aufgabe 33.22.** Es sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass die Menge  $GL_n(K)$  der invertierbaren Matrizen eine Gruppe ist. Zeige ferner, dass diese Gruppe bei  $n \geq 2$  nicht kommutativ ist.

**Aufgabe 33.23.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $\varphi$  ist eine Isometrie.
- (2) Für jeden Vektor  $v$  mit  $\|v\| = 1$  ist auch  $\|\varphi(v)\| = 1$ .
- (3) Für jede Orthonormalbasis  $u_i, i = 1, \dots, n$ , ist auch  $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$ , eine Orthonormalbasis.
- (4) Es gibt eine Orthonormalbasis  $u_i, i = 1, \dots, n$ , derart, dass auch  $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$ , eine Orthonormalbasis ist.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 33.24.** (2 Punkte)

Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

im  $K^3$ , wobei  $K$  den Körper mit sieben Elementen bezeichnet.

**Aufgabe 33.25.** (3 Punkte)

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass die Menge der Isometrien auf  $V$  eine Gruppe unter der Hintereinanderschaltung von Abbildungen bildet.

**Aufgabe 33.26.** (2 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine eigentliche Isometrie. Es sei vorausgesetzt, dass  $f$  trigonalisierbar ist. Zeige, dass dann  $f$  sogar diagonalisierbar ist.

**Aufgabe 33.27.** (3 Punkte)

Es seien  $V, W$  komplexe Vektorräume mit Skalarprodukten und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann eine Isometrie bezüglich der gegebenen komplexen Skalarprodukte ist, wenn  $\varphi$  eine Isometrie bezüglich der zugehörigen reellen Skalarprodukte ist.

## 34. VORLESUNG - ISOMETRIEN II

## DIE DIAGONALISIERBARKEIT VON ISOMETRIEN IM KOMPLEXEN

**Lemma 34.1.** *Es sei  $\varphi: V \rightarrow V$  eine lineare Isometrie auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt und sei  $U \subseteq V$  ein invarianter Unterraum. Dann ist auch das orthogonale Komplement  $U^\perp$  invariant. Insbesondere kann man  $\varphi$  als direkte Summe*

$$\varphi = \varphi_U \oplus \varphi_{U^\perp}$$

*schreiben, wobei die Einschränkungen  $\varphi_U$  und  $\varphi_{U^\perp}$  ebenfalls Isometrien sind.*

*Beweis.* Es ist

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Für ein solches  $v \in U^\perp$  und ein beliebiges  $u \in U$  ist

$$\langle \varphi(v), u \rangle = \langle \varphi^{-1}(\varphi(v)), \varphi^{-1}(u) \rangle = \langle v, u' \rangle = 0,$$

da  $u' = \varphi^{-1}(u) \in U$  wegen der Invarianz von  $U$  liegt. Also ist wieder  $\varphi(v) \in U^\perp$ .  $\square$

Die folgende Aussage heißt *Spektralsatz* oder genauer *Spektralsatz für komplexe Isometrien*. Im Verlauf dieses Kurses werden wir noch weitere Spektralsätze kennenlernen, siehe Satz 41.11 und Satz 42.9.

**Satz 34.2.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

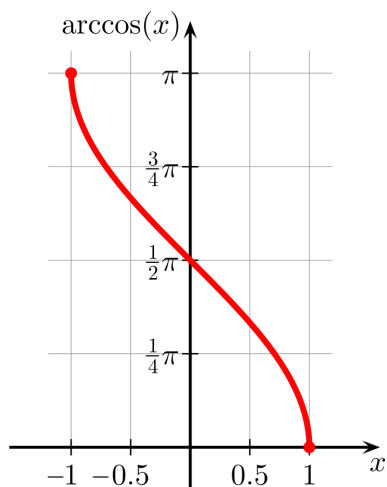
*eine Isometrie. Dann besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu  $\varphi$ . Insbesondere ist  $\varphi$  diagonalisierbar.*

*Beweis.* Wir führen Induktion über die Dimension von  $V$ . Im eindimensionalen Fall ist die Aussage klar. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra und Satz 23.2 besitzt  $\varphi$  einen Eigenwert und einen Eigenvektor, den wir normieren können. Es sei  $E \subseteq V$  die zugehörige Eigengerade. Da eine Isometrie vorliegt, ist das orthogonale Komplement  $E^\perp$  nach Lemma 34.1 ebenfalls  $\varphi$ -invariant, und die Einschränkung

$$\varphi|_{E^\perp}: E^\perp \longrightarrow E^\perp$$

ist ebenfalls eine Isometrie. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also eine Orthonormalbasis von  $E^\perp$  aus Eigenvektoren, die zusammen mit dem ersten Eigenvektor eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $V$  bildet.  $\square$

## WINKEL



**Bemerkung 34.3.** Für von 0 verschiedene Vektoren  $v$  und  $w$  in einem euklidischen Vektorraum  $V$  folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

ist. Damit kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktion *Kosinus* (als bijektive Abbildung  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ) bzw. der Umkehrfunktion den Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren, nämlich durch

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

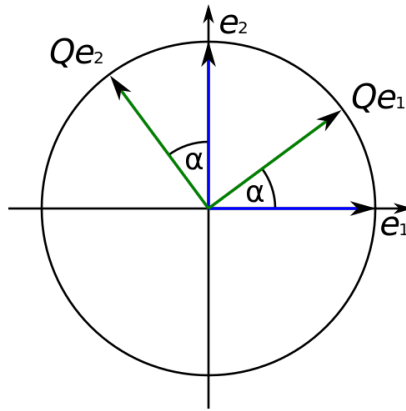
Der Winkel ist also eine reelle Zahl zwischen 0 und  $\pi$ . Die obige Gleichung kann man auch als

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\angle(v, w))$$

schreiben, was die Möglichkeit eröffnet, das Skalarprodukt in dieser Weise zu definieren. Allerdings muss man dann für den Winkel eine unabhängige Definition finden. Dieser Zugang ist etwas intuitiver, hat aber rechnerisch und beweistechnisch viele Nachteile.

Bei einem affinen Raum  $E$  über einem euklidischen Vektorraum  $V$  und bei gegebenen drei Punkten  $P, Q, R \in E$  (einem *Dreieck*) mit  $Q, R \neq P$  versteht man unter dem *Winkel*  $\angle(Q, P, R)$  des Dreiecks an  $P$  den Winkel  $\angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ .

## EBENE ISOMETRIEN



**Satz 34.4.** *Es sei*

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

*eine eigentliche, lineare Isometrie. Dann ist  $\varphi$  eine Drehung, und ihre Matrix hat bezüglich der Standardbasis die Gestalt*

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

*mit einem eindeutig bestimmten Drehwinkel  $\theta \in [0, 2\pi[$ .*

*Beweis.* Es seien  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  die Bilder der Standardvektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Unter einer Isometrie wird die Länge eines Vektors erhalten, daher ist

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Da unter einer Isometrie die Senkrechtsbeziehung erhalten bleibt, muss

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = xu + yv = 0$$

gelten. Bei  $y = 0$  folgt daraus (wegen  $x = \pm 1$ )  $u = 0$ . Dann ist  $v = \pm 1$  und wegen der Eigentlichkeit muss das Vorzeichen dasselbe wie von  $x$  sein. Es sei also  $y \neq 0$ . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \frac{u}{y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Da die beiden Vektoren die Länge 1 haben, muss der skalare Faktor  $u/y$  den Betrag 1 haben. Bei  $u = y$  wäre  $v = -x$  und die Determinante wäre  $-1$ .

Also muss  $u = -y$  und  $v = x$  sein. Die beschreibende Matrix bezüglich der Standardmatrix hat also die Form

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ mit } x^2 + y^2 = 1.$$

Insbesondere ist  $x$  eine reelle Zahl zwischen  $-1$  und  $+1$  und  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ , d.h.  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ist ein Punkt auf dem reellen Einheitskreis. Der Einheitskreis wird bekanntlich durch die trigonometrischen Funktionen parametrisiert, d.h. es gibt einen eindeutig bestimmten Winkel  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

□

Die Hintereinanderschaltung von zwei Drehungen

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

ist  $\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$ . Diese Eigenschaft ist einleuchtend, wenn man die intuitive Vorstellung, die sich mit einer Drehung verbindet, verwendet. Unter Verwendung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen kann man sie beweisen. Umgekehrt folgen die Additionstheoreme aus dieser Eigenschaft, siehe Aufgabe 34.11. Aus dieser Eigenschaft folgt auch, dass die Gruppe der ebenen Drehungen kommutativ ist.

**Satz 34.5.** *Es sei*

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

*eine uneigentliche lineare Isometrie. Dann ist  $\varphi$  eine Achsenspiegelung und ihre Matrix hat bezüglich der Standardbasis die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

*mit einem eindeutig bestimmten Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi[$ .*

*Beweis.* Wir betrachten

$$\varphi \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

was nach dem Determinantenmultiplikationssatz eine eigentliche Isometrie ist. Nach Satz 34.4 gibt es somit einen eindeutig bestimmten Winkel  $\alpha \in [0, \pi[$  mit

$$\varphi \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\varphi = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

□

Bei einer solchen Achsenspiegelung ist  $\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha - 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, die Spiegelungsachse ist also  $\mathbb{R} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha - 1 \end{pmatrix}$ , siehe Aufgabe 34.15. Eine Achsenspiegelung wird bezüglich der Basis, die aus einem Vektor  $\neq 0$  der Spiegelungsachse und einem dazu senkrechten Vektor  $\neq 0$  besteht, durch  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  beschrieben. Die in Satz 34.5 gegebene Beschreibung bezüglich der Standardbasis lässt sich also wesentlich verbessern.

## RÄUMLICHE ISOMETRIEN

**Satz 34.6.** *Es sei*

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

*eine lineare Isometrie. Dann gibt es einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 oder  $-1$ .*

*Beweis.* Das charakteristische Polynom  $P$  zu  $\varphi$  ist ein normiertes Polynom vom Grad drei. Für  $t \rightarrow +\infty$  geht  $P(t) \rightarrow +\infty$  und für  $t \rightarrow -\infty$  geht  $P(t) \rightarrow -\infty$ . Nach dem Zwischenwertsatz besitzt daher  $P$  mindestens eine Nullstelle. Eine solche Nullstelle ist nach Satz 23.2 ein Eigenwert von  $\varphi$ . Nach Satz 33.12 ist der Eigenwert gleich 1 oder gleich  $-1$ . □

Eine eigentliche lineare Isometrie des Raumes führt insbesondere die Einheitskugel durch eine Bewegung in sich über. Man kann sich eine solche Isometrie also gut als eine Drehung an einer Kugel vorstellen, die in einer passenden Schale liegt.

**Satz 34.7.** *Eine eigentliche Isometrie*

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

*besitzt einen Eigenvektor zum Eigenwert 1, d.h. es gibt eine Gerade (durch den Nullpunkt), die unter  $\varphi$  fest bleibt.*

*Beweis.* Wir betrachten das charakteristische Polynom von  $\varphi$ , also

$$P(\lambda) = \det(\lambda E_3 - \varphi).$$

Dies ist ein normiertes reelles Polynom vom Grad drei. Für  $\lambda = 0$  ergibt sich

$$P(0) = \det(-\varphi) = -\det(\varphi) = -1.$$

Da für  $\lambda \rightarrow \infty$  das Polynom  $P(\lambda) \rightarrow \infty$  geht, muss es für ein positives  $\lambda$  eine Nullstelle geben. Aufgrund von Satz 33.12 kommt dafür nur  $\lambda = 1$  in Frage.  $\square$

**Satz 34.8.** *Es sei*

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

*eine eigentliche Isometrie. Dann ist  $\varphi$  eine Drehung um eine feste Achse. Das bedeutet, dass  $\varphi$  in einer geeigneten Orthonormalbasis durch eine Matrix der Form*

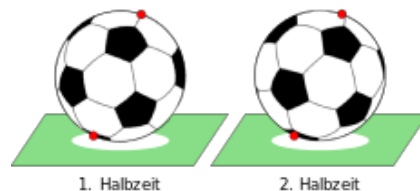
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

*beschrieben wird.*

*Beweis.* Nach Satz 34.7 gibt es einen Eigenvektor  $u$  zum Eigenwert 1. Sei  $U = \mathbb{R}u$  die davon erzeugte Gerade. Diese ist fix und insbesondere invariant unter  $\varphi$ . Nach Lemma 34.1 ist dann auch das orthogonale Komplement  $U^\perp$  invariant unter  $\varphi$ , d.h. es gibt eine lineare Isometrie

$$\varphi_2: U^\perp \longrightarrow U^\perp,$$

die auf  $U^\perp$  mit  $\varphi$  übereinstimmt. Dabei muss  $\varphi_2$  eigentlich sein, und daher muss nach Satz 34.4  $\varphi_2$  eine Drehung sein. Wählt man einen Vektor der Länge eins aus  $U$  und dazu eine Orthonormalbasis von  $U^\perp$ , so hat  $\varphi$  bezüglich dieser Basis die angegebene Gestalt.  $\square$



**Korollar 34.9.** *Zu Beginn eines Fußballspiels liegt der Fußball auf dem Anstoßpunkt. Wenn ein Tor erzielt wird, so wird der Ball wieder auf den Anstoßpunkt zurückgesetzt. In dieser Situation gilt: Es gibt mindestens zwei (gegenüber liegende) Punkte auf dem Fußball (seiner Oberfläche), die beim Neuanstoß genau dort liegen, wo sie am Spielanstoß lagen. Die Gesamtbewegung des Balles lässt sich durch eine Achsendrehung realisieren.*

*Beweis.* Die Gesamtbewegung ist eine lineare Isometrie, daher folgt die Aussage aus Satz 34.8.  $\square$

## DER ZERLEGUNGSSATZ FÜR ISOMETRIEN

**Lemma 34.10.** *Es sei  $V \neq 0$  ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann besitzt  $V$  einen  $\varphi$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  der Dimension 1 oder 2.*

*Beweis.* Wir können  $V = \mathbb{R}^n$  annehmen und dass  $\varphi$  durch die Matrix  $M$  bezüglich der Standardbasis gegeben ist. Wenn  $\varphi$  einen Eigenwert besitzt, so sind wir fertig. Andernfalls betrachten wir die entsprechende komplexe Abbildung, also

$$\varphi: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

die durch die gleiche Matrix  $M$  gegeben ist. Diese besitzt einen komplexen Eigenwert  $a + bi$  und einen komplexen Eigenvektor  $v \in \mathbb{C}^n$ . Es ist also

$$Mv = (a + bi)v.$$

Mit

$$v = v_1 + iv_2$$

und  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  bedeutet dies

$$Mv_1 + iMv_2 = Mv = (a + bi)(v_1 + iv_2) = av_1 - bv_2 + i(av_2 + bv_1).$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil zeigt, dass  $Mv_1, Mv_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$  sind, sodass der Untervektorraum  $\langle v_1, v_2 \rangle$  invariant ist.  $\square$

**Satz 34.11.** *Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine Isometrie auf dem euklidischen Vektorraum  $V$ . Dann ist  $V$  eine orthogonale direkte Summe*

$$V = G_1 \oplus \cdots \oplus G_p \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_q \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$$

*von  $\varphi$ -invarianten Untervektorräumen, wobei die  $G_i, H_j$  eindimensional und die  $E_k$  zweidimensional sind. Die Einschränkung von  $\varphi$  auf den  $G_i$  ist die Identität, auf  $H_j$  die negative Identität und auf  $E_k$  eine Drehung ohne Eigenwerte.*

*Beweis.* Wir führen Induktion über die Dimension von  $V$ , die mit  $n$  bezeichnet sei. Der eindimensionale Fall ist wegen Satz 33.12 klar. Sei  $n = 2$ . Die Determinante kann wegen Lemma 33.13 nur die Werte 1 und  $-1$  annehmen. Bei  $-1$  besitzt das charakteristische Polynom zwei Nullstellen, und diese müssen nach Satz 33.12 1 und  $-1$  sein. Es liegt dann also eine Achsenspiegelung vor und

$$V = G \oplus H.$$

Wenn die Determinante 1 ist, so sind wir in der Situation von Satz 34.4 und es liegt eine Drehung vor. Wenn der Drehwinkel 0 ist, so liegt die Identität vor und man kann  $V = G_1 \oplus G_2$  zerlegen, und wenn der Drehwinkel  $\pi$  ist,

so liegt die Punktspiegelung  $- \text{Id}$  vor und man kann  $V = H_1 \oplus H_2$  zerlegen. Bei den anderen Winkeln gibt es keine Eigenvektoren.

Es sei nun  $n \geq 1$  beliebig und die Aussage für kleinere Dimensionen schon bewiesen. Nach Lemma 34.10 gibt es einen  $\varphi$ -invarianten Untervektorraum  $U$  der Dimension 1 oder 2 und nach Lemma 34.1 gibt es dazu ein invariantes orthogonales Komplement, also

$$V = U \oplus W.$$

Die Induktionsvoraussetzung angewendet auf  $W$  liefert das Resultat.  $\square$

In dieser Zerlegung ist  $G_1 \oplus \dots \oplus G_p$  der Eigenraum zum Eigenwert 1 und  $H_1 \oplus \dots \oplus H_q$  der Eigenraum zum Eigenwert  $-1$ , wobei die jeweiligen Zerlegungen nicht eindeutig sind. Die Isometrie ist genau dann eigentlich, wenn  $q$  gerade ist.

## 34. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 34.1.** Zeige

$$\angle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \alpha \leq \pi, \\ 2\pi - \alpha, & \text{falls } \alpha > \pi. \end{cases}$$

**Aufgabe 34.2.** Es seien  $u, v \in V$  von 0 verschiedene Vektoren in einem reellen Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt. Zeige, dass der Winkel zu  $u$  und  $v$  mit dem Winkel zu  $su$  und  $tv$  übereinstimmt, wobei  $s, t$  positive reelle Zahlen sind.

Die vorstehende Aussage besagt insbesondere, dass der Winkel eine Eigenschaft der durch zwei Vektoren definierten *Strahlen* (Halbgeraden) ist.

**Aufgabe 34.3.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Zeige, dass der Winkel

$$\angle(u, v)$$

nur von der Einschränkung des Skalarproduktes auf den durch  $u$  und  $v$  erzeugten Untervektorraum abhängt.

**Aufgabe 34.4.** Es seien  $u, v, w \in V$  von 0 verschiedene Vektoren in einem reellen Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt. Zeige

$$\angle(u, w) \leq \angle(u, v) + \angle(v, w).$$

**Aufgabe 34.5.** Welche Winkel gibt es auf einer Geraden?

**Aufgabe 34.6.** Es sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

der Einheitskreis. Zeige, dass man auf  $K$  eine Metrik definieren kann, indem man  $d(P, Q)$  ( $P, Q \in K$ ) als den positiven Winkel zwischen den zugehörigen Strahlen durch den Nullpunkt  $(0, 0)$  ansetzt.

**Aufgabe 34.7.** Es sei  $\alpha_n$  der Winkel zwischen dem ersten Standardvektor  $e_1$  und dem Vektor  $v_n = \sum_{i=1}^n e_i$  im  $\mathbb{R}^n$ . Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Die beiden folgenden Aufgaben wurden schon auf dem Arbeitsblatt 10 gestellt.

**Aufgabe 34.8.** Finde mittels elementargeometrischer Überlegungen eine Matrix, die (bezüglich der Standardbasis) eine Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

**Aufgabe 34.9.** Finde mittels elementargeometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

**Aufgabe 34.10.** Bestimme elementargeometrisch, auf welche Vektoren die Standardvektoren  $e_1$  und  $e_2$  bei einer Drehung um den Nullpunkt um den Winkel  $\alpha$  gegen den Uhrzeigersinn abgebildet werden.

**Aufgabe 34.11.** Beweise die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus unter Verwendung von Drehmatrizen.

**Aufgabe 34.12.** Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

- Zeige, dass  $M$  eine Isometrie auf dem  $\mathbb{R}^2$  und dem  $\mathbb{C}^2$  definiert.
- Bestimme die komplexen Eigenwerte zu  $M$ .
- Bestimme eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^2$ , die aus Eigenvektoren zu  $M$  besteht.

Eine achsensymmetrische Ellipse wird im  $\mathbb{R}^2$  durch eine Gleichung der Form

$$ax^2 + by^2 = c$$

mit  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$  beschrieben.

**Aufgabe 34.13.** Man gebe ein Beispiel für eine (achsensymmetrische) Ellipse  $E$  im  $\mathbb{R}^2$  und eine bijektive lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(E) = E$ , die keine Isometrie ist.

**Aufgabe 34.14.** Man gebe ein Beispiel für eine bijektive, stetige Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(S^1) = S^1$  und mit  $\varphi(sv) = s\varphi(v)$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  und  $v \in \mathbb{R}^2$ , die keine Isometrie ist.

**Aufgabe 34.15.** Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

eine ebene Achsenspiegelung,  $\alpha \neq 0$ . Zeige, dass  $\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha - 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 und  $\begin{pmatrix} \cos \alpha - 1 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $-1$  von  $M$  ist.

**Aufgabe 34.16.** Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die Drehung des Raumes um die  $z$ -Achse um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn. Wie sieht die beschreibende Matrix bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aus?

**Aufgabe 34.17.** Es sei  $\pi \in S_n$  eine Permutation und

$$M_\pi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

die zugehörige Permutationsmatrix bzw. lineare Abbildung. Zeige, dass  $M_\pi$  eine Isometrie ist. Wann handelt es sich um eine eigentliche Isometrie?

**Aufgabe 34.18.** Man bestimme zu jeder Permutation  $\pi \in S_3$  für die zugehörige Permutationsmatrix die Eigengerade.

**Aufgabe 34.19.** Zeige, dass die Gruppe der räumlichen Drehungen nicht kommutativ ist.

**Aufgabe 34.20.** Man gebe ein Beispiel einer Raumdrehung, bei der sämtliche Matrixeinträge  $\neq 0, 1$  sind.

**Aufgabe 34.21.** Es seien  $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle$  und  $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$  Untervektorräume im  $\mathbb{R}^3$ . Finde eine Isometrie  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $U_1 = \langle \varphi(e_1) \rangle$  und mit  $U_2 = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2) \rangle$ .

**Aufgabe 34.22.** Durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}$$

ist eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  gegeben ( $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ ). Bestimme die Eigenwerte und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von  $\varphi$ .

**Aufgabe 34.23.** Der  $\mathbb{R}^n$  sei mit der Maximumsnorm

$$\|v\| = \|v\|_{\max}$$

versehen. Wir interessieren uns für die reellen Matrizen

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

mit der Eigenschaft

$$\|Mv\| = \|v\|$$

für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ . Eine solche Matrix nennen wir  $\|-\|_{\max}$ -isometrisch.

- Zeige, dass eine  $\|-\|_{\max}$ -isometrische Matrix invertierbar ist.
- Zeige, dass die Menge der  $\|-\|_{\max}$ -isometrischen Matrizen eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe bildet.
- Zeige, dass eine Permutationsmatrix  $\|-\|_{\max}$ -isometrisch ist.
- Unter einer Vorzeichen-Permutationsmatrix verstehen wir eine Matrix, die aus einer Permutationsmatrix entsteht, indem man eintragsweise vor die 1 jeweils ein + oder ein --Zeichen setzt. Man gebe ein Beispiel für eine  $3 \times 3$ -Vorzeichen-Permutationsmatrix, die keine Permutationsmatrix und keine obere Dreiecksmatrix ist und deren Determinante gleich 1 ist.

- (e) Zeige, dass eine Vorzeichen-Permutationsmatrix  $\|-\|_{\max}$ -isometrisch ist.
- (f) Zeige, dass jede  $\|-\|_{\max}$ -isometrische Matrix eine Vorzeichen-Permutationsmatrix ist.

### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

#### Aufgabe 34.24. (2 Punkte)

Es seien  $u, v \in V$  normierte Vektoren in einem reellen Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt. Zeige, dass der Vektor  $u + v$  die beiden Vektoren in gleich große Winkel unterteilt.

#### Aufgabe 34.25. (4 Punkte)

Wir betrachten eine Uhr mit Minuten- und Sekundenzeiger, die sich beide kontinuierlich bewegen. Bestimme eine Formel, die aus der Winkelstellung des Minutenzeigers die Winkelstellung des Sekundenzeigers (jeweils ausgehend von der 12-Uhr-Stellung im Uhrzeigersinn gemessen) berechnet.

#### Aufgabe 34.26. (4 Punkte)

Zeige, dass sich jede eigentliche lineare Isometrie des  $\mathbb{R}^3$  als Verknüpfung von Drehungen um die drei Koordinatenachsen realisieren lässt.

#### Aufgabe 34.27. (4 Punkte)

Zeige, dass zu  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(-ad + bc) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(-ab + cd) \\ 2(-ac + bd) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

eine Isometrie des  $\mathbb{R}^3$  definiert.

#### Aufgabe 34.28. (4 Punkte)

Es sei  $M$  eine komplexe  $2 \times 2$ -Matrix derart, dass die Spalten eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^2$  bilden und die Determinante gleich 1 ist. Zeige, dass  $M$  die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$$

mit  $u, v \in \mathbb{C}$  und  $\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| = 1$  besitzt.

**Aufgabe 34.29.** (5 (1+2+2) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeige, dass  $M$  eine Isometrie auf dem  $\mathbb{R}^2$  und dem  $\mathbb{C}^2$  definiert.
- (b) Bestimme die komplexen Eigenwerte zu  $M$ .
- (c) Bestimme eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^2$ , die aus Eigenvektoren zu  $M$  besteht.

### 35. VORLESUNG - MENGENABSTÄNDE

#### WINKELTREUE ABBILDUNGEN

**Definition 35.1.** Eine lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

zwischen euklidischen Vektorräumen  $V$  und  $W$  heißt *winkeltreu*, wenn für je zwei von 0 verschiedene Vektoren  $u, v \in V$  die Beziehung

$$\angle(\varphi(u), \varphi(v)) = \angle(u, v)$$

gilt.

Da Winkel nur für von 0 verschiedene Vektoren definiert sind, müssen winkeltreue Abbildungen injektiv sein. Eine Isometrie ist insbesondere winkeltreu, da ja sowohl die Norm als auch der Winkel unter Bezug auf das Skalarprodukt definiert wird, und dieses sich bei einer Isometrie nicht ändert. Weitere Beispiele für winkeltreue Abbildungen sind Streckungen um einen von 0 verschiedenen Streckungsfaktor, siehe Aufgabe 35.1. Bei einer winkeltreuen Abbildung werden insbesondere zueinander orthogonale Vektoren auf orthogonale Vektoren abgebildet.

**Beispiel 35.2.** Es sei

$$\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, die durch die Multiplikation mit der komplexen Zahl

$$w = a + bi \neq 0$$

gestiftet wird. Bezüglich der reellen Basis  $1, i$  von  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  wird diese Abbildung durch die reelle  $2 \times 2$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

beschrieben. Diese schreiben wir als

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}.$$

Somit liegt die Hintereinanderschaltung von einer Isometrie (einer Drehung) und einer Streckung mit dem Streckungsfaktor

$$|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und insbesondere eine winkeltreue Abbildung vor.

**Satz 35.3.** *Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine winkeltreue lineare Abbildung auf dem euklidischen Vektorraum  $V$ . Dann gibt es eine Isometrie*

$$\psi: V \longrightarrow V$$

*und eine Streckung*

$$\sigma: V \longrightarrow V$$

*mit*

$$\varphi = \sigma \circ \psi.$$

*Beweis.* Es sei

$$r = \det \varphi$$

und es sei

$$s := \sqrt[n]{|r|},$$

wobei  $n$  die Dimension von  $V$  sei. Es sei  $\sigma$  die Streckung mit dem Faktor  $s$  und wir betrachten die Abbildung

$$\psi := \sigma^{-1} \circ \varphi.$$

Diese Abbildung ist nach wie vor winkeltreu und ihre Determinante ist 1 oder  $-1$ . Nach Aufgabe 33.18 ist  $\psi$  eine Isometrie.  $\square$

**Bemerkung 35.4.** Bei einer winkeltreuen Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

zwischen euklidischen Vektorräumen  $V$  und  $W$  werden nicht nur die Winkel am Nullpunkt, sondern überhaupt alle Winkel erhalten. Für Punkte  $P, Q, R \in V$  stimmt ja der Winkel des Dreiecks an  $Q$  wegen

$$\begin{aligned} \angle(P, Q, R) &= \angle(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}) \\ &= \angle(\varphi(\overrightarrow{QP}), \varphi(\overrightarrow{QR})) \\ &= \angle(\overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(P)}, \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)}) \\ &= \angle(\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)) \end{aligned}$$

mit dem Winkel an  $\varphi(Q)$  des Bilddreiecks  $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$  überein.

## ABSTÄNDE ZWISCHEN MENGEN

**Definition 35.5.** Zu zwei nichtleeren Teilmengen  $A, B \subseteq M$  in einem metrischen Raum  $M$  nennt man

$$d(A, B) := \inf \{d(P, Q), P \in A, Q \in B\}$$

den *Abstand der Teilmengen*  $A$  und  $B$ .

Speziell werden wir dieses Konzept auf normierte Vektorräume und auf euklidische Vektorräume anwenden. Zu zwei Punkten  $P, Q \in V$  ist der Abstand zwischen den Mengen  $\{P\}$  und  $\{Q\}$  natürlich gleich  $d(P, Q)$ .

Wir werden uns hauptsächlich mit Situationen beschäftigen, in denen das Infimum angenommen wird, also ein Minimum ist. Für lineare Objekte ist dieses Verhalten typisch.

**Lemma 35.6.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum und  $v \in V$ . Dann ist  $p_U(v)$  derjenige Punkt auf  $U$ , der unter allen Punkten auf  $U$  zu  $v$  den minimalen Abstand besitzt. Insbesondere ist*

$$d(v, U) = d(v, p_U(v)).$$

*Beweis.* Zu  $u \in U$  ist nach dem Satz des Pythagoras

$$d(v, u)^2 = d(v, p_U(v))^2 + d(p_U(v), u)^2,$$

da ja  $p_U(v) - u \in U$  und  $v - p_U(v) \in U^\perp$  aufeinander senkrecht stehen. Der Ausdruck wird genau dann minimal, wenn  $d(p_U(v), u) = 0$  ist, was genau bei

$$p_U(v) = u$$

der Fall ist. □

In diesem Zusammenhang nennt man  $p_U(v)$  auch den *Lotfußpunkt* von  $v$  auf  $U$ .

**Korollar 35.7.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum und  $v \in V$ . Es sei  $u_1, \dots, u_m$  eine Orthonormalbasis von  $U$ . Dann ist*

$$d(v, U)^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle^2.$$

*Beweis.* Nach Lemma 35.6 ist

$$d(v, U) = d(v, p_U(v))$$

und nach Lemma 32.14 ist

$$p_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Es stehen  $p_U(v)$  und  $v - p_U(v)$  senkrecht aufeinander, daher ist unter Verwendung des Satzes des Pythagoras

$$\begin{aligned} d(v, U)^2 &= \|v - p_U(v)\|^2 \\ &= \|v\|^2 - \|p_U(v)\|^2 \\ &= \|v\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle u_i \right\|^2 \\ &= \|v\|^2 - \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle^2. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 35.8.** Es sei  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  und  $U = \langle e_i, i \in J \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$  der von dieser Auswahl an Standardvektoren aufgespannte Achsenunterraum. Sei

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist der Abstand von  $v$  zu  $U$  gleich

$$d(v, U) = \sqrt{\sum_{i \notin J} v_i^2}.$$

Der Lotfußpunkt von  $v$  auf  $U$  ist

$$p_U(v) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

mit

$$w_i = \begin{cases} v_i, & \text{falls } i \in J, \\ 0, & \text{falls } i \notin J. \end{cases}$$

**Korollar 35.9.** Es sei  $a \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor mit  $\|a\| = 1$  und

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\} = (\mathbb{R}a)^\perp$$

der durch  $a$  als Normalenvektor definierte Untervektorraum. Dann ist für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  der Abstand zu  $U$  gleich

$$d(U, v) = |\langle a, v \rangle|.$$

*Beweis.* Es sei  $a, u_2, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$  und

$$v = \lambda a + \sum_{i=2}^n c_i u_i.$$

Dann ist

$$p_U(v) = \sum_{i=2}^n c_i u_i$$

und nach Lemma 35.6 ist

$$d(U, v) = \|v - p_U(v)\| = \|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| = |\lambda|,$$

was in Verbindung mit

$$\langle a, v \rangle = \left\langle a, \lambda a + \sum_{i=2}^n c_i u_i \right\rangle = \langle a, \lambda a \rangle = \lambda$$

das Resultat liefert.  $\square$

Die bisherigen Überlegungen übertragen sich direkt auf affine Unterräume.

**Beispiel 35.10.** Es sei  $E$  ein reeller affiner Raum über einem euklidischen Vektorraum  $V$ ,  $P \in E$  ein Punkt und  $F \subseteq E$  ein affiner Unterraum. Bei  $P \in F$  ist der Abstand von  $P$  zu  $F$  gleich 0. Im Allgemeinen schreibt man

$$F = Q + U$$

mit einem Aufpunkt  $Q \in F$  und mit einem Untervektorraum  $U \subseteq V$  und bestimmt das orthogonale Komplement  $W = U^\perp$  von  $U$  in  $V$ . Wenn  $u_1, \dots, u_m$  eine Basis von  $U$  und  $w_1, \dots, w_k$  eine Basis von  $W$  ist, so gibt es eine eindeutige Darstellung

$$\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^k b_j w_j.$$

Es ist dann

$$L = P + \sum_{j=1}^k b_j w_j = Q - \sum_{i=1}^m a_i u_i$$

der Lotfußpunkt von  $P$  auf  $F$  und der Abstand von  $P$  zu  $L$  ist

$$d(P, F) = d(P, L) = \left\| \sum_{j=1}^k b_j w_j \right\|.$$

Wenn die  $w_j$  eine Orthonormalbasis von  $U$  bilden, so ist dies gleich  $\sqrt{\sum_{j=1}^k b_j^2}$ .

**Beispiel 35.11.** Wir wollen in der euklidischen Ebene den Abstand des Punktes  $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  zu der Geraden  $G$ , die durch  $2x - 3y = 7$  gegeben ist, berechnen. Die Gerade hat die Form

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

und  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  ist ein zu  $G$  orthogonaler Vektor. Es ist

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{23}{26} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{14}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist der Lotfußpunkt gleich

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{14}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{13} \\ \frac{23}{13} \end{pmatrix}$$

und der Abstand ist

$$\frac{14}{13} \sqrt{13}.$$

**Lemma 35.12.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und seien  $E_1 = P_1 + U_1$  und  $E_2 = P_2 + U_2$  nichtleere affine Unterräume mit den Unterräumen  $U_1, U_2 \subseteq V$ . Es sei*

$$P_1 - P_2 = u_1 + u_2 + u$$

mit  $u_1 \in U_1$ ,  $u_2 \in U_2$  und  $u \in (U_1 + U_2)^\perp$ . Dann ist der Abstand  $d(E_1, E_2)$  gleich  $\|u\|$  und wird in den Punkten  $P_1 - u_1 \in E_1$  und  $P_2 + u_2 \in E_2$  angenommen. Insbesondere steht der Verbindungsvektor zu Punkten, in denen der minimale Abstand angenommen wird, sowohl auf  $E_1$  als auch auf  $E_2$  senkrecht.

*Beweis.* Es sei also  $P_1 - P_2 = u_1 + u_2 + u$  mit  $u_1 \in U_1$ ,  $u_2 \in U_2$  und  $u \in (U_1 + U_2)^\perp$ , wobei es eine solche Zerlegung immer gibt, und wobei  $u_1, u_2$  nicht eindeutig bestimmt sein müssen (falls  $U_1 \cap U_2 \neq 0$  ist), aber  $u$  eindeutig bestimmt ist. Es ist dann

$$P_1 - u_1 = P_2 + u_2 + u$$

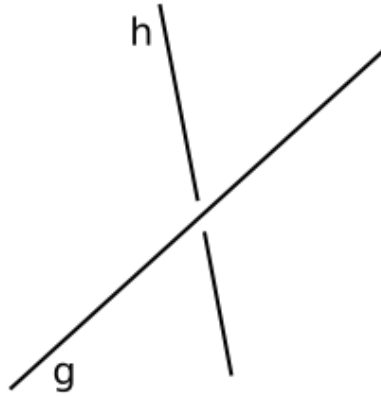
und dabei ist  $Q_1 := P_1 - u_1 \in E_1$  und  $Q_2 := P_2 + u_2 \in E_2$ . Der Abstand zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$  ist  $\|u\|$ . Für beliebige Punkte  $R_1 = Q_1 + v_1 \in E_1$  und  $R_2 = Q_2 + v_2 \in E_2$  mit  $v_1 \in U_1$  und  $v_2 \in U_2$  ist

$$\begin{aligned} d(R_1, R_2)^2 &= \|R_1 - R_2\|^2 \\ &= \|v_1 - v_2 + u\|^2 \\ &= \langle v_1 - v_2 + u, v_1 - v_2 + u \rangle \\ &= \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle + \langle u, u \rangle \\ &\geq \langle u, u \rangle, \end{aligned}$$

d.h.

$$d(R_1, R_2) \geq \|u\|.$$

□



In der vorstehenden Aussage sind die Punkte, in denen das Minimum angenommen wird, nicht eindeutig bestimmt, man denke beispielsweise an zwei parallele Geraden in der Ebene. Eindeutigkeit liegt vor, wenn der Durchschnitt der zu  $E_1, E_2$  gehörenden Untervektorräume gleich 0 ist. Dies ist bei windschiefen Geraden der Fall.

**Beispiel 35.13.** Zwei (affine) Geraden  $G, H \subseteq \mathbb{R}^3$  heißen *windschief*, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben und auch nicht parallel sind, ihre Richtungsvektoren also nicht linear abhängig sind. Dann erzeugen die Richtungsvektoren eine Ebene, und auf dieser Ebene steht ein (bis auf Streckung eindeutiger) Vektor  $u$  senkrecht. Einen solchen Vektor, den *Normalenvektor*, kann man mit dem Kreuzprodukt berechnen. Sei

$$G = P + \mathbb{R}v$$

und

$$H = Q + \mathbb{R}w.$$

Das lineare Gleichungssystem

$$P - Q = av + bw + cu$$

besitzt eine eindeutige Lösung  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Dabei sind  $P - av \in G$  und  $Q + bw \in H$  die Lotfußpunkte, in denen nach Lemma 35.12 der Abstand der Geraden angenommen wird. Dieser Abstand ist  $\|cu\|$ .

**Korollar 35.14.** *Es seien*

$$G = P + \mathbb{R}v$$

und

$$H = Q + \mathbb{R}w$$

*windschiefe Geraden im  $\mathbb{R}^3$  mit Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . Es sei  $u$  ein normierter Vektor, der zu  $v$  und  $w$  senkrecht sei. Dann ist*

$$d(G, H) = |\langle P - Q, u \rangle|.$$

*Beweis.* Wir gehen von Beispiel 35.13 aus und betrachten

$$P - Q = av + bw + cu.$$

Mit der Cramerschen Regel erhalten wir unter Verwendung von Lemma 33.3 (5) und da  $u$  ein lineares Vielfaches von  $v \times w$  ist

$$\begin{aligned} c &= \frac{\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & P_1 - Q_1 \\ v_2 & w_2 & P_2 - Q_2 \\ v_3 & w_3 & P_3 - Q_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ v_3 & w_3 & u_3 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\langle v \times w, P - Q \rangle}{\langle v \times w, u \rangle} \\ &= \frac{\langle u, P - Q \rangle}{\langle u, u \rangle} \\ &= \langle u, P - Q \rangle. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 35.15.** Es seien

$$G = P + \mathbb{R}v$$

und

$$H = Q + \mathbb{R}w$$

windschiefe Geraden. Wir wollen das Abstandsproblem zwischen den beiden Geraden als Extremalproblem im Sinne der höherdimensionalen Analysis verstehen. Sei

$$P = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

und

$$Q = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Das Quadrat des Abstandes zwischen zwei Punkten

$$P' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und

$$Q' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

ist (mit  $c_i = a_i - b_i$ )

$$\begin{aligned} d(P', Q')^2 &= (c_1 + sv_1 - tw_1)^2 + (c_2 + sv_2 - tw_2)^2 + (c_3 + sv_3 - tw_3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_1^2 + s^2 v_1^2 + t^2 w_1^2 + 2sc_1 v_1 - 2tc_1 w_1 - 2stv_1 w_1 + c_2^2 + s^2 v_2^2 + t^2 w_2^2 + 2sa_2 v_2 \\
&\quad - 2tc_2 w_2 - 2stv_2 w_2 + c_3^2 + s^2 v_3^2 + t^2 w_3^2 + 2sc_3 v_3 - 2tc_3 w_3 - 2stv_3 w_3 \\
&= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + 2s(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) - 2t(c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3) \\
&\quad + s^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + t^2(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - 2st(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3).
\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man mit Mitteln der Analysis 2 interpretieren. Wir betrachten die durch die Geraden gegebenen Daten als fixierte Parameter, sodass ein reellwertiger funktionaler Ausdruck  $f(s, t)$  in den beiden reellen Variablen  $s$  und  $t$  vorliegt, für den Extrema zu bestimmen sind. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) + 2s(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - 2t(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2(c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3) + 2t(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - 2s(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3).$$

Wenn wir diese gleich 0 setzen, so erhalten wir ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in den Variablen  $s$  und  $t$ . Mit der Cramerschen Regel erhält man

$$s = \frac{\det \begin{pmatrix} -c_1 v_1 - c_2 v_2 - c_3 v_3 & -v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 \\ -c_1 w_1 - c_2 w_2 - c_3 w_3 & w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 & -v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 \\ -v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 & w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \end{pmatrix}}$$

und

$$t = \frac{\det \begin{pmatrix} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 & -c_1 v_1 - c_2 v_2 - c_3 v_3 \\ -v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 & -c_1 w_1 - c_2 w_2 - c_3 w_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 & -v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 \\ -v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 & w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \end{pmatrix}}.$$

Wenn  $v$  und  $w$  normiert sind, so vereinfachen sich diese Ausdrücke zu

$$s = \frac{-\langle P - Q, v \rangle - \langle P - Q, w \rangle \langle v, w \rangle}{1 - \langle v, w \rangle^2}$$

und

$$t = \frac{-\langle P - Q, w \rangle - \langle P - Q, v \rangle \langle v, w \rangle}{1 - \langle v, w \rangle^2}.$$

## 35. ARBEITSBLATT

## ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 35.1.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei  $\varphi: V \rightarrow V$  eine Streckung mit einem Streckungsfaktor  $s \neq 0$ . Zeige, dass  $\varphi$  winkeltreu ist.

**Aufgabe 35.2.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann winkeltreu ist, wenn für alle  $u, v \in V$ ,  $u, v \neq 0$ , die Gleichung

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \frac{\|\varphi(u)\|}{\|u\|} \cdot \frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} \cdot \langle u, v \rangle$$

gilt.

**Aufgabe 35.3.** Es seien  $U, V$  und  $W$  euklidische Vektorräume. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(a) Die Identität

$$\text{Id}_V: V \longrightarrow V$$

ist winkeltreu.

(b) Die Verknüpfung von winkeltreuen Abbildungen

$$\varphi: U \longrightarrow V$$

und

$$\psi: V \longrightarrow W$$

ist wieder winkeltreu.

(c) Zu einer bijektiven winkeltreuen Abbildung

$$\varphi: U \longrightarrow V$$

ist auch die Umkehrabbildung winkeltreu.

**Aufgabe 35.4.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass die Menge aller winkeltreuen Abbildungen

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine Untergruppe von  $\text{GL}(V)$  ist.

**Aufgabe 35.5.** Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix derart, dass die zugehörige lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

winkeltreu ist. Zeige

$$M = E_n.$$

**Aufgabe 35.6.** Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix. Zeige, dass die zugehörige lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

genau dann winkeltreu ist, wenn  $|d_{ii}|$  konstant und von 0 verschieden ist.

**Aufgabe 35.7.** Man gebe zu jedem  $r$ ,  $0 \leq r < n$ , eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

vom Rang  $r$  an, die orthogonale Vektoren auf orthogonale Vektoren abbildet, aber keine winkeltreue Abbildung ist.

**Aufgabe 35.8.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass orthogonale Vektoren auf orthogonale Vektoren abgebildet werden. Zeige, dass  $\varphi$  winkeltreu ist.

**Aufgabe 35.9.** Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine winkeltreue lineare Abbildung auf dem euklidischen Vektorräumen  $V$ .  
Zeige, dass es eine Isometrie

$$\psi: V \longrightarrow V$$

und eine Streckung

$$\sigma: V \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi = \psi \circ \sigma$$

gibt.

**Aufgabe 35.10.** Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt  $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  und sämtlichen Untervektorräumen  $U_I = \langle e_i, i \in I \rangle$  zu  $I \subseteq \{1, 2, 3\}$ .

**Aufgabe 35.11.** Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt  $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$  und der durch

$$3x - 7y = 8$$

gegebenen Geraden und den Lotfußpunkt des Punktes auf der Geraden.

**Aufgabe 35.12.** Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$  und der durch

$$4x - 7y + 6z = 3$$

gegebenen Ebene im  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 35.13.** Bestimme den minimalen Abstand von  $(4, 1, -5)$  zu einem Punkt der Ebene  $E$ , die durch die Gleichung  $2x - 7y + 3z = 0$  gegeben ist.

**Aufgabe 35.14.** Erstelle für die beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein lineares Gleichungssystem und berechne daraus die Lotfußpunkte, den Verbindungsvektor und den Abstand der beiden Geraden.

**Aufgabe 35.15.** Berechne den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die folgenden Aufgaben besprechen Abstände zwischen nichtlinearen Objekten.

**Aufgabe 35.16.** Es sei  $A$  der Kreis in  $\mathbb{R}^2$  mit dem Mittelpunkt  $(3, -4)$  und dem Radius 2 und  $B$  der Kreis in  $\mathbb{R}^2$  mit dem Mittelpunkt  $(7, 2)$  und dem Radius 3. Bestimme den Abstand zwischen den beiden Kreisen und an welchen Kreispunkten dieser angenommen wird.

**Aufgabe 35.17.** Es sei  $A$  der Kreis in  $\mathbb{R}^2$  mit dem Mittelpunkt  $(1, -3)$  und dem Radius 2 und  $B$  die durch

$$6x + 5y = 30$$

gegebene Gerade. Bestimme den Abstand zwischen dem Kreis und der Geraden und an welchen Punkten dieser angenommen wird.

**Aufgabe 35.18.** Bestimme den Abstand zwischen der Hyperbel

$$\{(x, y) \mid xy = 1\}$$

und dem Achsenkreuz

$$\{(x, y) \mid xy = 0\}.$$

**Aufgabe 35.19.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem metrischen Raum  $M$ , wobei alle Folgenglieder verschieden seien. Es sei  $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und  $P$  ein von allen Folgengliedern verschiedener Punkt aus  $M$ . Zeige, dass  $P$  genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn

$$d(A, P) = 0$$

ist.

Die folgende Aufgabe benötigt Analysis 1 (Extremabestimmung durch Ableiten).

**Aufgabe 35.20.** Für welche Punkte  $(t, t^2)$  der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt  $(0, 1)$  minimal?

AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 35.21.** (3 Punkte)

Es sei  $\varphi: V \rightarrow V$  eine winkeltreue lineare Abbildung auf dem euklidischen Vektorraum  $V$ . Zeige, dass es eine reelle Zahl  $s$  derart gibt, dass allenfalls  $s$  oder  $-s$  als Eigenwerte von  $\varphi$  auftreten.

**Aufgabe 35.22.** (2 Punkte)

Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann eine Isometrie ist, wenn für beliebige Teilmengen  $A, B \subseteq V$  die Gleichung

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$$

gilt.

**Aufgabe 35.23.** (4 Punkte)

Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  und der durch

$$-6x + 3y = 11$$

gegebenen Geraden und den Lotfußpunkt des Punktes auf der Geraden.

**Aufgabe 35.24.** (5 Punkte)

Erstelle für die beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein lineares Gleichungssystem und berechne daraus die Lotfußpunkte, den Verbindungsvektor und den Abstand der beiden Geraden.

**Aufgabe 35.25.** (3 Punkte)

Berechne den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Aufgabe 35.26.** (4 Punkte)

Es seien zwei disjunkte Kreise  $K_1$  und  $K_2$  in der euklidischen Ebene mit den Mittelpunkten  $M_1 \neq M_2$  und den Radien  $r_1$  und  $r_2$  gegeben. Zeige, dass der Abstand zwischen den beiden Kreisen in Punkten angenommen wird, die auf der Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte liegen.

## 36. VORLESUNG - STRAHLENSÄTZE

## DREIECKE

In dieser und der nächsten Vorlesung stehen Dreiecke im Mittelpunkt. Unter einem Dreieck verstehen wir einfach ein Tupel  $(A, B, C)$  aus drei *Eckpunkten* in einem affinen Raum  $E$  (typischerweise eine affine Ebene) über einem euklidischen Raum  $V$ . Wir lassen die Situation, dass Eckpunkte zusammenfallen, als ausgeartete Dreiecke zu, und wir identifizieren Dreiecke, wenn sie durch eine Umbenennung der Ecken auseinander hervorgehen. Ein Dreieck ist nach Definition genau dann nicht ausgeartet, wenn die drei Punkte affin unabhängig sind. Häufig versteht man unter dem Dreieck auch seine *konvexe Hülle*, das ist die Menge

$$\{rA + sB + tC \mid r + s + t = 1, 0 \leq r, s, t \leq 1\}$$

aller baryzentrischen Kombinationen der drei Punkte, bei denen alle Koeffizienten nichtnegativ sind. Die Verbindungsstrecke

$$\overline{A, B} = \{rA + sB \mid r + s = 1, 0 \leq r, s \leq 1\}$$

heißt *Seite* zwischen den Eckpunkten  $A$  und  $B$  (oder gegenüber von  $C$ ). Sie wird häufig mit  $c$  bezeichnet, ihre Länge ist

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Entsprechende Festlegungen gelten für die beiden anderen Seiten. Manchmal werden auch die Seitenlängen mit  $a, b, c$  bezeichnet. Der Winkel  $\angle(A, B, C)$  des Dreiecks im Punkt  $B$  ist durch

$$\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

definiert, entsprechend an den übrigen Eckpunkten. Die Winkel werden häufig mit  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet.

**Definition 36.1.** Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene heißen *kongruent*, wenn sie durch die Hintereinanderschaltung von Verschiebungen und Isometrien ineinander überführt werden können.

Man sagt auch, dass kongruente Dreiecke durch affin-lineare Isometrien ineinander überführt werden können.

**Satz 36.2.** *Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene sind genau dann zueinander kongruent, wenn ihre Seitenlängen übereinstimmen.*

*Beweis.* Da Verschiebungen und Isometrien die Längen erhalten, ist es klar, dass kongruente Dreiecke längengleich sind. Es seien umgekehrt die beiden längengleichen Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(A', B', C')$  gegeben, wobei wir nach Umbenennung annehmen können, dass für die Seitenlängen die Beziehung

$$d(A, B) \geq d(A, C) \geq d(B, C)$$

und ebenso für das zweite Dreieck gilt. Wir können  $E = \mathbb{R}^2$  annehmen und durch Verschiebungen erreichen, dass  $A = A' = 0$  ist. Durch Drehungen am Nullpunkt der beiden Dreiecke können wir erreichen, dass sowohl  $B$  als auch  $B'$  auf der positiven  $x$ -Achse liegen. Wegen der Längengleichung ist dann  $B = B'$ . Die Punkte  $C$  und  $C'$  haben einerseits zu  $0$  und andererseits zu  $B$  den gleichen Abstand, d.h. sie liegen auf den Schnittpunkten von einem Kreis um  $0$  und einem Kreis um  $B$ . Da es nur zwei Schnittpunkte gibt, ist entweder  $C = C'$  oder  $C$  und  $C'$  lassen sich durch eine Achsenspiegelung an der  $x$ -Achse ineinander überführen.  $\square$

**Definition 36.3.** Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene heißen *eigentlich kongruent*, wenn sie durch die Hintereinanderschaltung von Verschiebungen und eigentlichen Isometrien ineinander überführt werden können.

**Definition 36.4.** Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene heißen *ähnlich*, wenn sie durch die Hintereinanderschaltung von Verschiebungen und winkeltreuen Abbildungen ineinander überführt werden können.

**Satz 36.5.** *Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene sind genau dann zueinander ähnlich, wenn ihre Winkel übereinstimmen.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 36.12.  $\square$

## DER SATZ DES PYTHAGORAS

Wir beschäftigen uns zunächst mit rechtwinkligen Dreiecken.

**Definition 36.6.** Ein Dreieck  $(A, B, C)$  heißt *rechtwinklig*, wenn an einem Eckpunkt die anliegenden Seiten orthogonal zueinander sind.

**Definition 36.7.** Unter der *Hypotenuse* versteht man die Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, die dem rechten Winkel gegenüber liegt.

**Definition 36.8.** Unter einer *Kathete* versteht man eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, die an den rechten Winkel anliegt.

Der *Satz des Pythagoras* lautet für ein rechtwinkliges Dreieck wie folgt.

**Satz 36.9.** *In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate.*

*Beweis.* Die Dreieckspunkte seien  $A, B, C$  mit dem rechten Winkel an  $C$ . Wir setzen  $v = C - A$  und  $w = B - C$ . Der Verbindungsvektor von  $A$  nach  $B$  ist dann gleich  $v + w$  und  $v$  und  $w$  stehen senkrecht aufeinander. Somit ist

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

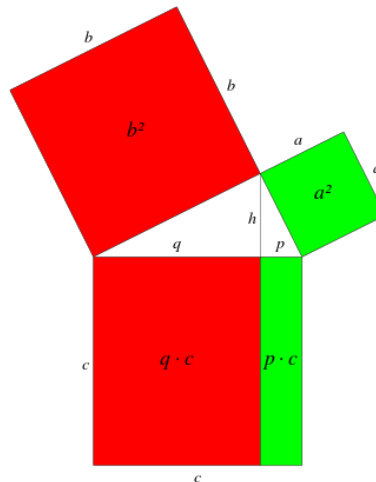
□

In dieser Formulierung wird verwendet, dass der Flächeninhalt eines Quadrats (also des geometrischen Objektes) gleich dem (arithmetischen) Quadrat der Seitenlänge ist. Der Beweis hat nichts mit Flächeninhalten zu tun.

**Definition 36.10.** Zu einem Dreieck  $A, B, C$  in einer euklidischen Ebene heißt die Gerade durch  $A$ , die senkrecht auf der Geraden durch  $B$  und  $C$  steht, die *Höhen Gerade* durch  $A$ . Die Verbindungsstrecke von  $A$  zur Geraden durch  $B$  und  $C$  heißt *Höhe* durch  $A$ .

Die Länge der Höhe wird selbst auch oft Höhe genannt.

**Definition 36.11.** In einem Dreieck  $A, B, C$  in einer euklidischen Ebene heißt der Schnittpunkt der Höhe durch  $A$  mit der Geraden durch  $B$  und  $C$  der *Höhenfußpunkt* dieser Höhe.



Der folgende Satz heißt *Kathetensatz*.

**Satz 36.12.** *Es sei  $A, B, C$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Punkt  $C$ . Es sei  $h$  die Höhe durch  $C$  und  $D$  der Höhenfußpunkt dieser Höhe auf der Geraden durch  $A$  und  $B$ . Dann ist*

$$d(A, C)^2 = d(A, D) \cdot d(A, B).$$

*Beweis.* Wir setzen  $v = C - A$  und  $w = B - C$ . Der Verbindungsvektor von  $A$  nach  $B$  ist dann gleich  $v + w$ . Nach Lemma 32.14 ist der Höhenfußpunkt gleich

$$\begin{aligned} D &= A + p_{(v+w)\mathbb{R}}(v) \\ &= A + \left\langle v, \frac{v+w}{\|v+w\|} \right\rangle \frac{v+w}{\|v+w\|} \\ &= A + \frac{\langle v, v \rangle}{\|v+w\|^2} (v+w) \\ &= A + \frac{\langle v, v \rangle}{\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle} (v+w). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} d(A, D) \cdot d(A, B) &= \frac{\langle v, v \rangle}{\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle} \|v+w\| \cdot \|v+w\| \\ &= \frac{\langle v, v \rangle}{\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle} \langle v+w, v+w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle \\ &= \|v\|^2 \\ &= d(A, C)^2. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz heißt *Höhensatz*.

**Satz 36.13.** *Es sei  $A, B, C$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Punkt  $C$ . Es sei  $h$  die Höhe durch  $C$  und  $D$  der Höhenfußpunkt dieser Höhe auf der Geraden durch  $A$  und  $B$ . Dann ist*

$$d(C, D)^2 = d(A, D) \cdot d(B, D).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 36.20. □

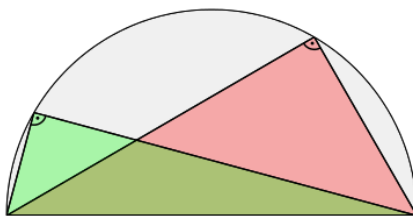
Der folgende Satz heißt *Kosinussatz*.

**Satz 36.14.** *In einem Dreieck  $(A, B, C)$  mit den Seitenlängen  $a, b, c$  und dem Winkel  $\gamma$  an  $C$  gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 36.22. □

## DER SATZ DES THALES



**Satz 36.15.** *Es sei  $P$  ein Punkt in der euklidischen Ebene  $E$ ,  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $P$  und es sei  $G$  eine Gerade durch  $P$ , die den Kreis in den Punkten  $A$  und  $B$  trifft. Dann ist für jeden Punkt  $C \in K$  das Dreieck  $A, B, C$  rechtwinklig an  $C$ .*

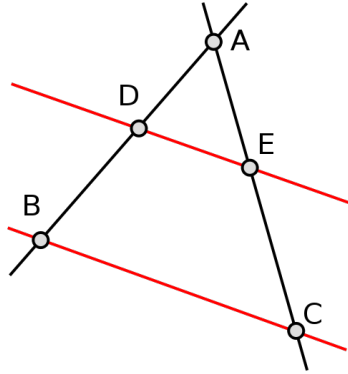
*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $E = \mathbb{R}^2$  und  $P = 0$ , der Radius sei  $r$ . Wir schreiben „vektoriell“  $w = C$ ,  $v = A$ , somit ist  $B = -v$ . Der Verbindungsvektor von  $A$  nach  $C$  ist dann  $-v + w$  und der Verbindungsvektor von  $B$  nach  $C$  ist dann  $v + w$ . Somit ist

$$\begin{aligned}
 \langle -v + w, v + w \rangle &= \langle -v, v \rangle + \langle -v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\
 &= -\langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\
 &= -\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \\
 &= -r^2 + r^2 \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

also sind diese Seiten senkrecht zueinander. □

## DIE STRAHLENSÄTZE

Wir formulieren in der Sprache der linearen Algebra die Strahlensätze. Dabei legen wir einen zweidimensionalen euklidischen Vektorraum zugrunde, der die Längenmessung von Strecken erlaubt. Zwei affine Geraden heißen parallel, wenn sie von dem gleichen Vektor aufgespannt werden. Wir formulieren die Strahlensätze so, dass der Schnittpunkt der Strahlen der Nullpunkt ist. Dies kann man stets erreichen, indem man den Schnittpunkt in den Nullpunkt verschiebt, wobei sich die Längen nicht verändern.



**Satz 36.16.** *Es sei  $V$  ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum und es seien  $s_1, s_2, v \in V$  Vektoren und  $v$  sei sowohl zu  $s_1$  als auch zu  $s_2$  linear unabhängig sei. Es seien  $S_1 = \mathbb{R}s_1$  und  $S_2 = \mathbb{R}s_2$  die durch  $s_1$  und  $s_2$  definierten Geraden (die Strahlen) und es seien  $P$  und  $Q$  Punkte in  $V$  mit den zugehörigen parallelen Geraden  $G = P + \mathbb{R}v$  und  $H = Q + \mathbb{R}v$ . Die Schnittpunkte der Geraden (die aufgrund der Voraussetzungen eindeutig existieren) seien*

$$A_1 = S_1 \cap G, A_2 = S_2 \cap G, B_1 = S_1 \cap H, B_2 = S_2 \cap H,$$

und es seien  $A_1, B_1 \neq 0$ . Dann ist

$$\frac{d(B_1, B_2)}{\|B_1\|} = \frac{d(A_1, A_2)}{\|A_1\|}.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $s_1 = A_1$ ,  $s_2 = A_2$  und  $v = A_2 - A_1$ , da dies die beteiligten Geraden nicht ändert. Wir schreiben  $B_1 = tA_1$ . Es ist  $A_2 = A_1 + v$  und somit ist

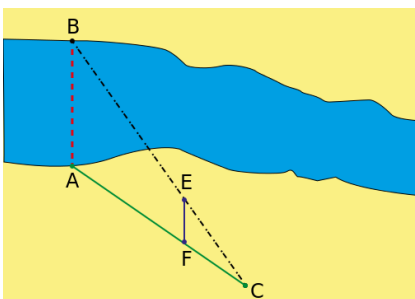
$$tA_2 = tA_1 + tv = B_1 + tv.$$

Dieser Punkt gehört sowohl zu  $S_2$  als auch zu  $H$ , was bedeutet, dass es sich um den Punkt  $B_2$  handelt. Es ist also  $B_2 = tA_2$  und daher

$$\frac{\|B_1 - B_2\|}{\|B_1\|} = \frac{\|tA_1 - tA_2\|}{\|tA_1\|} = \frac{\|A_1 - A_2\|}{\|A_1\|}.$$

□

Der vorstehende Satz besagt insbesondere, dass sich in der beschriebenen Situation entsprechende Seitenlängen der beiden Dreiecke  $0, A_1, A_2$  und  $0, B_1, B_2$  zueinander in der gleichen Weise verhalten. Die Dreiecke sind ähnlich, und zwar geht das Dreieck  $0, B_1, B_2$  aus dem Dreieck  $0, A_1, A_2$  durch eine Streckung mit dem Streckungsfaktor  $t$  hervor. Dieser Streckungsfaktor tritt bei sämtlichen Streckenverhältnissen wieder auf.



Eine Anwendung des Strahlensatzes. Man kann den Abstand über den Fluss berechnen, ohne ihn zu überqueren.



Auch der Daumensprung beruht auf dem Strahlensatz.

**Korollar 36.17.** *Es sei  $V$  ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum und es seien  $s_1, s_2, v \in V$  Vektoren und  $v$  sei sowohl zu  $s_1$  als auch zu  $s_2$  linear unabhängig sei. Es seien  $S_1 = \mathbb{R}s_1$  und  $S_2 = \mathbb{R}s_2$  die durch  $s_1$  und  $s_2$  definierten Geraden (die Strahlen) und es seien  $P$  und  $Q$  Punkte in  $V$  mit den zugehörigen parallelen Geraden  $G = P + \mathbb{R}v$  und  $H = Q + \mathbb{R}v$ . Die Schnittpunkte der Geraden seien*

$$A_1 = S_1 \cap G, A_2 = S_2 \cap G, B_1 = S_1 \cap H, B_2 = S_2 \cap H,$$

und es seien  $A_1, A_2, A_1 - A_2 \neq 0$ . Dann ist

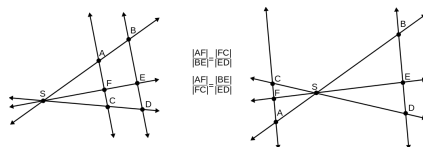
$$\frac{d(B_1, B_2)}{d(A_1, A_2)} = \frac{\|B_1\|}{\|A_1\|} = \frac{\|B_2\|}{\|A_2\|}.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 36.16. □

Die in der vorstehenden Aussage mitbewiesene Gleichung

$$\frac{\|B_1\|}{\|A_1\|} = \frac{\|B_2\|}{\|A_2\|}$$

heißt auch *Erster Strahlensatz*. Er nimmt nur Bezug auf Längenverhältnisse auf den Strahlen.



In der letzten Varianten des Strahlensatzes gibt es drei Strahlen, wir sprechen vom *Dreistrahlensatz*.

**Satz 36.18.** *Es sei  $V$  ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum und es seien  $s_1, s_2, s_3 \in V$  Vektoren und es sei  $v \in V$  linear unabhängig zu jedem dieser Vektoren. Es seien  $S_i = \mathbb{R}s_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , die durch die  $s_i$  definierten Geraden (die Strahlen) und es seien  $P$  und  $Q$  Punkte in  $V$  mit den zugehörigen parallelen Geraden  $G = P + \mathbb{R}v$  und  $H = Q + \mathbb{R}v$ . Die Schnittpunkte der Geraden (die aufgrund der Voraussetzungen eindeutig bestimmt sind) seien  $A_1 = S_1 \cap G$ ,  $A_2 = S_2 \cap G$ ,  $A_3 = S_3 \cap G$ ,  $B_1 = S_1 \cap H$ ,  $B_2 = S_2 \cap H$ ,  $B_3 = S_3 \cap H$ , und es seien  $B_1 \neq B_2$ . Dann ist*

$$\frac{d(B_2, B_3)}{d(A_2, A_3)} = \frac{d(B_1, B_2)}{d(A_1, A_2)}.$$

*Beweis.* Durch doppelte Anwendung von Korollar 36.17 auf die beiden durch  $s_1, s_2$  bzw.  $s_2, s_3$  gegebenen zweistrahligen Situationen erhält man

$$\frac{d(B_1, B_2)}{d(A_1, A_2)} = \frac{\|B_2\|}{\|A_2\|} = \frac{d(B_2, B_3)}{d(A_2, A_3)}.$$

□

## 36. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 36.1.** Rekapituliere Gesetzmäßigkeiten für Winkel (Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel, Wechselwinkel). Beweise diese elementargeometrisch und vektoriell.

**Aufgabe 36.2.** Rekapituliere die Begriffe *spitzes Dreieck*, *stumpfes Dreieck*, *gleichseitiges Dreieck* und *gleichschenkliges Dreieck*.

**Aufgabe 36.3.** Zeige elementargeometrisch, dass die Winkelsumme in einem Dreieck gleich 180 Grad ist.

**Aufgabe 36.4.** Zeige, dass es in einem nichtausgearteten Dreieck maximal einen rechten Winkel gibt.

**Aufgabe 36.5.** In den affinen Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  seien nichtausgeartete Dreiecke  $\Delta_1 = (A_1, B_1, C_1)$  und  $\Delta_2 = (A_2, B_2, C_2)$  gegeben. Zeige, dass es eine bijektive affine Abbildung

$$\varphi: E_1 \longrightarrow E_2$$

gibt, die die Dreiecke ineinander überführt.

**Aufgabe 36.6.** Zeige, dass sich bei einer Verschiebung einer euklidischen Ebene die Seitenlängen und die Winkel eines Dreiecks nicht ändern.

**Aufgabe 36.7.** Es seien  $D_1$  und  $D_2$  Dreiecke mit der Eigenschaft, dass zwei Seitenlängen und der von ihnen eingeschlossene Winkel übereinstimmen. Zeige, dass die beiden Dreiecke kongruent sind.

**Aufgabe 36.8.** Es seien  $D_1$  und  $D_2$  Dreiecke mit der Eigenschaft, dass eine Seitenlänge und die an der Seite anliegenden Winkel übereinstimmen. Zeige, dass die beiden Dreiecke kongruent sind.

**Aufgabe 36.9.** Zeige, dass ein gleichschenkliges Dreieck zu einem Dreieck genau dann kongruent ist, wenn es dazu eigentlich kongruent ist. Zeige ferner, dass ein nichtgleichschenkliges Dreieck zu einem Dreieck kongruent sein kann, aber nicht eigentlich kongruent.

**Aufgabe 36.10.** Es seien  $P_1 = (a_1, b_1)$ ,  $P_2 = (a_2, b_2)$  und  $P_3 = (a_3, b_3)$  drei Punkte im  $\mathbb{R}^2$ . Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$  dar.

**Aufgabe 36.11.** Es seien drei Punkte  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$  gegeben. Zeige, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks eine rationale Zahl ist.

**Aufgabe 36.12.** Zeige, dass zwei nichtausgeartete Dreiecke in einer euklidischen Ebene genau dann zueinander ähnlich sind, wenn ihre Winkel übereinstimmen.

**Aufgabe 36.13.** Welche elementargeometrischen Beweise für den Satz des Pythagoras kennen Sie?

**Aufgabe 36.14.** Es sei  $A, B, C$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Punkt  $C$ . Zeige, dass der Höhenfußpunkt zur Höhe durch  $C$  auf der Strecke  $\overline{AB}$  liegt.

**Aufgabe 36.15.** Bestimme für das Dreieck im  $\mathbb{R}^2$  mit den Eckpunkten  $(0, 0), (3, 0), (0, 5)$  die Seitenlängen, Parameterdarstellungen für die Höhengeraden, die Länge der Höhen und die Höhenfußpunkte.

**Aufgabe 36.16.** (a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen  $a, b, c \in ]0, 1[$  mit

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

(b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen  $a, b, c \in ]0, 1[$  mit

$$a^2 + b^2 \neq c^2.$$

(c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen  $a, b \in ]0, 1[$  und eine rationale Zahl  $c \in ]0, 1[$  mit

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ein *pythagoreisches Tripel* ist eine ganzzahlige Lösung  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$  der diophantischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Es heißt *primitiv*, wenn  $x, y, z$  keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

**Aufgabe 36.17.** Es seien  $x$  und  $y$  ungerade. Zeige, dass  $x^2 + y^2$  keine Quadratzahl ist.

**Aufgabe 36.18.** Es sei  $(x, y, z)$  ein pythagoreisches Tripel. Zeige, dass  $x$  oder  $y$  ein Vielfaches von 3 ist.

**Aufgabe 36.19.** Skizziere ein Dreieck  $D$  derart, dass eine Höhe das Dreieck  $D$  in zwei verschiedene rechtwinklige Dreiecke  $D_1$  und  $D_2$  unterteilt so, dass die Seitenlängen von  $D_1$  und  $D_2$  jeweils pythagoreische Tripel bilden. Man gebe die Seitenlängen an.

**Aufgabe 36.20.** Beweise den Höhensatz mit Hilfe des Kathetensatzes.

**Aufgabe 36.21.** Beweise die Umkehrung des Satzes von Thales: Es sei  $A, B, C$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel an  $C$ . Es sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$ . Dann ist

$$d(C, M) = d(A, M) = d(B, M),$$

d.h.  $C$  liegt auf dem Kreis mit Mittelpunkt  $M$  durch  $A$  (und  $B$ ).

**Aufgabe 36.22.** Beweise den Kosinussatz.

**Aufgabe 36.23.** Beweise die Umkehrung des Satzes des Pythagoras: Wenn in einem Dreieck die Beziehung

$$c^2 = a^2 + b^2$$

zwischen den Seitenlängen  $a, b, c$  gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig.

**Aufgabe 36.24.** Es sei  $M$  ein metrischer Raum, der aus drei Punkten bestehe. Zeige, dass man  $M$  als metrischen Unterraum einer euklidischen Ebene realisieren kann.

**Aufgabe 36.25.** Es sei  $A, B, C$  ein Dreieck in der euklidischen Ebene und es sei  $R$  der Rand des Dreiecks, also die Vereinigung der drei Seiten.

- (a) Definiere eine Metrik auf  $R$  derart, dass der Abstand von zwei Punkten, die auf der gleichen Seite liegen, einfach der induzierte Abstand ist und

$$d(x, y)$$

der minimale Abstand längs eines Weges auf  $R$  ist.

- (b) Handelt es sich um die induzierte Metrik?  
 (c) Kann es sein, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten über alle drei Seiten läuft?

In den folgenden Begriffen und Aufgaben wird das Konzept einer konvexen Hülle erläutert.

Eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten  $P, Q \in T$  auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke, also jeder Punkt der Form

$$rP + (1 - r)Q \text{ mit } r \in [0, 1],$$

ebenfalls zu  $T$  gehört.

Zu einer Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt die kleinste konvexe Teilmenge  $T$ , die  $U$  umfasst, die *konvexe Hülle* von  $U$ .

**Aufgabe 36.26.** Sind alle Vierecke konvex?

Die Existenz der konvexen Hülle beruht auf folgender Beobachtung.

**Aufgabe 36.27.** Zeige, dass der Durchschnitt von konvexen Mengen im  $\mathbb{R}^n$  wieder konvex ist.

**Aufgabe 36.28.** Es seien  $P_1, \dots, P_m$  Punkte im  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass die konvexe Hülle dieser Punkte gleich der durch nichtnegative baryzentrische Kombinationen gegebenen Menge

$$\left\{ \sum_{i=1}^m a_i P_i \mid \sum_{i=1}^m a_i = 1, a_i \geq 0 \text{ für alle } i \right\}$$

ist.

**Aufgabe 36.29.** Zerlege geometrisch die angegebene Strecke in fünf gleichlange Teile.



**Aufgabe 36.30.** Begründe, dass in der Situation von Satz 36.16 ähnliche Dreiecke vorliegen.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 36.31.** (5 Punkte)

Man gebe für die beiden Dreiecke

$$(2, 1), (2, -1), (5, -1) \text{ und } (-1, 1), (1, 1), (1, 4)$$

explizit eine Folge von Verschiebungen, Drehungen und Achsenspiegelungen an, die das eine Dreieck in das andere überführt.

**Aufgabe 36.32.** (4 Punkte)

Bestimme für das Dreieck im  $\mathbb{R}^2$  mit den Eckpunkten  $(2, -3), (4, 1), (5, 6)$  die Seitenlängen, Parameterdarstellungen für die Höhengeraden, die Länge der Höhen und die Höhenfußpunkte.

**Aufgabe 36.33.** (8 (2+1+1+4) Punkte)

Im  $\mathbb{R}^3$  sei das Dreieck mit den Eckpunkten  $(4, 2, -5), (4, 3, 7), (-5, 0, -6)$  gegeben.

- Bestimme eine Gleichung und eine Parameterdarstellung für die affine Ebene, in der das Dreieck liegt.
- Bestimme die Seitenlängen des Dreiecks.
- Bestimme die Winkel des Dreiecks.
- Bestimme eine Parameterdarstellung für die Höhen Gerade durch den Punkt  $(4, 2, -5)$ , die Länge dieser Höhe und den zugehörigen Höhenfußpunkt.

**Aufgabe 36.34.** (4 Punkte)

Es sei  $A, B, C$  ein Dreieck in einer euklidischen Ebene. Zeige, dass der Abstand des Eckpunktes  $C$  zur Seite  $\overline{AB}$  im Punkt  $A$  oder im Punkt  $B$  oder im Höhenfußpunkt zur Höhe durch  $C$  angenommen wird.

## 37. VORLESUNG - DREIECKSGEOMETRIE

Neben den drei Eckpunkten eines Dreieckes gibt es noch weitere charakteristische Punkte eines Dreieckes wie den Schwerpunkt, den Umkreismittelpunkt, den Inkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt.

## SEITENHALBIERENDE UND SCHWERPUNKT

**Definition 37.1.** Zu einer Menge von  $n$  Punkten  $P_1, \dots, P_n$  in einem affinen Raum  $E$  über einem reellen Vektorraum  $V$  nennt man die baryzentrische Kombination

$$\frac{1}{n}P_1 + \frac{1}{n}P_2 + \dots + \frac{1}{n}P_n$$

den *Schwerpunkt* der Punkte.

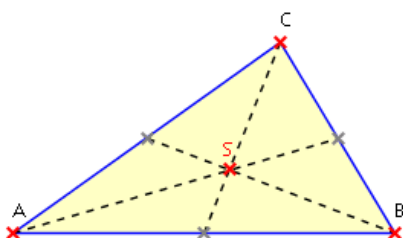
Es handelt sich also um diejenige baryzentrische Kombination der Punkte, bei der jeder Punkt mit der gleichen Gewichtung eingeht. Zu Punkten  $P, Q \in E$  heißt der Schwerpunkt  $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$  auch der Mittelpunkt der beiden Punkte (oder der Strecke  $\overline{P, Q}$ ). Bei zwei reellen Zahlen spricht man auch vom *arithmetischen Mittel* der beiden Zahlen. Bei  $n = 1, 2, 3$  ist der Schwerpunkt der Punkte auch der Schwerpunkt ihrer konvexen Hülle. Der Schwerpunkt von drei Punkten tritt als Durchschnitt der Seitenhalbierenden des Dreiecks auf.

**Definition 37.2.** Zu einem nichtausgearteten Dreieck  $A, B, C$  in einer euklidischen Ebene heißt die Gerade

$$\frac{B+C}{2} + s\left(A - \frac{B+C}{2}\right), s \in \mathbb{R},$$

die *Seitenhalbierende* durch  $A$ .

Die Seitenhalbierende durch  $A$  verläuft also durch den Punkt  $A$  und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Dreiecksseite.



**Satz 37.3.** In einem nichtausgearteten Dreieck in der euklidischen Ebene treffen sich die drei Seitenhalbierenden im Schwerpunkt  $\frac{A+B+C}{3}$  des Dreiecks.

*Beweis.* Es ist

$$\frac{B+C}{2} + \frac{1}{3}\left(A - \frac{B+C}{2}\right) = \frac{1}{3}A + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)B + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)C = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

ein Punkt der Seitenhalbierenden durch  $A$ . Wegen der Symmetrie der Situation gehört der Punkt auch zu den beiden anderen Seitenhalbierenden.  $\square$

Insbesondere schneidet der Schwerpunkt jede Seitenhalbierende im Verhältnis  $2 : 1$ , wobei der längere Teil am Punkt anliegt.

#### MITTELSENKRECHTE UND UMKREISMITTELPUNKT

**Definition 37.4.** Zu zwei Punkten  $A \neq B$  in der euklidischen Ebene nennt man die Gerade, die senkrecht auf der durch  $A$  und  $B$  gegebenen Gerade steht und durch den Mittelpunkt der Strecke zwischen  $A$  und  $B$  verläuft, die *Mittelsenkrechte* der Strecke.

Die Mittelsenkrechte wird durch

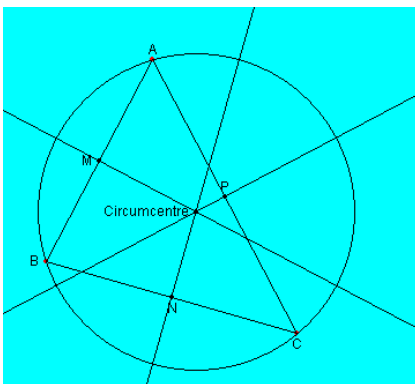
$$\frac{A+B}{2} + s(B-A)^\perp, s \in \mathbb{R},$$

beschrieben, wobei  $(B - A)^\perp$  einen beliebigen, zu  $B - A$  senkrechten Vektor  $\neq 0$  bezeichnet. Wenn  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  in kartesischen Koordinaten gegeben sind, so ist die Mittelsenkrechte gleich

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_2 - a_2 \\ -b_1 + a_1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

**Lemma 37.5.** *Es seien  $A, B$  verschiedene Punkte in einer euklidischen Ebene. Dann besteht die Mittelsenkrechte zu  $A$  und  $B$  genau aus allen Punkten, die zu  $A$  und  $B$  den gleichen Abstand haben.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 37.7. □



**Satz 37.6.** *Die Mittelsenkrechten der drei Seiten in einem nichtausgearteten Dreieck der euklidischen Ebene schneiden sich in einem Punkt. Alle Eckpunkte des Dreiecks besitzen zu diesem Schnittpunkt den gleichen Abstand.*

*Beweis.* Die Mittelsenkrechte zur Strecke zwischen  $A$  und  $B$  besteht nach Lemma 37.5 genau aus allen Punkten der Ebene, die zu diesen beiden Punkten den gleichen Abstand besitzt. Der Schnittpunkt  $P$  der Mittelsenkrechte zu  $A$  und  $B$  mit der Mittelsenkrechte zu  $A$  und  $C$  hat also zu allen drei Eckpunkten den gleichen Abstand. Dies ergibt den Zusatz und auch, dass sich alle drei Mittelsenkrechten in diesem Punkt treffen. □

**Definition 37.7.** Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten in einem nichtausgearteten Dreieck in der euklidischen Ebene heißt *Umkreismittelpunkt*.

Der Umkreismittelpunkt ist der Mittelpunkt des *Umkreises*; das ist derjenige Kreis, der die drei Eckpunkte des Dreiecks (auf seiner Peripherie) enthält.

## WINKELHALBIERENDE UND INKREISMITTELPUNKT

**Definition 37.8.** Zu zwei linear unabhängigen Vektoren  $v$  und  $w$  in einem normierten reellen Vektorraum  $V$  nennt man die von

$$\frac{v}{\|v\|} + \frac{w}{\|w\|}$$

erzeugte Gerade die *Winkelhalbierende* der beiden Strahlen.

Die Winkelhalbierende wird also ohne Bezug auf einen Winkel definiert, es wird ja noch nicht einmal ein Skalarprodukt vorausgesetzt. Wenn sich aber die beiden Vektoren in einem euklidischen Raum befinden, so zeigt eine einfache Überlegung (siehe Aufgabe 37.13), dass die Winkelhalbierende in der Tat den Winkel halbiert. Die Definition überträgt sich direkt auf einen affinen Raum über einem normierten Vektorraum, und zwar definieren drei nicht kollineare Punkte jeweils eine Winkelhalbierende durch jeden der beteiligten Punkte.

**Lemma 37.9.** *Es seien  $v, w$  linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^2$ . Dann liegen auf der Winkelhalbierenden zu  $v$  und  $w$  nur Punkte, die zu den Geraden  $\mathbb{R}v$  und  $\mathbb{R}w$  den gleichen Abstand haben. Wenn ein Punkt zu  $\mathbb{R}v$  und  $\mathbb{R}w$  den gleichen Abstand besitzt, so liegt er auf der Winkelhalbierenden zu  $v$  und  $w$  oder auf der Winkelhalbierenden zu  $v$  und  $-w$ .*

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $v$  und  $w$  normiert sind. Es sei  $P \in \mathbb{R}^2$ . Nach Korollar 35.7 ist

$$d(P, \mathbb{R}v)^2 = \|P\|^2 - \langle P, v \rangle^2$$

und entsprechend

$$d(P, \mathbb{R}w)^2 = \|P\|^2 - \langle P, w \rangle^2.$$

Also sind die Abstände genau dann gleich, wenn

$$\langle P, v \rangle = \pm \langle P, w \rangle$$

ist. Wenn

$$P = s(v + w)$$

ist, so ist

$$\langle P, v \rangle = \langle s(v + w), v \rangle = s + s \langle w, v \rangle = \langle s(v + w), w \rangle = \langle P, w \rangle$$

und die Gleichung gilt. Für die Umkehrung können wir

$$P = sv + tw$$

ansetzen. Bei

$$\langle P, v \rangle = \langle P, w \rangle$$

folgt

$$s + t \langle v, w \rangle = \langle sv + tw, v \rangle = \langle sv + tw, w \rangle = t + s \langle v, w \rangle$$

und somit

$$s(1 - \langle v, w \rangle) = t(1 - \langle v, w \rangle).$$

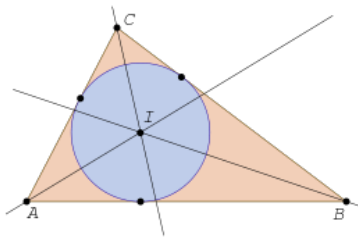
Da  $v$  und  $w$  normiert und linear unabhängig sind, ist nach Aufgabe 31.9

$$|\langle v, w \rangle| < 1,$$

der rechte Faktor ist nicht 0 und somit ist  $s = t$ . Bei

$$\langle P, v \rangle = -\langle P, w \rangle$$

folgt mit einer ähnlichen Überlegung  $s = -t$ . □



**Satz 37.10.** Die drei Winkelhalbierenden in einem nichtausgearteten Dreieck treffen sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt, der zu jeder Seite des Dreiecks den gleichen Abstand besitzt. Wenn die Eckpunkte durch  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  und die Seitenlängen mit  $a = d(B, C)$ ,  $b = d(A, C)$ ,  $c = d(A, B)$  bezeichnet werden, so besitzt dieser Schnittpunkt die Koordinaten

$$\frac{1}{a + b + c} \begin{pmatrix} aa_1 + bb_1 + cc_1 \\ aa_2 + bb_2 + cc_2 \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Nach Lemma 37.9 besteht die Winkelhalbierende zu  $A$  aus Punkten, die zu den anliegenden Seiten (geraden)  $\overrightarrow{\mathbb{R}AB}$  und  $\overrightarrow{\mathbb{R}AC}$  den gleichen Abstand haben. Ebenso besteht die Winkelhalbierende zu  $B$  aus Punkten, die zu den anliegenden Seiten (geraden)  $\overrightarrow{\mathbb{R}BA}$  und  $\overrightarrow{\mathbb{R}BC}$  den gleichen Abstand haben. Daher besitzt der Schnittpunkt dieser beiden Winkelhalbierenden, den es geben muss, zu allen drei Seiten den gleichen Abstand.

Zur Koordinatenbestimmung schreiben wir die Winkelhalbierende durch  $A$  als

$$A + s \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b} \right)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \left( \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b} \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} \right).$$

Die Gleichsetzung mit der Winkelhalbierenden durch  $B$  führt auf

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \left( \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b} \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + t \left( \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{a} \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix} \right).$$

Die Lösung ist durch

$$s = \frac{bc}{a+b+c}$$

und

$$t = \frac{ac}{a+b+c}$$

gegeben, da dies eingesetzt jeweils zu

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{bc}{a+b+c} \left( \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b} \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} a_1(a+b+c) + b(b_1 - a_1) + c(c_1 - a_1) \\ a_2(a+b+c) + b(b_2 - a_2) + c(c_2 - a_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} aa_1 + bb_1 + cc_1 \\ aa_2 + bb_2 + cc_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

führt. Dies ist also der Schnittpunkt, und zwar von allen drei Winkelhalbierenden.  $\square$

**Definition 37.11.** Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden in einem nichtausgearteten Dreieck in der euklidischen Ebene heißt *Inkreismittelpunkt*.

Der Kreis um den Inkreismittelpunkt, der die drei Seiten des Dreiecks tangential trifft, heißt entsprechend *Inkreis*.

## HÖHENSCHNITTPUNKT

**Lemma 37.12.** *Es sei  $U$  der Umkreismittelpunkt und  $S$  der Schwerpunkt eines nichtausgearteten Dreieck in der euklidischen Ebene. Dann liegt der Punkt*

$$U + 3\overrightarrow{US}$$

*auf jeder Höhengeraden des Dreiecks. Insbesondere schneiden sich die drei Höhengeraden in einem Punkt.*

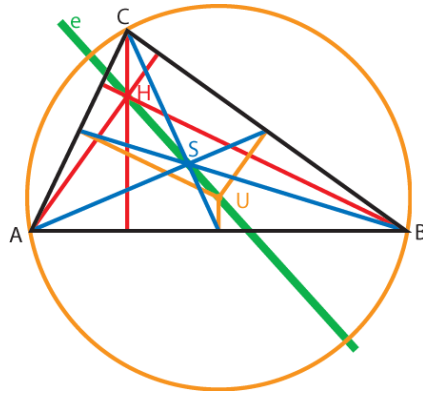
*Beweis.* Wir machen  $U$  zum Ursprungspunkt, sodass die Punkte  $A, B, C$  die gleiche Norm besitzen. Der in Frage stehende Punkt ist dann  $A + B + C$ . Die durch diesen Punkt und  $A$  gegebene Gerade hat den Richtungsvektor  $B + C$ . Sie verläuft durch  $A$  und es ist

$$\langle B + C, B - C \rangle = \langle B, B \rangle - \langle C, C \rangle.$$

Wegen der Normgleichheit ist dies 0, also handelt es sich um die Höhengerade durch  $A$ .  $\square$

**Definition 37.13.** Zu einem nichtausgearteten Dreieck  $A, B, C$  in einer euklidischen Ebene heißt der Schnittpunkt der drei Höhen der *Höhenschnittpunkt*.

## DIE EULERSCHE GERADE

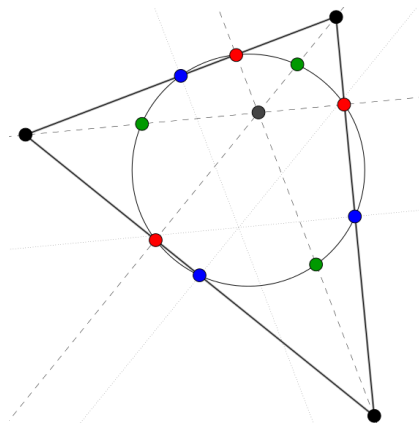


**Korollar 37.14.** *Der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt eines nichtausgearteten Dreiecks in der euklidischen Ebene liegen auf einer Geraden.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 37.12. □

Wenn das Dreieck gleichseitig ist, so fallen die drei Punkte zusammen und es gibt viele Geraden durch diesen Punkt. Andernfalls sind diese Punkte nicht gleich (siehe Aufgabe 37.2) und es gibt genau eine Gerade, die durch diese drei Punkte verläuft. Man nennt sie die *eulersche Gerade*.

## DER FEUERBACHKREIS



Die neun Punkte des Neun-Punkte-Kreises: Die Seitenmittelpunkte (blau), die Höhenfußpunkte (rot) und die Mittelpunkte (grün) zwischen Eckpunkten und Höhenschnittpunkt (schwarz).

**Lemma 37.15.** *Durch die Eckpunkte  $A, B, C$  sei ein nichtausgeartetes Dreieck  $\Delta$  in der euklidischen Ebene gegeben. Es sei  $F$  der Umkreis zu den Seitenmittelpunkten des Dreiecks. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Der Radius von  $F$  ist die Hälfte des Umkreisradius von  $\Delta$ .*
- (2) *Die Verbindungsstrecken des Höhenschnittpunkts und der Eckpunkte werden durch  $F$  halbiert.*
- (3) *Die Höhenfußpunkte von  $\Delta$  liegen auf  $F$ .*

*Beweis.* (1) Es sei  $U$  der Umkreismittelpunkt des Ausgangsdreiecks, den wir als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems ansetzen. Wir betrachten dann den Punkt

$$U' = \frac{1}{2}(A + B + C).$$

Der Mittelpunkt  $A' = \frac{1}{2}(B + C)$  der Dreiecksseite durch  $B$  und  $C$  besitzt zu  $U'$  den Abstand

$$\left\| \frac{1}{2}(B + C) - U' \right\| = \left\| \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(A + B + C) \right\| = \frac{1}{2}\|A\|.$$

Da die Normen von allen Eckpunkten  $A, B, C$  nach Wahl von  $U$  gleich sind, ist  $U'$  der Umkreismittelpunkt des Seitenmittelpunktsdreiecks und der Radius ist die Hälfte des Umkreisradius.

(2) Nach Lemma 37.12 ist  $A + B + C$  der Höhenschnittpunkt. Daher ist der Mittelpunkt der Strecke von  $A$  zum Höhenschnittpunkt gleich

$$\frac{1}{2}(A + B + C) + \frac{1}{2}A = A + \frac{1}{2}(B + C).$$

Der Abstand davon zu  $U'$  ist

$$\left\| \frac{1}{2}(A + B + C) - \left( A + \frac{1}{2}(B + C) \right) \right\| = \left\| -\frac{1}{2}A \right\| = \frac{1}{2}\|A\|.$$

(3) Zunächst liegen die unter (1) bzw. (2) konstruierten Punkte auf dem Kreis  $F$  gegenüber. Es ist ja

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(B + C) \right) + \frac{1}{2} \left( A + \frac{1}{2}(B + C) \right) = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

der Mittelpunkt von  $F$ . Somit bilden ein Seitenmittelpunkt, der gegenüberliegende Halbierungspunkt zwischen Eckpunkt und Höhenschnittpunkt und der entsprechende Höhenfußpunkt ein rechtwinkliges Dreieck. Dessen Thaleskreis ist stets der Kreis  $F$ .  $\square$

Den Kreis in der vorstehenden Aussage nennt man den *Feuerbachkreis* oder auch den *Neun-Punkte-Kreis*.

## 37. ARBEITSBLATT

## ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 37.1.** Es seien  $E, F$  affine Räume und

$$\varphi: E \longrightarrow F$$

eine affin-lineare Abbildung. Zeige, dass der Schwerpunkt der Punkte  $P_1, \dots, P_n$  unter  $\varphi$  in den Schwerpunkt der Bildpunkte  $\varphi(P_1), \dots, \varphi(P_n)$  überführt wird.

**Aufgabe 37.2.** Zeige, dass ein Dreieck genau dann gleichseitig ist, wenn der Schwerpunkt mit dem Umkreismittelpunkt übereinstimmt.

**Aufgabe 37.3.** Zeige, dass es kein nichtausgeartetes gleichseitiges Dreieck im  $\mathbb{R}^2$  gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

**Aufgabe 37.4.** Zeige, dass das Seitenmittelpunktsdreieck eines Dreiecks ähnlich zum Ausgangsdreieck ist.

**Aufgabe 37.5.** Bestimme für das Dreieck mit den Eckpunkten

$$(-1, 3), (0, -5), (2, 1)$$

im  $\mathbb{R}^2$  die Seitenhalbierenden. Bestimme den Schwerpunkt auf unterschiedliche Arten.

**Aufgabe 37.6.** Bestimme für das durch die Standardvektoren  $e_1, e_2, e_3$  im  $\mathbb{R}^3$  gegebene Dreieck die Seitenhalbierenden und den Schwerpunkt.

**Aufgabe 37.7.** Es seien  $A, B$  verschiedene Punkte in einer euklidischen Ebene. Zeige, dass die Mittelsenkrechte zu  $A$  und  $B$  aus allen Punkten besteht, die zu  $A$  und  $B$  den gleichen Abstand haben.

**Aufgabe 37.8.** Es sei  $D$  ein nichtausgeartetes Dreieck. Zeige, dass je zwei Mittelsenkrechten linear unabhängig sind.

**Aufgabe 37.9.** Bestimme für das Dreieck mit den Eckpunkten

$$(-2, 2), (0, 4), (5, 0)$$

im  $\mathbb{R}^2$  die Mittelsenkrechten, den Umkreismittelpunkt und den Radius des Umkreises.

**Aufgabe 37.10.** Im  $\mathbb{R}^2$  sei ein nichtausgeartetes Dreieck gegeben, wobei die Eckpunkte die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

haben. Es sei

$$d = 2(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)).$$

Zeige, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks die Koordinaten

$$x = \frac{(x_1^2 + y_1^2)(y_2 - y_3) + (x_2^2 + y_2^2)(y_3 - y_1) + (x_3^2 + y_3^2)(y_1 - y_2)}{d}$$

und

$$y = \frac{(x_1^2 + y_1^2)(x_3 - x_2) + (x_2^2 + y_2^2)(x_1 - x_3) + (x_3^2 + y_3^2)(x_2 - x_1)}{d}$$

besitzt.

**Aufgabe 37.11.** Zeige, dass der Umkreismittelpunkt eines nichtausgearteten Dreiecks  $(A, B, C)$  in einer euklidischen Ebene unter einer Verschiebung und unter einer winkeltreuen Abbildung auf den Umkreismittelpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

**Aufgabe 37.12.** Zeige, dass der Umkreismittelpunkt eines nichtausgearteten Dreiecks  $(A, B, C)$  in einer euklidischen Ebene unter einer bijektiven affin-linearen Abbildung nicht unbedingt auf den Umkreismittelpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

**Aufgabe 37.13.** Es seien  $v, w$  linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^2$ . Zeige, dass die Winkelhalbierende zu  $v$  und  $w$  mit  $v$  bzw.  $w$  den gleichen Winkel bildet.

**Aufgabe 37.14.** Zeige, dass der Inkreismittelpunkt eines nichtausgearteten Dreiecks  $(A, B, C)$  in einer euklidischen Ebene unter einer Verschiebung und unter einer winkeltreuen Abbildung auf den Inkreismittelpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

**Aufgabe 37.15.** Zeige, dass der Inkreismittelpunkt eines nichtausgearteten Dreiecks  $(A, B, C)$  in einer euklidischen Ebene unter einer bijektiven affin-linearen Abbildung nicht unbedingt auf den Inkreismittelpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

**Aufgabe 37.16.** Skizziere ein Dreieck, bei dem zwei Höhenfußpunkte außerhalb der Dreiecksseiten liegen.

**Aufgabe 37.17.** Zeige, dass in einem nichtausgearteten Dreieck mindestens ein Höhenfußpunkt zwischen den Eckpunkten liegt.

**Aufgabe 37.18.** Es sei  $D$  ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln im Punkt  $A$  und der gegenüberliegenden Seite  $a$ . Zeige, dass die Seitenhalbierende durch  $A$ , die Winkelhalbierende durch  $A$ , die Höhe durch  $A$  und die Mittelsenkrechte zu  $a$  übereinstimmen.

In den folgenden Aufgaben setze man einen naiven Flächeninhaltsbegriff voraus. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist das Produkt der Seitenlängen und für den Flächeninhalt gilt die Zerlegungseigenschaft (oder Zerschneidungseigenschaft) und die Verschiebungsinvarianz.

**Aufgabe 37.19.** Begründe, dass bei einem Parallelogramm der Flächeninhalt gleich der Grundseite mal Höhe ist.

**Aufgabe 37.20.** Begründe, dass der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich  $\frac{1}{2}$  „Grundseite mal Höhe“ ist (gemeint ist  $\frac{1}{2}$  Grundseitenlänge mal Höhenlänge).

**Aufgabe 37.21.** Zeige, dass der Höhenschnittpunkt eines nichtausgearteten Dreiecks  $(A, B, C)$  in einer euklidischen Ebene unter einer Verschiebung und unter einer winkeltreuen Abbildung auf den Höhenschnittpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

**Aufgabe 37.22.** Zeige, dass der Höhenschnittpunkt eines nichtausgearteten Dreiecks  $(A, B, C)$  in einer euklidischen Ebene unter einer bijektiven affin-linearen Abbildung nicht unbedingt auf den Höhenschnittpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

**Aufgabe 37.23.** Beweise elementargeometrisch den *Sinussatz*, also die Aussage, dass in einem nichtausgearteten Dreieck die Gleichheiten

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

gelten, wobei  $a, b, c$  die Seitenlängen gegenüber den Ecken mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  sind.

**Aufgabe 37.24.** Durch die Punkte  $A, B, C$  sei ein Dreieck mit den Seitenlängen  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben. Es sei  $F$  der Flächeninhalt des Dreiecks. Zeige

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{abc}{2F}.$$

In der folgenden Aufgabe wird die (eine Variante der) *Heronische Formel* bewiesen.

**Aufgabe 37.25.** Es seien  $a, b, c$  die Seitenlängen eines Dreiecks. Zeige, dass der Flächeninhalt des Dreiecks gleich

$$F = \frac{\sqrt{2a^2c^2 + 2c^2b^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{4}$$

ist.

**Aufgabe 37.26.** Es sei  $D$  ein nichtausgeartetes Dreieck in der Ebene mit den drei Eckpunkten  $A, B, C$ . Zeige, dass man die Höhen, die Mittelsenkrechten, die Winkelhalbierenden und die Seitenhalbierenden mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

**Aufgabe 37.27.** Ein Dreieck soll die Grundseite  $[0, s]$  und die Höhe  $h$  besitzen ( $s, h > 0$ ). Für welchen Höhenfußpunkt  $x$  besitzt das Dreieck einen minimalen Umfang, und wie lange ist dieser?

**Aufgabe 37.28.** Wir fassen die Menge aller (auch entarteter, geordneter) Dreiecke  $\Delta = (A, B, C)$  im  $\mathbb{R}^2$  über ihre Koordinaten  $A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2), C = (C_1, C_2)$  als den Vektorraum  $\mathbb{R}^6$  auf. Insbesondere kann man so Dreiecke miteinander addieren und mit einem Skalar  $s \in \mathbb{R}$  multiplizieren.

- (a) Zeige, dass die Dreiecke  $\Delta$  und  $s\Delta$  mit  $\Delta$  nichtausgeartet und  $s \neq 0$  zueinander ähnlich sind.
- (b) Es sei  $S$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $(A, B, C)$ . Zeige, dass die Dreiecke

$$(A, B, C), (B, C, A), (C, A, B) \text{ und } (S, S, S)$$

linear abhängig sind.

- (c) Bestimme, ob die folgenden Mengen an Dreiecken Untervektorräume des Dreiecksraumes bilden oder nicht. Wenn ja, so bestimme ihre Dimension.
  - (a) Die Menge aller nichtentarteten Dreiecke.
  - (b) Die Menge aller Dreiecke mit 0 als erstem Eckpunkt.
  - (c) Die Menge aller Dreiecke mit Schwerpunkt 0.
  - (d) Die Menge aller gleichseitigen Dreiecke.

- (e) Die Menge aller Dreiecke, deren Umkreis der Einheitskreis ist.
- (f) Die Menge aller zu einem Punkt zusammengeschrumpften Dreiecke.
- (g) Die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke.
- (h) Die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke, deren rechter Winkel sich als erster Punkt in 0 befindet und deren zweiter Punkt auf der  $x$ -Achse liegt.
- (i) Die Menge aller Dreiecke mit Höhenschnittpunkt in 0.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 37.29.** (4 Punkte)

Bestimme für das Dreieck  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, 4)$  den Schwerpunkt, den Umkreismittelpunkt, den Inkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt.

**Aufgabe 37.30.** (3 Punkte)

Bestimme für das Dreieck  $(2, 3)$ ,  $(1, 8)$ ,  $(6, -5)$  die eulersche Gerade.

**Aufgabe 37.31.** (4 Punkte)

Bestimme für das Dreieck  $(4, -3)$ ,  $(7, 2)$ ,  $(-1, 5)$  den Mittelpunkt und den Radius des Feuerbachkreises.

**Aufgabe 37.32.** (4 Punkte)

Bestimme für das durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegebene Dreieck im  $\mathbb{R}^3$  die Höhe durch  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  und den Flächeninhalt des Dreiecks.

**Aufgabe 37.33.** (2 Punkte)

Betrachte den Vektorraum aller Dreiecke im  $\mathbb{R}^2$  aus Aufgabe 37.28. Ist die Abbildung, die einem Dreieck seinen Umfang zuordnet, eine Linearform?

In der folgenden Aufgabe wird auf die Konvergenz von Folgen im  $\mathbb{R}^2$  Bezug genommen. Sie liegt genau dann vor, wenn beide Komponentenfolgen in  $\mathbb{R}$  konvergieren.

**Aufgabe 37.34.** (6 Punkte)

Zu einem Dreieck  $\Delta = (A, B, C)$  ist das Seitenmittelpunktsdreieck durch die Eckpunkte  $\frac{1}{2}(A+B)$ ,  $\frac{1}{2}(A+C)$ ,  $\frac{1}{2}(B+C)$  gegeben. Diese Konstruktion ergibt eine rekursiv definierte Folge von Dreiecken  $\Delta_n$ , wobei  $\Delta_1 = \Delta$  und  $\Delta_{n+1}$  das Seitenmittelpunktsdreieck zu  $\Delta_n$  ist. Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^2$  mit  $x_n \in \Delta_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

## 38. VORLESUNG - BILINEARFORMEN

## BILINEARFORMEN

Reelle Skalarprodukte sind positiv definite symmetrische Bilinearformen. Hier besprechen wir Bilinearformen allgemein. Neben Skalarprodukten sind die Hesse-Formen wichtig, die in der höherdimensionalen Analysis betrachtet werden, um Extrema zu bestimmen und die Minkowski-Formen, mit denen man die spezielle Relativitätstheorie beschreiben kann (siehe Vorlesung 40).

**Definition 38.1.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *Bilinearform*, wenn für alle  $v \in V$  die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle  $w \in V$  die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

$K$ -linear sind.

Bilinear bedeutet einfach multilinear in zwei Komponenten, diese Eigenschaft haben wir schon im Zusammenhang mit Determinanten kennengelernt. Ein extremes Beispiel ist die *Nullform*, die jedem Paar den Nullwert zuordnet. Es ist einfach, eine Vielzahl von Bilinearformen auf dem  $K^n$  anzugeben.

**Beispiel 38.2.** Es sei  $V = K^n$  und seien  $a_{ij} \in K$  für  $1 \leq i, j \leq n$  fixiert. Dann ist die Zuordnung

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \Psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$$

eine Bilinearform. Bei

$$a_{ij} = 0$$

für alle  $i, j$  ist dies die Nullform; bei

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

liegt das Standardskalarprodukt vor (wobei der Ausdruck für jeden Körper einen Sinn ergibt, aber die Eigenschaft, positiv definit zu sein, gegenstandslos ist). Bei  $n = 4$  und

$$\Psi(x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

spricht man von einer *Minkowski-Form*. Bei  $n = 2$  und

$$\Psi(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1y_2 - x_2y_1$$

handelt es sich um die Determinante im zweidimensionalen Fall.

Eine wichtige Eigenschaft von Bilinearformen, die Skalarprodukte erfüllen, wird in der nächsten Definition formuliert.

**Definition 38.3.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Bilinearform

$$V \times V \longrightarrow K, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *nicht ausgeartet*, wenn für alle  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle  $w \in V$ ,  $w \neq 0$ , die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

nicht die Nullabbildung sind.

Wir werden in Lemma 38.5 für Vektorräume, auf denen eine nicht-ausgeartete Bilinearform gegeben ist, eine bijektive Beziehung zwischen Vektoren und Linearformen beweisen. Dies gilt insbesondere für Skalarprodukte. Generell besteht eine enge Beziehung zwischen Bilinearformen und linearen Abbildungen in den Dualraum.

**Lemma 38.4.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit dem Dualraum  $V^*$ . Es sei*

$$\Theta: V \longrightarrow V^*$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist durch*

$$\Psi(u, v) = (\Theta(u))(v)$$

*eine Bilinearform auf  $V$  gegeben.*

*Beweis.* Da  $\Theta(u) \in V^*$  ist, liefert die Auswertung an einem Vektor  $v \in V$  ein Element des Grundkörpers. Die Linearität in der zweiten Komponenten beruht direkt darauf, dass  $\Theta(u)$  zum Dualraum gehört, und die Linearität in der ersten Komponenten beruht auf der Linearität von  $\Theta$ .  $\square$

## DER GRADIENT

**Lemma 38.5.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, der mit einer Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  versehen sei. Dann gelten folgende Aussagen*

(1) *Für jeden Vektor  $u \in V$  sind die Zuordnungen*

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle u, v \rangle,$$

*und*

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, u \rangle,$$

*$K$ -linear.*

(2) *Die Zuordnung*

$$V \longrightarrow V^*, u \longmapsto \langle u, - \rangle,$$

*ist  $K$ -linear.*

(3) *Wenn  $\langle -, - \rangle$  nicht ausgeartet ist, so ist die Zuordnung in (2) injektiv.*

*Ist  $V$  zusätzlich endlichdimensional, so ist diese Zuordnung bijektiv.*

*Beweis.* (1) folgt unmittelbar aus der Bilinearität. (2). Es seien  $u_1, u_2 \in V$  und  $a_1, a_2 \in K$ . Dann ist für jeden Vektor  $v \in V$

$$\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle,$$

und dies bedeutet gerade die Linearität der Zuordnung. (3). Da die Zuordnung nach (2) linear ist, müssen wir zeigen, dass der Kern davon trivial ist. Es sei also  $u \in V$  derart, dass  $\langle u, - \rangle$  die Nullabbildung ist. D.h.  $\langle u, v \rangle = 0$  für alle  $v \in V$ . Dann muss aber nach der Definition von nicht ausgeartet  $u = 0$  sein. Wenn  $V$  endliche Dimension hat, so liegt eine injektive lineare Abbildung zwischen Vektorräumen der gleichen Dimension vor, und eine solche ist nach Korollar 11.9 bijektiv.  $\square$

Wenn es also in einem endlichdimensionalen Vektorraum eine fixierte nichtausgeartete Bilinearform gibt, so gibt es zu jeder Linearform einen eindeutig bestimmten Vektor, mit dem diese Linearform beschrieben werden kann. Genauer: es gibt dann einen Vektor  $y \in V$  mit

$$L(v) = \langle y, v \rangle$$

für alle  $v \in V$  und einen Vektor  $z \in V$  mit

$$L(v) = \langle v, z \rangle.$$

In dieser Situation heißt  $y$  der *Linksgradient* zu  $L$  bezüglich der Bilinearform und  $z$  der *Rechtsgradient*. Bei einem Skalarprodukt und generell bei einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform (siehe weiter unten) fallen die beiden Begriffe zusammen, man spricht von dem *Gradienten*. Für euklidische Vektorräume formulieren wir diese Beziehung noch einmal explizit.

**Korollar 38.6.** Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor  $w \in V$  mit

$$f(v) = \langle w, v \rangle.$$

Wenn  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und  $f(u_i) = a_i$  ist, so ist dieser Vektor gleich  $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ .

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Lemma 38.5 (3). Der Zusatz ist klar wegen

$$\langle w, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j u_j, u_i \right\rangle = a_i = f(u_i).$$

□

## DIE GRAMSCHE MATRIX

**Definition 38.7.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Dann heißt die  $n \times n$ -Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i, j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis.

In Beispiel 38.2 bildet  $(a_{ij})_{ij}$  die Gramsche Matrix bezüglich der Standardbasis des  $K^n$ . Wenn die Gramsche Matrix zu einer Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  bezüglich einer Basis  $v_1, \dots, v_n$  gegeben ist, so kann man daraus  $\langle v, w \rangle$  für beliebige Vektoren berechnen. Man schreibt  $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$  und  $w = \sum_{i=1}^n c_i v_i$  und erhält mit dem allgemeinen Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i c_j \langle v_i, w_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \left( \sum_{j=1}^n c_j \langle v_i, w_j \rangle \right) \\ &= (b_1, \dots, b_n) G \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man erhält also den Wert der Bilinearform an zwei Vektoren, indem man die Gramsche Matrix auf das Koordinatentupel des zweiten Vektors anwendet

und das Ergebnis (ein Spaltenvektor) mit dem Koordinatentupel des ersten Vektors als Zeilentupel von links multipliziert. Kurz und ungenau ist also

$$\langle v, w \rangle = v^{\text{tr}} G w.$$

**Lemma 38.8.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Es seien  $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$  und  $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_n$  zwei Basen von  $V$  und es seien  $G$  bzw.  $H$  die Gramschen Matrizen von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basen. Zwischen den Basiselementen gelten die Beziehungen*

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i,$$

die wir durch die Übergangsmatrix  $A = (a_{ij})_{i,j}$  ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H = A^{\text{tr}} G A.$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} \langle w_r, w_s \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_{ir} v_i, \sum_{k=1}^n a_{ks} v_k \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{ir} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} \left( \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} (G \circ A)_{is} \\ &= (A^{\text{tr}} \circ (G \circ A))_{rs}. \end{aligned}$$

□

## SYMMETRISCHE BILINEARFORMEN

**Definition 38.9.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle  $v, w \in V$  gilt.

Wie im Fall eines Skalarproduktes gilt wieder eine *Polarisationsformel*.

**Lemma 38.10.** *Es sei  $K$  ein Körper mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik und sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$ . Dann gilt die Beziehung*

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\langle v + w, v + w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 38.15. □

**Definition 38.11.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Dann nennt man zu einer Linearform

$$L: V \longrightarrow K$$

den eindeutig bestimmten Vektor  $z \in V$  mit

$$L(v) = \langle z, v \rangle = \langle v, z \rangle$$

den *Gradienten* zu  $L$  bezüglich der Bilinearform.

**Definition 38.12.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zwei Vektoren  $v, w \in V$  heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle v, w \rangle = 0$$

ist.

**Definition 38.13.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Eine Basis  $v_i, i \in I$ , von  $V$  heißt *Orthogonalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$

für alle  $i \neq j$  ist.

Für eine symmetrische Bilinearform ist es durchaus möglich, dass, anders als bei Skalarprodukten, ein von 0 verschiedener Vektor zu sich selbst orthogonal ist. Es kann auch, im ausgearteten Fall, von 0 verschiedene Vektoren geben, die orthogonal zu allen Vektoren sind. Wie im Fall eines Skalarproduktes gibt es Orthogonalbasen.

**Definition 38.14.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Der Untervektorraum

$$\{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in V\}$$

heißt *Ausartungsraum* zur Bilinearform.

Der Ausartungsraum ist in der Tat ein Untervektorraum von  $V$ , siehe Aufgabe 38.13.

**Satz 38.15.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Dann besitzt  $V$  eine Orthogonalbasis.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 38.18. □

### DER VEKTORRAUM DER BILINEARFORMEN

Es sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  und seien  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  Bilinearformen auf  $V$ . Dann erklärt man die Summe dieser beiden Bilinearformen punktweise als diejenige Bilinearform, die an der Stelle  $(u, v)$  den Summenwert erhält, also

$$(\Psi_1 + \Psi_2)(u, v) := \Psi_1(u, v) + \Psi_2(u, v).$$

Entsprechend definiert man für einen Skalar  $c \in K$  die Form  $c\Psi$  durch

$$(c\Psi)(u, v) = c\Psi(u, v).$$

Die entstehenden Funktionen sind wieder bilinear, siehe Aufgabe 38.23. Damit erhält man eine Vektorraumstruktur auf der Menge aller Bilinearformen auf  $V$ .

**Definition 38.16.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$ . Die Menge aller Bilinearformen auf  $V$ , versehen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation, heißt *Vektorraum der Bilinearformen*. Er wird mit  $\text{Bilin}(V)$  bezeichnet.

**Lemma 38.17.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Zu einer jeden Basis  $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$  ist die Abbildung*

$$\text{Bilin}(V) \longrightarrow \text{Mat}_n(K), \Psi \longmapsto G_{\mathbf{v}}(\Psi),$$

*die einer Bilinearform  $\Psi$  ihre Gramsche Matrix bezüglich der gegebenen Basis zuordnet, eine Isomorphie von Vektorräumen.*

*Beweis.* Die Injektivität der Abbildung folgt aus Lemma 16.6, die Surjektivität daraus, dass man eine beliebige Matrix im Sinne von Beispiel 38.2 als Bilinearform interpretieren kann. Die Linearität folgt unmittelbar aus der punktweisen Definition der Vektorraumstruktur auf  $\text{Bilin}(V)$ .  $\square$

### SESQUILINEARFORMEN

**Definition 38.18.** Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ . Eine Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

heißt *antilinear* (oder *semilinear*), wenn

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

für alle  $u, v \in V$  und wenn

$$\varphi(\lambda v) = \bar{\lambda}\varphi(v)$$

für alle  $v \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt.

Wenn man die komplexen Vektorräume als reelle Vektorräume auffasst, so handelt es sich insbesondere um reell-lineare Abbildungen. Dieser Eigenschaft sind wir schon bei komplexen Skalarprodukten begegnet.

**Definition 38.19.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *Sesquilinearform*, wenn für alle  $v \in V$  die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow \mathbb{C}, w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

$\mathbb{C}$ -antilinear und für alle  $w \in V$  die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow \mathbb{C}, v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

$\mathbb{C}$ -linear sind.

Wir fordern also die Linearität in der ersten und die Antilinearität in der zweiten Komponenten. Es gibt auch die andere Konvention.

Viele Begriffe und Aussagen übertragen sich mit leichten Abwandlungen von der reellen auf die komplexe Situation.

**Definition 38.20.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum zusammen mit einer Sesquilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Dann heißt die  $n \times n$ -Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i, j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis.

Wenn die Gramsche Matrix zu einer Sesquilinearform  $\langle -, - \rangle$  bezüglich einer Basis  $v_1, \dots, v_n$  gegeben ist, so kann man daraus  $\langle v, w \rangle$  für beliebige Vektoren berechnen. Man schreibt  $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$  und  $w = \sum_{i=1}^n c_i v_i$  und erhält mit dem allgemeinen Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i \bar{c}_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \left( \sum_{j=1}^n \bar{c}_j \langle v_i, v_j \rangle \right) \\ &= (b_1, \dots, b_n) G \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man erhält also den Wert der Sesquilinearform an zwei Vektoren, indem man die Gramsche Matrix auf das Koordinatentupel des komplex-konjugierten zweiten Vektors anwendet und das Ergebnis (ein Spaltenvektor) mit dem Koordinatentupel des ersten Vektors als Zeilentupel von links multipliziert. Kurz und ungenau ist also

$$\langle v, w \rangle = v^{\text{tr}} G \bar{w}.$$

**Lemma 38.21.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit einer Sesquilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Es seien  $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$  und  $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_n$  Basen von  $V$  und es seien  $G$  bzw.  $H$  die Gramschen Matrizen von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basen. Zwischen den Basiselementen gelte die Beziehungen*

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i,$$

die wir durch die Übergangsmatrix  $A = (a_{ij})_{i,j}$  ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H = A^{\text{tr}} G \bar{A}.$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} \langle w_r, w_s \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n a_{rj} v_j, \sum_{k=1}^n a_{sk} v_k \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{rj} \overline{a_{sk}} \langle v_j, v_k \rangle \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} a_{rj} \left( \sum_{1 \leq k \leq n} \overline{a_{sk}} \langle v_j, v_k \rangle \right) \\ &= (A^{\text{tr}} \circ (G \circ \bar{A}))_{rs}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 38.22.** Die Menge der Sesquilinearformen auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  bilden einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Er wird mit  $\text{Sesq}(V)$  bezeichnet.

### HERMITISCHE FORMEN

**Definition 38.23.** Eine Sesquilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf einem komplexen Vektorraum  $V$  heißt *hermitesch*, wenn

$$\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$$

für alle  $u, v \in V$  ist.

**Definition 38.24.** Eine quadratische komplexe Matrix

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

heißt *hermitesch*, wenn

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

für alle  $i, j$  gilt.

## 38. ARBEITSBLATT

## ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 38.1.** Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$ .  
Zeige

$$\langle 0, v \rangle = 0$$

für alle  $v \in V$ .

**Aufgabe 38.2.** Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Bilinearformen sind.

(a)

$$\Psi(v, w) = \|v\|.$$

(b)

$$\Psi(v, w) = \|v - w\|.$$

(c)

$$\Psi(v, w) = \|v\| \cdot \|w\|.$$

(d)

$$\Psi(v, w) = \angle(v, w).$$

**Aufgabe 38.3.** Zeige, dass ein reelles Skalarprodukt eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

**Aufgabe 38.4.** Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum. Zeige, dass die Form genau dann linksausgeartet ist, wenn sie rechtsausgeartet ist.

**Aufgabe 38.5.** Betrachte die Linearform

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

(a) Bestimme den Vektor  $u \in \mathbb{R}^3$  mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3,$$

wobei  $\langle -, - \rangle$  das Standardskalarprodukt bezeichnet.

- (b) Es sei  $E = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$  und es sei  $\varphi = L|_E$  die Einschränkung von  $L$  auf  $E$ . Bestimme den Vektor  $w \in E$  mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E,$$

wobei  $\langle -, - \rangle$  die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf  $E$  bezeichnet.

**Aufgabe 38.6.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, der mit dem induzierten Skalarprodukt versehen sei. Es sei

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform und  $v \in V$  der zugehörige Gradient im Sinne von Korollar 38.6. Zeige, dass der Gradient  $u \in U$  zur Einschränkung  $f|_U$  die orthogonale Projektion von  $v$  auf  $U$  ist.

**Aufgabe 38.7.** Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im  $\mathbb{R}^2$  bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 38.8.** Bestimme die Gramsche Matrix zur Determinante auf dem  $K^2$  bezüglich der Standardbasis.

**Aufgabe 38.9.** Untersuche, welche der folgenden Abbildungen  $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

- (a)  $\varphi(x, y) := x_1 y_1$ .
- (b)  $\varphi(x, y) := x_1 x_2 + y_1 y_2$ .
- (c)  $\varphi(x, y) := 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1$ .

**Aufgabe 38.10.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass  $\langle -, - \rangle$  genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$$

für alle  $1 \leq i, j \leq n$  gibt.

**Aufgabe 38.11.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass diese Form genau dann symmetrisch ist, wenn die Gramsche Matrix von ihr bezüglich einer Basis symmetrisch ist.

**Aufgabe 38.12.** Zeige, dass die Determinante in der Dimension zwei, also die Abbildung

$$K^2 \times K^2 \longrightarrow K, \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

keine symmetrische Bilinearform ist.

**Aufgabe 38.13.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass der Ausartungsraum ein Untervektorraum von  $V$  ist.

**Aufgabe 38.14.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass die Bilinearform genau dann nicht ausgeartet ist, wenn die Gramsche Matrix der Bilinearform bezüglich einer Basis invertierbar ist.

**Aufgabe 38.15.** Es sei  $K$  ein Körper mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik und sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$ . Zeige

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\langle v + w, v + w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle).$$

**Aufgabe 38.16.** Es sei  $K$  ein Körper mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik und sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$ . Zeige

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\langle v + w, v + w \rangle - \langle v - w, v - w \rangle).$$

**Aufgabe 38.17.** Zeige, dass es eine Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf einem Vektorraum  $V$  geben kann, die nicht die Nullform ist, für die aber

$$\langle v, v \rangle = 0$$

für alle  $v \in V$  ist.

**Aufgabe 38.18.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass  $V$  eine Orthogonalbasis besitzt.

**Aufgabe 38.19.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge  $1, -1$  oder  $0$  sind.

**Aufgabe 38.20.** Es sei  $M$  eine symmetrische reelle  $n \times n$ -Matrix. Zeige, dass es eine invertierbare Matrix  $A$  derart gibt, dass

$$A^{\text{tr}} M A = D$$

eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge  $1, -1$  oder  $0$  sind.

**Aufgabe 38.21.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, auf dem eine symmetrische Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  definiert sei. Zeige, dass man eine Orthogonalbasis eines Untervektorraumes  $U \subseteq V$  im Allgemeinen nicht zu einer Orthogonalbasis von  $V$  ergänzen kann.

**Aufgabe 38.22.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Es seien  $G$  und  $H$  die Gramschen Matrizen zu dieser Form bezüglich der Basen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$ . Zeige, dass die Determinante von  $G$  genau dann positiv (negativ,  $0$ ) ist, wenn dies auf die Determinante von  $H$  zutrifft.

**Aufgabe 38.23.** (a) Zeige, dass die Summe von Bilinearformen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  wieder eine Bilinearform ist.  
 (b) Zeige ebenso, dass das skalare Vielfache einer Bilinearform wieder eine Bilinearform ist.

**Aufgabe 38.24.** Zeige, dass die Menge der Bilinearformen auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  einen  $K$ -Vektorraum bilden.

**Aufgabe 38.25.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Zeige, dass es eine natürliche Isomorphie

$$\text{Hom}_K(V, V^*) \longrightarrow \text{Bilin}(V)$$

gibt.

Wie im Fall eines Skalarproduktes nennt man lineare Abbildung, die Bilinearformen respektieren, Isometrien.

Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ , auf denen jeweils eine Bilinearform  $\Phi_V$  bzw.  $\Phi_W$  gegeben sei. Man nennt eine  $K$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  eine *Isometrie*, wenn

$$\Phi_W(f(u), f(v)) = \Phi_V(u, v)$$

für alle  $u, v \in V$  gilt.

**Aufgabe 38.26.** Es seien  $U, V$  Vektorräume über  $K$  mit Bilinearformen  $\Phi_U$  und  $\Phi_V$  und sei  $\varphi: U \rightarrow V$  eine Isometrie. Ist  $\varphi$  injektiv?

**Aufgabe 38.27.** Es seien  $U, V, W$  Vektorräume über  $K$  mit mit Bilinearformen  $\Phi_U, \Phi_V, \Phi_W$ . Zeige die folgenden Aussagen.

- (a) Die Identität  $V \rightarrow V$  ist eine Isometrie.
- (b) Wenn  $\varphi: U \rightarrow V$  eine bijektive Isometrie ist, so ist auch die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  eine Isometrie.
- (c) Wenn  $\varphi: U \rightarrow V$  und  $\psi: V \rightarrow W$  Isometrien sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung  $\psi \circ \varphi$  eine Isometrie.

**Aufgabe 38.28.** Es sei  $K$  ein Körper, dessen Charakteristik nicht 2 sei. Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$ , die sowohl symmetrisch als auch alternierend sei. Zeige, dass es sich um die Nullform handelt.

**Aufgabe 38.29.** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit einer Bilinearform  $\Phi$ . Zeige, dass die Menge der Isometrien auf  $V$  eine Gruppe unter der Hintereinanderschaltung von Abbildungen bildet.

**Aufgabe 38.30.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und es seien

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

und

$$\psi: V \longrightarrow V$$

antilineare Abbildungen. Zeige, dass die Verknüpfung  $\varphi \circ \psi$  linear ist.

**Aufgabe 38.31.** Zeige, dass für eine hermitesche Form  $\langle -, - \rangle$  auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  die Werte  $\langle v, v \rangle$  zu  $v \in V$  stets reell sind.

**Aufgabe 38.32.** Zeige, dass eine Sesquilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  genau dann hermitesch ist, wenn die Gramsche Matrix der Form bezüglich einer Basis von  $V$  hermitesch ist.

AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 38.33.** (4 Punkte)

Untersuche, welche der folgenden Abbildungen  $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

- (a)  $\varphi(x, y) := x_1 - y_1$ .
- (b)  $\varphi(x, y) := x_1y_1 - x_2y_2$ .
- (c)  $\varphi(x, y) := 2x_1y_2 - 2x_2y_1$ .

**Aufgabe 38.34.** (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im  $\mathbb{R}^3$  bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 38.35.** (2 Punkte)

Zeige, dass der Ausartungsraum zu einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  gleich dem Kern der linearen Abbildung

$$V \longrightarrow V^*, v \longmapsto \langle v, - \rangle,$$

ist.

**Aufgabe 38.36.** (3 (1+1+1) Punkte)

Wir betrachten die Linearform

$$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 4x + 7y.$$

- (a) Bestimme den Linksgradienten von  $L$  bezüglich der Determinante.
- (b) Bestimme den Rechtsgradienten von  $L$  bezüglich der Determinante.
- (c) Bestimme den Gradienten von  $L$  bezüglich des Standardskalarproduktes.

**Aufgabe 38.37.** (3 Punkte)

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Zeige, dass die Menge der symmetrischen Bilinearformen auf  $V$  einen Untervektorraum des Raumes aller Bilinearformen bildet. Welche Dimension besitzt dieser Raum, wenn

$$\dim_K(V) = n$$

ist?

**Aufgabe 38.38.** (1 Punkt)

Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Bildet die Menge der Skalarprodukte auf  $V$  einen Untervektorraum des Raumes aller Bilinearformen auf  $V$ ?

## 39. VORLESUNG - TYPEN VON BILINEARFORMEN

## DEFINITHEIT VON BILINEARFORMEN

Wir möchten die symmetrischen Bilinearformen über den reellen Zahlen klassifizieren.<sup>6</sup> Dabei spielen die Skalarprodukte als Extremfälle eine Schlüsselrolle.

**Definition 39.1.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Diese Bilinearform heißt

- (1) *positiv definit*, wenn  $\langle v, v \rangle > 0$  für alle  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  ist.
- (2) *negativ definit*, wenn  $\langle v, v \rangle < 0$  für alle  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  ist.
- (3) *positiv semidefinit*, wenn  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$  ist.
- (4) *negativ semidefinit*, wenn  $\langle v, v \rangle \leq 0$  für alle  $v \in V$  ist.
- (5) *indefinit*, wenn  $\langle -, - \rangle$  weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Positiv definite symmetrische Bilinearformen sind genau die reellen Skalarprodukte. Eine indefinite Form liegt vor, wenn es Vektoren  $v$  und  $w$  mit  $\langle v, v \rangle > 0$  und  $\langle w, w \rangle < 0$  gibt. Die Nullform ist zugleich positiv semidefinit und negativ semidefinit, aber weder positiv definit noch negativ definit.

Eine Bilinearform auf  $V$  kann man auf einen Untervektorraum  $U \subseteq V$  einschränken, wodurch sich eine Bilinearform auf  $U$  ergibt. Wenn die ursprüngliche Form positiv definit ist, so überträgt sich dies auf die Einschränkung. Allerdings kann eine beliebige Form eingeschränkt auf gewisse Unterräume positiv definit werden und auf andere negativ definit. Dies führt zu folgender Definition.

---

<sup>6</sup>Unter einer *Klassifikation* versteht man in der Mathematik, eine Menge an mathematischen Objekten vollständig und übersichtlich zu beschreiben, Kriterien anzugeben, wann zwei Objekte im Wesentlichen gleich (oder äquivalent) sind und die verschiedenen Objekte durch numerische Invariante zu erfassen und für die Objekte möglichst einfache Vertreter anzugeben. Beispielsweise werden endlichdimensionale Vektorräume durch ihre Dimension klassifiziert, gleichdimensionale Vektorräume sind zueinander isomorph. Lineare Abbildungen von  $\mathbb{C}^n$  in sich werden über die jordanische Normalform klassifiziert. Die entscheidende Frage ist hierbei, welche Jordanblöcke mit welcher Länge und zu welchen Eigenwerten wie oft vorkommen? Hier besprechen wir den Typ einer reell-symmetrischen Bilinearform. Andere Klassifikationsresultate in der linearen Algebra beziehen sich auf quadratische Formen und auf endliche Bewegungsgruppen im Raum.

**Definition 39.2.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Man sagt, dass eine solche Bilinearform den *Typ*

$$(p, q)$$

besitzt, wobei

$$p := \max(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle|_U \text{ positiv definit})$$

und

$$q := \max(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle|_U \text{ negativ definit})$$

ist.

Bei einem Skalarprodukt auf einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum ist der Typ  $(n, 0)$ . Nach Aufgabe 39.1 ist stets

$$p + q \leq \dim_K(V).$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die Gramsche Matrix zu einer symmetrischen Bilinearform auf dem  $\mathbb{R}^3$ , sagen wir bezüglich der Standardbasis. Die Einschränkung der Form auf  $\mathbb{R}e_1$  ist positiv definit, die Einschränkung auf  $\mathbb{R}e_2$  ist negativ definit, die Einschränkung auf  $\mathbb{R}e_3$  ist die Nullform. Daher sind  $p, q \geq 1$ , es ist aber nicht unmittelbar klar, ob es nicht auch zweidimensionale Untervektorräume geben könnte, auf denen die Einschränkung positiv definit ist. Eine Untersuchung „aller“ Untervektorräume, wie es die Definition verlangt, scheint aussichtslos. Es gibt aber mehrere Möglichkeiten, den Typ einer symmetrischen Bilinearform zu bestimmen, ohne alle Untervektorräume von  $V$  zu überblicken. Die folgende Aussage nennt man den *Trägheitssatz von Sylvester*.



James Joseph Sylvester (1814-1897)

**Satz 39.3.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  vom Typ  $(p, q)$ . Dann ist die Gramsche Matrix von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit  $p$  positiven und  $q$  negativen Einträgen.*

*Beweis.* Bezüglich einer Orthogonalbasis  $u_1, \dots, u_n$  von  $V$  (die es nach Satz 38.15 gibt) hat die Gramsche Matrix natürlich Diagonalgestalt. Es sei  $p'$  die Anzahl der positiven Diagonaleinträge und  $q'$  die Anzahl der negativen Diagonaleinträge. Die Basis sei so geordnet, dass die ersten  $p'$  Diagonaleinträge positiv, die folgenden  $q'$  Diagonaleinträge negativ und die übrigen 0 seien. Auf dem  $p'$ -dimensionalen Unterraum  $U = \langle u_1, \dots, u_{p'} \rangle$  ist die eingeschränkte Bilinearform positiv definit, sodass  $p' \leq p$  gilt. Es sei  $W = \langle u_{p'+1}, \dots, u_n \rangle$ , auf diesem Unterraum ist die Bilinearform negativ semidefinit. Dabei ist  $V = U \oplus W$ , und diese beiden Räume sind orthogonal zueinander.

Angenommen, es gebe einen Unterraum  $U'$ , auf dem die Bilinearform positiv definit ist, und dessen Dimension  $p$  größer als  $p'$  ist. Die Dimension von  $W$  ist  $n - p'$  und daher ist  $W \cap U' \neq 0$  nach Korollar 9.8.

Für einen Vektor  $w \in W \cap U'$ ,  $w \neq 0$ , ergibt sich aber direkt der Widerspruch  $\langle w, w \rangle > 0$  und  $\langle w, w \rangle \leq 0$ .  $\square$

Indem man die Orthogonalvektoren umskaliert, kann man erreichen, dass in der Diagonalen nur die Werte  $1, -1, 0$  vorkommen. Die auf dem  $\mathbb{R}^n$  durch die Diagonalmatrix mit  $p$  Einsen,  $q$  Minuseinsen und  $n - p - q$  Nullen gegebene Form zeigt, dass jeder Typ, der

$$p + q \leq n$$

erfüllt, realisiert werden kann. Man spricht von der *Standardform zum Typ*  $(p, q)$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ .

#### TYPKRITERIEN FÜR SYMMETRISCHE BILINEARFORMEN

Es gibt mehrere Methoden, den Typ einer symmetrischen Bilinearform zu bestimmen, wobei der Sylvestersche Trägheitssatz eine erste Möglichkeit ist, die aber den Nachteil hat, dass man eine Orthogonalbasis bestimmen muss. Wir besprechen das *Minorenkriterium* und das *Eigenwertkriterium*. Unter einem *Minor* versteht man die Determinante einer quadratischen Untermatrix einer Matrix. Man könnte also bei dem folgenden Kriterium genauso gut von einem Determinantenkriterium sprechen.

**Satz 39.4.** *Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  und sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Es sei  $G$  die Gramsche Matrix zu  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis. Die Determinanten  $D_k$  der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}$$

*seien für  $k = 1, \dots, n$  von 0 verschieden. Es sei  $a$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge*

$$D_0 = 1, D_1 = \det M_1, D_2 = \det M_2, \dots, D_n = \det M_n = \det G.$$

*Dann ist  $\langle -, - \rangle$  vom Typ  $(n - a, a)$ .*

*Beweis.* Da nach Voraussetzung insbesondere die Determinante der Gramschen Matrix nicht 0 ist, ist nach Aufgabe 39.11 die Bilinearform nicht ausgeartet und daher hat der Typ die Form  $(n - q, q)$ . Wir müssen zeigen, dass  $q = a$  ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Dimension von  $V$ , wobei der Induktionsanfang trivial ist. Die Aussage sei bis zur Dimension  $n - 1$  bewiesen und es liege ein  $n$ -dimensionaler Raum mit einer Basis  $v_1, \dots, v_n$  mit den angegebenen Eigenschaften vor. Der Untervektorraum

$$U = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$$

hat die Dimension  $n - 1$  und die Folge der Determinanten der Untermatrizen der Gramschen Matrix zur eingeschränkten Form  $\langle -, - \rangle|_U$  stimmt mit der vorgegebenen Folge überein, wobei lediglich das letzte Glied

$$D_n = \det M_n = \det G$$

weggelassen wird. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt  $\langle -, - \rangle|_U$  den Typ  $(n - 1 - b, b)$ , wobei  $b$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1, D_1, \dots, D_{n-1}$$

ist. Aufgrund der Definition des Typs ist

$$b \leq q \leq b + 1,$$

da ein  $q$ -dimensionaler Untervektorraum  $W \subseteq V$ , auf dem die Bilinearform negativ definit ist, zu einem Untervektorraum

$$W' = U \cap W \subseteq U$$

führt, der die Dimension  $q$  oder  $q - 1$  besitzt und auf dem die eingeschränkte Form ebenfalls negativ definit ist. Nach Aufgabe 39.20 ist das Vorzeichen von  $D_{n-1}$  gleich  $(-1)^b$  und das Vorzeichen von  $D_n$  gleich  $(-1)^a$ . Das bedeutet, dass zwischen  $D_{n-1}$  und  $D_n$  ein zusätzlicher Vorzeichenwechsel (und somit  $a = b + 1$ ) genau dann vorliegt, wenn

$$q = b + 1$$

ist. □

**Korollar 39.5.** *Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Es sei  $G$  die Gramsche Matrix zu  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis und es seien  $D_k$  die Determinanten der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Genau dann ist  $\langle -, - \rangle$  positiv definit, wenn alle  $D_k$  positiv sind.
- (2) Genau dann ist  $\langle -, - \rangle$  negativ definit, wenn das Vorzeichen in der Folge  $D_0 = 1, D_1, D_2, \dots, D_n$  an jeder Stelle wechselt.

*Beweis.* (1). Wenn die Bilinearform positiv definit ist, so ist nach Aufgabe 39.20 das Vorzeichen der Determinante der Gramschen Matrix gleich  $(-1)^0 = 1$ , also positiv. Da die Einschränkung der Form auf die Unterräume  $U_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$  ebenfalls positiv definit ist, sind auch die Determinanten zu den Untermatrizen positiv. Wenn umgekehrt die Determinanten alle positiv sind, so folgt aus Satz 39.4, dass die Bilinearform positiv definit ist. (2) folgt aus (1), indem man die negative Bilinearform, also  $-\langle -, - \rangle$ , betrachtet. □

Das folgende Kriterium werden wir in der Vorlesung 42 beweisen.

**Satz 39.6.** *Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Es sei  $G$  die Gramsche Matrix zu  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis. Dann besitzt der Typ  $(p, q)$  der Form folgende Interpretation:  $p$  ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume zu  $G$  zu positiven Eigenwerten und  $q$  ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume zu  $G$  zu negativen Eigenwerten.*

*Beweis.* Dies werden wir später als Korollar aus Satz 42.11 erhalten. □

**Bemerkung 39.7.** Zu einer Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

interessiert man sich, wie schon im Fall  $n = 1$ , für die lokalen Extrema der Funktion, zum Beispiel Maxima, also Punkte  $P \in \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft, dass in einer kleinen Umgebung davon alle Funktionswerte kleinergleich  $f(P)$  sind. Bei  $n = 2$  handelt es sich um Gipfel des durch  $f$  beschriebenen Gebirges über der Grundebene. Wenn die Funktion zweimal stetig differenzierbar ist, so gibt es wie im eindimensionalen notwendigen und hinreichende differentielle Kriterien für die Existenz von lokalen Maxima und Minima. Das notwendige Kriterium ist, dass  $P$  ein kritischer Punkt ist, was bedeutet, dass die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$  für  $i = 1, \dots, n$  gleich 0 sind. In diesem Fall betrachtet man die zweiten partiellen Ableitungen und fasst sie in der sogenannten *Hesse-Matrix*

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) \right)_{ij}$$

zusammen. Die zugehörige symmetrische Bilinearform entscheidet häufig darüber, ob ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum vorliegt. Wenn sie positiv definit ist, so liegt ein isoliertes lokales Minimum vor, wenn sie negativ definit ist, so liegt ein isoliertes lokales Maximum vor, wenn sie indefinit ist, so liegt kein lokales Extremum vor (siehe Satz 50.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))). In den verbleibenden Fällen, also beispielsweise bei der Nullmatrix, braucht man weitere Überlegungen.

### VOLLSTÄNDIGE DUALITÄT

Bilinearformen werden auch für zwei verschiedene Vektorräume definiert. Die folgende Eigenschaft ist eine Variante für die Eigenschaft, nicht ausgeartet zu sein.

**Definition 39.8.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  und  $W$  seien Vektorräume über  $K$  und

$$\Psi: V \times W \longrightarrow K$$

sei eine Bilinearform. Man sagt, dass  $\Psi$  eine *vollständige Dualität* definiert, wenn die Abbildung

$$V \longrightarrow W^*, v \longmapsto (w \mapsto \Psi(v, w)),$$

bijektiv ist.

Wenn die Vektorräume  $V$  und  $W$  endlichdimensional sind, so kann eine vollständige Dualität nur bei gleichdimensionalen Räumen vorliegen. Bei einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  liegt stets eine vollständige Dualität zu seinem Dualraum  $V^*$  vor, die einfach durch die Auswertung gegeben ist, siehe Aufgabe 39.22. Bei einer nichtausgearteten Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  besteht nach Lemma 38.5 (3) ein vollständige Dualität mit  $V$  selbst.

## 39. ARBEITSBLATT

## ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 39.1.** Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$  vom Typ  $(p, q)$ . Zeige, dass

$$p + q \leq n$$

ist.

**Aufgabe 39.2.** Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

**Aufgabe 39.3.** Auf dem  $\mathbb{R}^2$  sei durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

eine symmetrische Bilinearform gegeben. Bestimme zu jeder Geraden  $G$  durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung der Form auf die Gerade positiv definit, negativ definit oder die Nullform ist.

**Aufgabe 39.4.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  vom Typ  $(p, q)$ . Zeige, dass die negierte Form  $-\langle -, - \rangle$  den Typ  $(q, p)$  besitzt.

**Aufgabe 39.5.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Bilinearform vom Typ  $(p, q)$  und es sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Die Einschränkung der Bilinearform sei vom Typ  $(p', q')$ . Zeige  $p' \leq p$  und  $q' \leq q$ .

**Aufgabe 39.6.** Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Bilinearform vom Typ  $(p, q)$  und es sei  $U \subseteq V$  ein  $d$ -dimensionaler Untervektorraum. Die Einschränkung der Bilinearform sei vom Typ  $(p', q')$ . Zeige

$$p' \geq d + p - n.$$

**Aufgabe 39.7.** Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf  $V$  und einer Basis  $u_1, \dots, u_n$  von  $V$  derart, dass  $\langle u_i, u_i \rangle > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  ist, aber  $\langle -, - \rangle$  nicht positiv definit ist.

**Aufgabe 39.8.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf  $V$ . Es sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthogonalbasis auf  $V$  mit der Eigenschaft  $\langle u_i, u_i \rangle > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Zeige, dass  $\langle -, - \rangle$  positiv definit ist.

**Aufgabe 39.9.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform vom Typ  $(p, q)$ . Zeige, dass die Dimension des Ausartungsraumes gleich

$$n - p - q$$

ist.

**Aufgabe 39.10.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass die Dimension des Ausartungsraumes nicht mit der maximalen Dimension eines Untervektorraumes übereinstimmen muss, auf dem die eingeschränkte Form die Nullform ist.

**Aufgabe 39.11.** Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) Die Bilinearform ist nicht ausgeartet.
- (2) Die Gramsche Matrix der Bilinearform bezüglich einer Basis ist invertierbar.
- (3) Die Bilinearform ist vom Typ  $(p, n - p)$  (mit einem  $p \in \{1, \dots, n\}$ ).

**Aufgabe 39.12.** Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

**Aufgabe 39.13.** Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

**Aufgabe 39.14.** Es seien  $U$  und  $V$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume mit symmetrischen Bilinearformen  $\Psi_U$  und  $\Psi_V$ .

(a) Zeige, dass auf  $U \oplus V$  durch

$$\Theta((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \Psi_U(u_1, u_2) + \Phi_V(v_1, v_2)$$

eine symmetrische Bilinearform gegeben ist, und dass dabei  $U$  und  $V$  orthogonal zueinander sind.

(b) Es sei  $G$  die Gramsche Matrix von  $\Psi_U$  bezüglich einer Basis von  $U$  und  $H$  die Gramsche Matrix von  $\Psi_V$  bezüglich einer Basis von  $V$ . Zeige, dass die Blockmatrix aus  $G$  und  $H$  die Gramsche Matrix von  $\Theta$  bezüglich der zusammengesetzten Basis ist.

(c) Der Typ der Bilinearformen sei  $(p, q)$  bzw.  $(p', q')$ . Zeige, dass der Typ von  $\Theta$  gleich  $(p + p', q + q')$  ist.

**Aufgabe 39.15.** Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem zweidimensionalen reellen Vektorraum, die bezüglich einer Basis durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

beschrieben werde. Bestimme den Typ der Form in Abhängigkeit von  $b, c$ .

**Aufgabe 39.16.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und es sei  $G$  die Gramsche Matrix bezüglich dieser Basis. Es sei

$$\Psi: V \longrightarrow V^*, v \longmapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle),$$

die zugehörige lineare Abbildung in den Dualraum  $V^*$  und es sei  $v_1^*, \dots, v_n^*$  die Dualbasis von  $V^*$ . Zeige, dass die beschreibende Matrix von  $\Psi$  bezüglich der beiden Basen die transponierte Matrix von  $G$  ist.

**Aufgabe 39.17.** Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume. Zeige, dass durch die Spur

$$\text{Hom}_K(V, W) \times \text{Hom}_K(W, V) \longrightarrow K, (A, B) \longmapsto \text{Spur}(A \circ B),$$

eine vollständige Dualität gestiftet wird, dass also die Homomorphismenräume  $\text{Hom}_K(V, W)$  und  $\text{Hom}_K(W, V)$  in natürlicher Weise dual zueinander sind.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 39.18.** (2 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Es sei  $M$  die Gramsche Matrix zur Form bezüglich einer gegebenen Basis von  $V$ . Zeige, dass der Eigenraum zum Eigenwert 0 von  $M$ ,

aufgefasst als lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  bezüglich dieser Basis, gleich dem Ausartungsraum der Form ist.

**Aufgabe 39.19.** (2 Punkte)

Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 7 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

**Aufgabe 39.20.** (3 Punkte)

Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform vom Typ  $(n - q, q)$  auf einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und es sei  $G$  die Gramsche Matrix zu  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis. Zeige, dass das Vorzeichen von  $\det G$  gleich  $(-1)^q$  ist.

**Aufgabe 39.21.** (5 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform vom Typ  $(p, q)$  und sei  $a$  die Dimension des Ausartungsraumes der Form. Zeige, dass es einen Untervektorraum  $U \subseteq V$  derart gibt, dass die Einschränkung der Form auf  $U$  die Nullform ist und mit

$$\dim_{\mathbb{R}}(U) = \min(p, q) + a.$$

Zeige ebenfalls, dass es keinen Untervektorraum größerer Dimension gibt, auf dem die Einschränkung die Nullform ist.

**Aufgabe 39.22.** (3 Punkte)

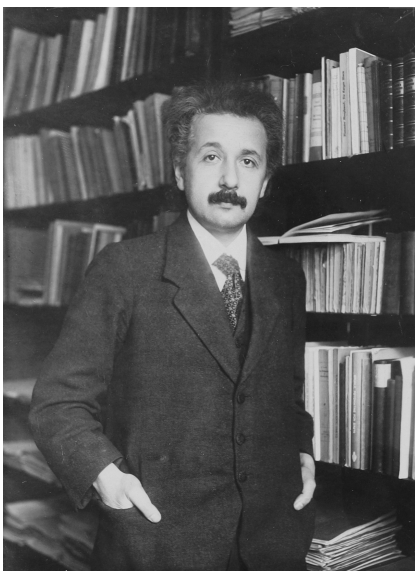
Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit dem Dualraum  $V^*$ . Zeige, dass die Abbildung

$$V \times V^* \longrightarrow K, (v, f) \longmapsto f(v),$$

eine vollständige Dualität zwischen  $V$  und  $V^*$  stiftet.

## 40. VORLESUNG - MINKOWSKI-RÄUME

## MINKOWSKI-RÄUME



Albert Einstein (1879-1955)

Auf einer Abendgesellschaft wurde Einstein von der Gastgeberin gebeten, die Relativitätstheorie zu erklären. „Madame“, sagte er, „ich spazierte eines heißen Tages auf dem Lande mit einem blinden Freund und sagte, daß ich gern einen Trunk Milch haben würde“. - „Milch“?, sagte mein Freund, „Trinken verstehe ich, aber was ist Milch“? - „Eine weiße Flüssigkeit“ antwortete ich. - „Flüssigkeit verstehe ich; aber was ist weiß“? - „Die Farbe einer Schwannfeder“. - „Feder verstehe ich, aber was ist ein Schwan“? - „Ein Vogel mit einem gebogenen Hals“. „Hals verstehe ich, aber was ist gebogen“? - Darauf verlor ich die Geduld, ergriff seinen Arm und und streckte diesen geradeaus: „das ist gerade“, sagte ich, und dann bog ich seinen Arm am Ellenbogen ein: „das ist gebogen“. „Ah“! sagte der Blinde, „jetzt weiß ich, was Sie mit Milch meinen“!

Wir besprechen, wie man mit einer gewissen Bilinearform einen theoretischen Rahmen für die spezielle Relativitätstheorie angeben kann, in dem viele relativistische Phänomene einfach beschrieben werden können. Die empirischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie gehören zur Physik und können hier nicht behandelt werden.



Hermann Minkowski (1864-1909)

**Definition 40.1.** Ein reeller Vektorraum der Dimension  $n$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  vom Typ  $(n - 1, 1)$  heißt *Minkowski-Raum*.

Die Minkowski-Räume liefern ein einfaches Modell für die *spezielle Relativitätstheorie*,<sup>7</sup> man spricht auch von einem Einstein-Minkowski-Raum und die Bilinearform darauf heißt auch *Minkowski-Form* oder *Lorentz-Form*. Die klassische Raum-Zeit-Welt ist von der Form  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , wobei die dreidimensionale Komponente den Raum und die eindimensionale Komponente die Zeit repräsentiert. Darin ist grundsätzlich jede Bewegung von einem Punkt zu einem anderen möglich, solange der zweite Punkt zeitlich später als der erste Punkt ist. Entsprechend repräsentieren die Punkte in einem vierdimensionalen Minkowski-Raum die relativistischen Weltpunkte (die Ereignisse); eine Trennung in Raum und Zeit ist Beobachter-abhängig; die Theorie liefert auch eine Definition, was ein Beobachter ist, siehe unten. Eine besondere Rolle spielt die Menge der Vektoren

$$\{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0\},$$

die in diesem Zusammenhang der *Lichtkegel* heißt. Gemeint ist damit die Menge aller Lichtstrahlen, die in einem Weltpunkt eingehen und ausgehen. Dieser Lichtkegel ist gemäß der speziellen Relativitätstheorie Beobachter-unabhängig (absolut), und eben dies wird durch die Minkowski-Räume modelliert. Man erlaubt grundsätzlich jede Dimension, die wesentlichen Phänomene sind schon bei  $n = 2, 3$  sichtbar. Die bezüglich der Standardbasis des

<sup>7</sup>Die allgemeine Relativitätstheorie wird mathematisch durch pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten beschrieben, bei denen die hier besprochenen Minkowski-Räume die lokale Situation wiedergeben. Wichtige Stichworte sind Gravitation, Äquivalenzprinzip, Einsteinsche Feldgleichungen, gekrümmter Raum.

$\mathbb{R}^n$  durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene Minkowski-Form heißt *Minkowski-Standard-Form*. Gemäß dem Trägheitssatz von Sylvester kann man jede Minkowski-Form bezüglich einer geeignet skalierten Orthogonalbasis (einer *Minkowski-Basis*) auf diese Gestalt bringen.

**Definition 40.2.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form  $\langle -, - \rangle$ . Ein Vektor  $v \in V$  mit

$$\langle v, v \rangle = 0$$

heißt *lichtartig*, ein Vektor  $v \in V$  mit

$$\langle v, v \rangle < 0$$

heißt *zeitartig* und ein Vektor  $v \in V$  mit

$$\langle v, v \rangle > 0$$

heißt *raumartig*.

Achtung, diesen Eigenschaften definieren keine Untervektorräume, die Summe von zwei raumartigen Vektoren muss im Allgemeinen nicht wieder raumartig sein.

Nicht alle Vektoren bzw. (linearen) Bewegungsvorgänge in dieser Raum-Zeit-Licht-Welt sind für einen (materiellen) Beobachter realisierbar, im Gegenteil gehört die folgende Einschränkung wesentlich zu diesem Weltmodell.

**Definition 40.3.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum mit einer Minkowski-Form  $\langle -, - \rangle$ . Die Vektoren  $v \in V$  mit

$$\langle v, v \rangle = -1$$

heißen *Beobachtervektoren* oder *Vierergeschwindigkeit eines Beobachters*.

Der Begriff Beobachter suggeriert eine physikalische Interpretation; man kann sich darunter eine Person vorstellen, wichtig ist aber, dass dies keinen subjektiven Gehalt hat. Der Beobachter hat eine Uhr, einen Meterstab und einen Winkelmesser im Gepäck und jeder Beobachter, der die gleiche Bewegung durchführt, kommt zu den gleichen Messungen. Statt mit der Bedingung  $= -1$  wird ein Beobachtervektor häufig auch durch die Bedingung  $= -c$  angesetzt, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit repräsentiert. Diese ist aber nur eine Umskalierung.

Die zuletzt genannten Beobachtervektoren sind insbesondere zeitartig, da jeder Beobachter älter wird, die Zeit bewegt sich also auch für einen „räumlich

ruhenden“ Beobachter. Die Gerade  $\mathbb{R}v$  ist ein Untervektorraum der Dimension 1, auf dem die eingeschränkte Form negativ definit ist. Es sei  $U \subseteq V$  der dazu (bezüglich der Minkowski-Form) senkrechte Untervektorraum. Dies ist ein dreidimensionaler Raum, auf dem die eingeschränkte Form positiv definit ist. Dieser Untervektorraum ist der Raum  $V_v$  für diesen Beobachter (oder  $V_B$ , wenn  $B$  den Beobachter bezeichnet) und  $\mathbb{R}v$  ist seine Zeitachse. Für einen Beobachter besteht also eine Zerlegung des Gesamtraumes der Form  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  (in Zeit und Raum), nur hängt diese Zerlegung von dem Beobachter ab. Man spricht auch von dem *Bezugssystem* des Beobachters. Die positiv definite Einschränkung der Minkowski-Form auf seine Raumkomponente ist ein Skalarprodukt, mit dem der Beobachter Längen und Winkel misst und auch in seinem Raum eine Orthonormalbasis fixieren kann. Für einen Beobachter mit der erlaubten Vierergeschwindigkeit  $v$  gibt es also insbesondere eine Orthogonalbasis  $e_1, e_2, e_3, v$  mit

$$\langle e_j, e_j \rangle = 1$$

und

$$\langle v, v \rangle = -1.$$

Bezüglich einer solchen Minkowski-Basis wird die Minkowski-Form einfach durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

als Gramsche Matrix beschrieben. Ein Großteil der relativistischen Phänomene zeigt sich in diesem Modell beim Basiswechsel von zwei solchen Basen (bei einem *Wechsel des Bezugssystems*), wobei der wesentliche Punkt der Wechsel der Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente ist.

Wenn  $v$  ein Beobachtervektor ist, so ist nach Definition auch  $-v$  ein Beobachtervektor. Dieser Beobachter bewegt sich in die entgegengesetzte Zeitrichtung. Insgesamt zerfällt die Menge aller Beobachtervektoren in zwei Schalen, wobei wir eine als die Zukunftsschale auszeichnen. Ebenso zerfällt der Lichtkegel in zwei Kegeln, den Zukunfts- und den Vergangenheitskegel. Zwei Beobachter heißen *gleichgerichtet*, wenn sie der gleichen Schale angehören, also beide in die Zukunft (oder in die Vergangenheit) weisen.

**Lemma 40.4.** *Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form  $\langle -, - \rangle$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu jedem Beobachtervektor  $v \in V$  ist*

$$V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$$

*eine direkte Summenzerlegung, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf  $\mathbb{R}v$  negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf  $V_v = (\mathbb{R}v)^\perp$  positiv definit ist. Dabei besteht  $V_v$  aus raumartigen Vektoren.*

(2) Für zwei gleichgerichtete Beobachtervektoren  $v, w \in V$  ist

$$\langle v, w \rangle < 0.$$

(3) Für zeitartige Vektoren  $v, w \in V$  ist

$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 40.4, Aufgabe 40.10 und Aufgabe 40.12.  $\square$

Die Bedingung, dass die Beobachtergeschwindigkeiten  $\langle v, v \rangle = -1$  erfüllen müssen, ist eine große Einschränkung an mögliche Bewegungsvorgänge. Wenn

eine Minkowski-Basis fixiert ist, so ist  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}$  ein Beobachtervektor genau

dann, wenn

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - t^2 = -1$$

(und  $t \geq 0$ , das ergibt sich aus der Zukunftsrichtung) ist.

**Beispiel 40.5.** In einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum soll

etwas vom Punkt  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix}$  zum Punkt  $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ s \end{pmatrix}$  gleichmäßig bewegt

werden. Im klassischen Ansatz ist einfach der Verbindungsvektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix}$$

zu wählen. Dieser ist aber im Allgemeinen kein Beobachtervektor und der anvisierte Bewegungsvorgang ist dann nicht realisierbar. Wenn  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - t^2$  negativ ist, was inhaltlich bedeutet, dass ein zeitartiger Vektor vorliegt, so kann man den Vektor aber zu einem Beobachtervektor

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{-\left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}$$

umskalieren. Es beschreibt dann

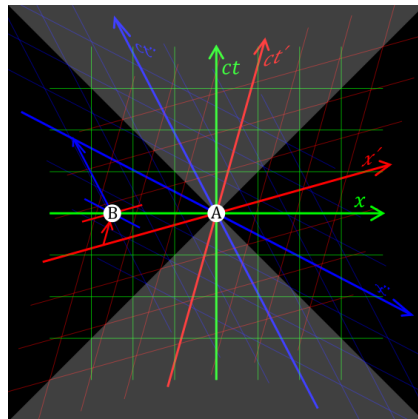
$$x \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ u \end{pmatrix}$$

ein Bewegungsvorgang, der für  $x = 0$  im Punkt  $P$  startet und für  $x =$   
 $\sqrt{-\left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle}$  im Punkt  $Q$  endet und der physikalisch durchführbar  
 ist.

**Bemerkung 40.6.** Zu einer Vierergeschwindigkeit  $v$  eines Beobachters  $B$  mit der Zerlegung

$$V = V_v \oplus \mathbb{R}v$$

nennt man die Punkte der Form  $sv + V_v$  mit einem fixierten  $s \in \mathbb{R}$  den Raum zum Zeitpunkt  $s$ . Die Punkte daraus heißen gleichzeitig für den Beobachter  $B$ . Für einen anderen Beobachter  $C$  mit der Vierergeschwindigkeit  $w$  sind diese Punkte nicht gleichzeitig. Sein Gleichzeitigkeitskonzept beruht auf seine, von  $w$  abhängige Zerlegung der Welt  $V$  in seine Raum- und Zeitkomponente.



Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  in einem zweidimensionalen Minkowskiraum, die für den Beobachter, dessen Raumachse mit  $x$  und dessen Zeitachse mit  $ct$  bezeichnet ist, gleichzeitig sind, aber nicht für den zweiten Beobachter mit den Achsen  $x'$  und  $ct'$ .

Wenn beispielsweise die zweite Vierergeschwindigkeit bezüglich einer Minkowski-Basis des ersten Beobachters durch  $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$  gegeben ist, so ist

$$\frac{15}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis der Raumkomponente des zweiten Beobachters. Die für den ersten Beobachter gleichzeitigen Ereignisse  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  sind für den zweiten Beobachter nicht gleichzeitig, da der erste Vektor die gleiche Beschreibung besitzt und der zweite Vektor gleich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{75}{16} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

ist. Seine Zeitkomponente bezüglich des zweiten Beobachters ist also  $-\frac{3}{4}$ .

Wir vergleichen nun Geschwindigkeiten von Beobachtern untereinander.

**Definition 40.7.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum und seien  $B$  und  $C$  Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten  $v$  und  $w$ . Dann nennt man den Vektor

$$v_{BC} = -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w$$

den *Geschwindigkeitsvektor* von  $C$  relativ zu  $B$ . Man nennt

$$\rho_{BC} = \sqrt{1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}}$$

die *Relativgeschwindigkeit* der beiden Beobachter.

Der relative Geschwindigkeitsvektor ist ein Vektor. Beachte, dass nach Lemma 40.4 (3)  $\langle v, w \rangle \geq 1$  und daher die Relativgeschwindigkeit eine wohldefinierte nichtnegative reelle Zahl ist, die von oben durch 1 beschränkt ist. Die Relativgeschwindigkeit ist symmetrisch in  $v$  und  $w$ , hingegen ist

$$v_{CB} = -w - \frac{1}{\langle v, w \rangle} v$$

im Allgemeinen von  $v_{BC}$  verschieden. Da die Lichtgeschwindigkeit zu 1 normiert ist, sollte man sich diese Relativgeschwindigkeiten klein vorstellen. Bei  $v = w$  ist die Relativgeschwindigkeit gleich 0.

**Lemma 40.8.** *Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum und seien  $B$  und  $C$  gleichgerichtete Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten  $v$  und  $w$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Der Relativgeschwindigkeitsvektor  $v_{BC}$  steht senkrecht auf  $v$ .*
- (2) *Der Relativgeschwindigkeitsvektor  $v_{BC}$  ist raumartig und es gilt*

$$\|v_{BC}\| = \|v_{CB}\| = \rho_{BC} = \rho.$$

(3) Es ist

$$\langle v, w \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

(4) Es ist

$$w = \frac{v}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{v_{BC}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

die Zerlegung von  $w$  in die Raum- und die Zeitkomponente von  $B$ .

(5) Der Zeitkoeffizient von  $w$  bezüglich  $B$  ist  $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$ .

*Beweis.* (1) Es ist

$$\langle v, v_{BC} \rangle = \left\langle v, -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle = \langle v, -v \rangle + \left\langle v, -\frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle = 1 - 1 = 0,$$

sodass diese Vektoren orthogonal zueinander sind. Somit gehört  $v_{BC}$  zur Raumkomponente zu  $B$ .

(2) Es ist

$$\begin{aligned} \langle v_{BC}, v_{BC} \rangle &= \left\langle -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w, -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle \\ &= \left\langle v + \frac{1}{\langle v, w \rangle} w, v + \frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2 \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, w \rangle} + \frac{1}{\langle v, w \rangle^2} \langle w, w \rangle \\ &= 1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}. \end{aligned}$$

Nach Teil (1) (oder nach Lemma 40.4 (3)) ist dieser Ausdruck nichtnegativ. Die Quadratwurzel davon ist die Relativgeschwindigkeit  $\rho$ .

(3) Dies folgt direkt aus der Definition

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}}$$

durch eine einfache Umstellung, wenn man berücksichtigt, dass

$$\langle v, w \rangle < 0$$

ist.

(4) Aus

$$v_{BC} = -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w$$

und (3) ergibt sich

$$w = -\langle v, w \rangle v - \langle v, w \rangle v_{BC} = \frac{v}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{v_{BC}}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Nach Teil (1) gehört  $v_{BC}$  zur Raumkomponente zu  $B$ .

(5) Aus (4) ist direkt ablesbar, dass der Zeitkoeffizient von  $w$  bezüglich  $B$  gleich  $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$  ist.  $\square$

Das in der fünften Aussage des vorstehenden Lemmas formulierte Prinzip heißt *Zeitdilatation*. Ein Beobachter beobachtet für einen weiteren Beobachter eine längere Zeit als dieser in seinem Bezugssystem.

#### 40. ARBEITSBLATT

#### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 40.1.** Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

**Aufgabe 40.2.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum.

- Zeige, dass ein skalares Vielfaches eines zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektors wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.
- Zeige, dass die Summe von zwei zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektoren im Allgemeinen nicht wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.

**Aufgabe 40.3.** Ist die Einschränkung einer Minkowski-Form im  $\mathbb{R}^n$  auf einen  $n - 1$ -dimensionalen Untervektorraum wieder eine Minkowski-Form?

**Aufgabe 40.4.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass es zu jedem Beobachtervektor  $v \in V$  eine direkte Summenzerlegung

$$V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$$

gibt, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf  $\mathbb{R}v$  negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf  $(\mathbb{R}v)^\perp$  positiv definit ist.

**Aufgabe 40.5.** Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass  $\begin{pmatrix} \frac{25}{7} \\ \frac{24}{24} \end{pmatrix}$  der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

**Aufgabe 40.6.** Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$  ein Beobachtervektor ist und bestimme die Raumkomponente dazu.

**Aufgabe 40.7.** Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu jedem Beobachtervektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  die Raumkomponente des Beobachters die Spiegelung seiner Zeitkomponente an der Hauptdiagonalen ist.

Die Hyperbelfunktionen werden in Analysis 1 eingeführt.

**Aufgabe 40.8.** Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu  $\alpha \in \mathbb{R}$  der Vektor  $\begin{pmatrix} \sinh \alpha \\ \cosh \alpha \end{pmatrix}$  der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

**Aufgabe 40.9.** Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z \neq 0$ , die Vektoren

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} z - \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -z + \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektoren eines Beobachters sind. Zeige, dass jeder Beobachtervektor diese Gestalt besitzt.

**Aufgabe 40.10.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form  $\langle -, - \rangle$  und es seien  $v, w$  gleichgerichtete Beobachtervektoren. Zeige

$$\langle v, w \rangle < 0.$$

**Aufgabe 40.11.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum. Zeige, dass die Menge der Beobachtervektoren in zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfallen. Zeige, dass zwei Beobachtervektoren  $v, w$  genau dann zur gleichen Komponente gehören, wenn

$$\langle v, w \rangle < 0$$

ist.

**Aufgabe 40.12.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form  $\langle -, - \rangle$  und es seien  $v, w$  zeitartige Vektoren. Zeige die Abschätzung

$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle.$$

**Aufgabe 40.13.** In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors  $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 40.14.** In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum seien zwei Beobachter  $B$  und  $C$  mit den zugehörigen Raumkomponenten  $V_B$  und  $V_C$  gegeben. Was kann man über  $V_B \cap V_C$  sagen?

**Aufgabe 40.15.** Es sei  $V$  ein zweidimensionaler Minkowski-Raum.

- Zeige, dass es eine Basis von  $V$  derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
- Zeige, dass es eine Basis von  $V$  derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich  $-1$  sind.
- Zeige, dass es eine Basis von  $V$  derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

**Aufgabe 40.16.** Bestimme den Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters  $B$  in einem Minkowski-Raum relativ zu sich selbst und die Relativgeschwindigkeit.

**Aufgabe 40.17.** Es seien  $B$  und  $C$  Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von  $C$  relativ zu  $B$ .
- (b) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von  $B$  relativ zu  $C$ .
- (c) Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.

**Aufgabe 40.18.** Zeige, dass die Relativgeschwindigkeit von zwei Beobachtern in einem Minkowski-Raum zwischen 0 und 1 liegt. Kann 1 erreicht werden? Was ist die physikalische Signifikanz dieser Aussage?

## AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 40.19.** (1 Punkt)

Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

**Aufgabe 40.20.** (4 Punkte)

Der  $\mathbb{R}^3$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{3}{3} \end{pmatrix}$  ein Beobachtervektor ist und bestimme eine Orthonormalbasis der Raumkomponente dazu.

**Aufgabe 40.21.** (4 Punkte)

In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten  $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{12} \\ 0 \\ \frac{13}{12} \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 40.22.** (6 (2+2+2) Punkte)Der  $\mathbb{R}^3$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

- Man gebe eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
- Man gebe eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich  $-1$  sind.
- Man gebe eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

**Aufgabe 40.23.** (3 (1+1+1) Punkte)

Es seien  $B$  und  $C$  Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ \sqrt{39} \end{pmatrix}$$

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von  $C$  relativ zu  $B$ .
- Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von  $B$  relativ zu  $C$ .
- Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.

#### 41. VORLESUNG - ADJUNGIERTER ENDOMORPHISMUS

Eine Bilinearform oder eine Sesquilinearform auf einem  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  wird bezüglich einer Basis durch ihre Gramsche Matrix beschrieben. Ebenso wird eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  durch eine Matrix beschrieben. Insgesamt liegt also eine Korrespondenz (bei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )

$$\text{Bilin}(V) \longleftrightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$$

vor. Auf der linken Seite sind Eigenschaften wie symmetrisch, hermitesch, positiv definit relevant, auf der rechten Seite Eigenwerte, Eigenräume, charakteristisches Polynom. Wie hängen diese zwei Begriffswelten zusammen? Mit solchen Fragen werden wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen. Dabei werden wir die Korrespondenz zwischen der linken und der rechten Seite nicht über die Fixierung einer Basis, sondern über die Fixierung eines Skalarproduktes erreichen.

#### ADJUNGIERTER ENDOMORPHISMUS

**Definition 41.1.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Man nennt einen Endomorphismus

$$\psi: V \longrightarrow V$$

*adjungiert* zu  $\varphi$ , wenn

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \psi(w) \rangle$$

für alle  $v, w \in V$  gilt.

**Beispiel 41.2.** Zu einer Isometrie

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

auf einem euklidischen Vektorraum ist die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  der adjungierte Endomorphismus. Es ist ja in diesem Fall

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle \varphi^{-1}(\varphi(v)), \varphi^{-1}(w) \rangle = \langle v, \varphi^{-1}(w) \rangle.$$

**Beispiel 41.3.** Zu einer Streckung  $V \rightarrow V$  auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt mit dem Streckungsfaktor  $s \in \mathbb{K}$  ist die Streckung mit dem Streckungsfaktor  $\bar{s}$  die adjungierte Abbildung. Es ist ja

$$\langle sv, w \rangle = s \langle v, w \rangle = \bar{s} \langle v, w \rangle = \langle v, \bar{s}w \rangle.$$

**Beispiel 41.4.** Die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

besitze eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarproduktes)  $u_1, \dots, u_n$  aus Eigenvektoren, d.h. die beschreibende Matrix besitzt die Diagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann wird der adjungierte Endomorphismus durch die komplex-konjugierte Matrix

$$\psi = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{\lambda}_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

beschrieben. Es ist ja einerseits

$$\langle \varphi(u_i), u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle$$

und andererseits

$$\langle u_i, \psi(u_j) \rangle = \langle u_i, \bar{\lambda}_j u_j \rangle = \bar{\lambda}_j \langle u_i, u_j \rangle.$$

Bei  $i \neq j$  ist dies beides gleich 0 und bei  $i = j$  steht beidseitig  $\lambda_i$ .

**Lemma 41.5.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann existiert der adjungierte Endomorphismus zu  $\varphi$  und ist eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

gegeben und  $w \in V$  fixiert. Dann ist die Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{K}, v \longmapsto \langle \varphi(v), w \rangle,$$

eine Linearform auf  $V$ . Daher gibt es (nach Korollar 38.6 im reellen Fall, für den komplexen Fall siehe Aufgabe 41.16) einen durch  $\varphi$  und  $w$  eindeutig bestimmten Rechtsgradienten  $r = \hat{\varphi}(w)$  aus  $V$  mit

$$\langle v, \hat{\varphi}(w) \rangle = \langle \varphi(v), w \rangle.$$

Wir müssen zeigen, dass die Zuordnung

$$w \longmapsto \hat{\varphi}(w)$$

linear ist. Es ist

$$\begin{aligned} \langle v, \hat{\varphi}(w_1 + w_2) \rangle &= \langle \varphi(v), w_1 + w_2 \rangle \\ &= \langle \varphi(v), w_1 \rangle + \langle \varphi(v), w_2 \rangle \\ &= \langle v, \hat{\varphi}(w_1) \rangle + \langle v, \hat{\varphi}(w_2) \rangle \\ &= \langle v, \hat{\varphi}(w_1) + \hat{\varphi}(w_2) \rangle. \end{aligned}$$

Da dies für alle  $v \in V$  gilt, muss

$$\hat{\varphi}(w_1 + w_2) = \hat{\varphi}(w_1) + \hat{\varphi}(w_2)$$

sein. Ferner ist

$$\begin{aligned} \langle v, \hat{\varphi}(sw) \rangle &= \langle \varphi(v), sw \rangle \\ &= \bar{s} \langle \varphi(v), w \rangle \\ &= \bar{s} \langle v, \hat{\varphi}(w) \rangle \\ &= \langle v, s\hat{\varphi}(w) \rangle. \end{aligned}$$

Da dies für alle  $v \in V$  gilt, ist

$$\hat{\varphi}(sw) = s\hat{\varphi}(w).$$

□

Wie im Beweis dieses Satzes wird der adjungierte Endomorphismus mit  $\hat{\varphi}$  bezeichnet. Wenn man die Zuordnung, die einem Vektor  $w \in V$  die Linearform  $v \mapsto \langle v, w \rangle$  zuordnet, mit  $\Theta$  bezeichnet, so ist

$$\hat{\varphi} = \Theta^{-1} \circ \varphi^* \circ \Theta,$$

wobei

$$\varphi^*: V^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung bezeichnet.

**Lemma 41.6.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus, der bezüglich der Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_n$  durch die Matrix  $M$  beschrieben werde. Dann wird der adjungierte Endomorphismus  $\hat{\varphi}$  bezüglich dieser Basis durch die Matrix  $\overline{M}^{\text{tr}}$  beschrieben.

*Beweis.* Es sei  $u_1, \dots, u_n$  die Orthonormalbasis und es seien

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

bzw.

$$N = (b_{ij})_{ij}$$

die Matrizen von  $\varphi$  bzw.  $\hat{\varphi}$  bezüglich dieser Basis. Dann ist insbesondere

$$\varphi(u_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} u_k$$

und

$$\hat{\varphi}(u_i) = \sum_{k=1}^n b_{ki} u_k.$$

Aufgrund der Adjungiertheit gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} a_{ji} &= \sum_{k=1}^n a_{ki} \langle u_k, u_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} u_k, u_j \right\rangle \\ &= \langle \varphi(u_i), u_j \rangle \\ &= \langle u_i, \hat{\varphi}(u_j) \rangle \\ &= \left\langle u_i, \sum_{k=1}^n b_{kj} u_k \right\rangle \\ &= \langle u_i, b_{ij} u_i \rangle \\ &= \overline{b_{ij}}. \end{aligned}$$

D.h.

$$\overline{N}^{\text{tr}} = M$$

und umgekehrt. □

**Lemma 41.7.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann erfüllt der adjungierte Endomorphismus folgende Eigenschaften (dabei seien  $\varphi, \psi$  Endomorphismen).*

(1)

$$(\varphi + \psi)^{\hat{}} = \hat{\varphi} + \hat{\psi}.$$

(2)

$$(s\varphi)^{\hat{}} = \overline{s} \hat{\varphi}.$$

(3)

$$(\hat{\varphi})^{\hat{}} = \varphi.$$

$$(4) \quad (\varphi \circ \psi)^\wedge = \hat{\psi} \circ \hat{\varphi}.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 41.6. □

### SELBSTADJUNGIERTE ENDOMORPHISMEN

**Definition 41.8.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann heißt  $\varphi$  *selbstadjungiert*, wenn

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

für alle  $u, v \in V$  gilt.

Die Selbstadjungiertheit bedeutet also einfach

$$\varphi = \hat{\varphi}.$$

Eine Streckung ist genau dann selbstadjungiert, wenn der Streckungsfaktor reell ist.

**Satz 41.9.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann ist  $\varphi$  genau dann selbstadjungiert, wenn er bezüglich einer (jeden) Orthonormalbasis von  $V$  durch eine hermitesche Matrix beschrieben wird.*

*Beweis.* Wenn  $\varphi$  selbstadjungiert ist, so folgt die Aussage aus Lemma 41.6. Wenn umgekehrt  $\varphi$  bezüglich einer Orthonormalbasis durch eine hermitesche Matrix  $M$  beschrieben wird, so wird, wiederum nach Lemma 41.6, der adjungierte Endomorphismus  $\hat{\varphi}$  bezüglich der Basis durch

$$\overline{M}^{\text{tr}} = M$$

beschrieben, stimmt also mit  $\varphi$  überein. □

**Lemma 41.10.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Zu einem  $\varphi$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist auch das orthogonale Komplement  $U^\perp$   $\varphi$ -invariant.*
- (2) *Alle Eigenwerte sind reell.*
- (3) *Die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*
- (4) *Es sei  $V$  endlichdimensional. Dann zerfällt das charakteristische Polynom zu  $\varphi$  in Linearfaktoren.*

*Beweis.* (1) Es sei  $v \in U^\perp$  und  $u \in U$ . Wegen der Invarianz von  $U$  ist auch  $\varphi(u) \in U$ . Daher ist

$$\langle \varphi(v), u \rangle = \langle v, \varphi(u) \rangle = 0.$$

Also steht  $\varphi(v)$  senkrecht auf  $U$  und gehört damit zu  $U^\perp$ , was dessen Invarianz bedeutet.

(2) Dies ist nur bei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  relevant. Es sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert und  $v \in V$  ein Eigenvektor, also

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Wir können diesen Eigenvektor als normiert annehmen. Dann ist

$$\lambda = \langle \lambda v, v \rangle = \langle \varphi(v), v \rangle = \langle v, \varphi(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda},$$

also ist  $\lambda$  reell.

(3) Es sei  $v_1$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1$  und  $v_2$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle \varphi(v_1), v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, \varphi(v_2) \rangle \\ &= \langle v_1, \lambda_2(v_2) \rangle \\ &= \bar{\lambda}_2 \langle v_1, v_2 \rangle \\ &= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Dies ist nur bei

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

möglich.

(4) Wir können annehmen, dass  $V = \mathbb{K}^n$  mit dem Standardskalarprodukt vorliegt. Bei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ist die Aussage bekannt, sei also  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Wir können die Abbildung auch als Abbildung von  $\mathbb{C}^n$  nach  $\mathbb{C}^n$  auffassen, wobei die Selbstadjungiertheit erhalten bleibt und wobei sich das charakteristische Polynom nicht ändert. Es zerfällt daher in Linearfaktoren, wobei die Nullstellen nach (2) reell sind.  $\square$

Die folgende Aussage heißt *Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen*.

**Satz 41.11.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren zu  $\varphi$ .*

*Beweis.* Wir führen Induktion über die Dimension von  $V$ . Nach Lemma 41.10 (4) besitzt  $\varphi$  einen Eigenvektor  $v$ , den wir als normiert voraussetzen können, und nach Lemma 41.10 (1) ist das orthogonale Komplement

$$W = \mathbb{K}v^\perp$$

dazu ebenfalls invariant. Daher liegt eine direkte Summenzerlegung

$$V = \mathbb{K}v \oplus W$$

vor. Die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $W$  ist ebenfalls selbstadjungiert und daher liefert die Induktionsvoraussetzung die Behauptung.  $\square$

Insbesondere ist ein selbstadjungierter Endomorphismus diagonalisierbar.

### SELBSTADJUNGIERTE ENDOMORPHISMEN UND HERMITESCHE FORMEN

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Ein Endomorphismus

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

induziert dann mit Hilfe des Skalarproduktes eine Form  $\Psi_\varphi$ , die durch

$$\Psi_\varphi(v, w) = \langle \varphi(v), w \rangle$$

definiert ist. Dafür gelten die folgenden Eigenschaften.

**Lemma 41.12.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Durch die Zuordnung*

$$\text{End}(V) \longrightarrow \text{Sesq}(V), \varphi \longmapsto \Psi_\varphi,$$

*wird einem Endomorphismus eine Sesquilinearform zugeordnet.*

(2) *Diese Zuordnung ist linear und bei endlichdimensionalem  $V$  bijektiv.*

(3) *Es sei  $V$  endlichdimensional. Der Endomorphismus  $\varphi$  ist genau dann bijektiv, wenn  $\Psi_\varphi$  nicht ausgeartet ist.*

(4) *Es sei  $V$  endlichdimensional. Der Endomorphismus  $\varphi$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $\Psi_\varphi$  hermitesch ist.*

*Beweis.* (1) Es ist

$$\begin{aligned} \psi_\varphi(av_1 + bv_2, w) &= \langle \varphi(av_1 + bv_2), w \rangle \\ &= \langle a\varphi(v_1) + b\varphi(v_2), w \rangle \\ &= a \langle \varphi(v_1), w \rangle + b \langle \varphi(v_2), w \rangle \\ &= a\psi_\varphi(v_1, w) + b\psi_\varphi(v_2, w) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi_\varphi(v, aw_1 + bw_2) &= \langle \varphi(v), aw_1 + bw_2 \rangle \\ &= \bar{a} \langle \varphi(v), w_1 \rangle + \bar{b} \langle \varphi(v), w_2 \rangle \\ &= \bar{a}\psi_\varphi(v, w_1) + \bar{b}\psi_\varphi(v, w_2), \end{aligned}$$

also ist die Zuordnung in der ersten Komponente linear und in der zweiten Komponente semilinear. Daher ist  $\Psi_\varphi$  eine Sesquilinearform.

(2) Die Linearität ergibt sich aus der Linearität des Skalarproduktes in der ersten Komponente. Im endlichdimensionalen Fall stehen links und rechts Vektorräume der Dimension  $(\dim_K(V))^2$ , es genügt also, die Injektivität zu zeigen. Wenn  $\Psi_\varphi = 0$  die Nullform ist, so ist  $\langle \varphi(v), w \rangle = 0$  für alle  $v, w$ , sodass insbesondere  $\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = 0$  und somit  $\varphi(v) = 0$  gilt.

(3) Wenn  $\varphi$  nicht bijektiv ist, so sei  $v \in \text{kern } \varphi$ ,  $v \neq 0$ . Dann ist  $\Psi_\varphi(v, -)$  die Nullabbildung in der zweiten Komponente und die Form ist ausgeartet. Es sei umgekehrt  $\Psi_\varphi(-, -)$  ausgeartet. Dann gibt es einen Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , derart, dass  $\langle \varphi(v), - \rangle$  die Nullabbildung ist. Da ein Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, folgt  $\varphi(v) = 0$  und damit ist  $\varphi$  nicht bijektiv.

(4) Im selbstadjungierten Fall ist

$$\Psi_\varphi(v, w) = \langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle = \overline{\langle \varphi(w), v \rangle} = \overline{\Psi_\varphi(w, v)}.$$

Die Umkehrung folgt aus

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \Psi_\varphi(v, w) = \overline{\Psi_\varphi(w, v)} = \overline{\langle \varphi(w), v \rangle} = \langle v, \varphi(w) \rangle.$$

□

## 41. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 41.1.** Bestimme den Kern der Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$  und den Kern der transponierten Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 41.2.** Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine bijektive winkeltreue Abbildung auf einem euklidischen Vektorraum  $V$ . Zeige, dass die adjungierte Abbildung ebenfalls winkeltreu ist.

**Aufgabe 41.3.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und einer Basis  $v_i, i \in I$ . Es seien

$$\varphi, \psi: V \longrightarrow V$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass  $\psi$  genau dann die adjungierte Abbildung zu  $\varphi$  ist, wenn

$$\langle \varphi(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, \psi(v_j) \rangle$$

für alle  $i, j \in I$  ist.

**Aufgabe 41.4.** Die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 - 2i & 3 - 7i & 4 - 7i \\ 1 - 8i & 9 - 2i & 17i \\ 6 & 8 - 9i & 2 - 2i \end{pmatrix}$$

beschrieben. Bestimme die Matrix des adjungierten Endomorphismus.

**Aufgabe 41.5.** Die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix  $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  beschrieben. Auf dem  $\mathbb{R}^2$  sei ein Skalarprodukt  $\Psi$  durch  $\Psi(e_1, e_1) = 4$ ,  $\Psi(e_2, e_2) = 5$  und  $\Psi(e_1, e_2) = 3$  gegeben. Bestimme die Matrix des adjungierten Endomorphismus zu  $\varphi$  bezüglich des gegebenen Skalarproduktes und bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 41.6.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass der adjungierte Endomorphismus folgende Eigenschaften erfüllt.

(1)

$$(\varphi + \psi)^\wedge = \hat{\varphi} + \hat{\psi}.$$

(2)

$$(s\varphi)^\wedge = \bar{s}\hat{\varphi}.$$

(3)

$$(\hat{\varphi})^\wedge = \varphi.$$

(4)

$$(\varphi \circ \psi)^\wedge = \hat{\psi} \circ \hat{\varphi}.$$

**Aufgabe 41.7.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und  $\varphi: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus mit adjungiertem Endomorphismus  $\hat{\varphi}$ . Es sei  $\psi: V \rightarrow W$  eine Isometrie. Zeige, dass der adjungierte Endomorphismus zu

$$\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}: W \longrightarrow W$$

gleich  $\psi \circ \hat{\varphi} \circ \psi^{-1}$  ist.

**Aufgabe 41.8.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt und einer  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$ . Es sei  $\hat{\varphi}$  der adjungierte Endomorphismus zu  $\varphi$ . Zeige, dass  $\hat{\varphi}$  mit dem adjungierten Endomorphismus zu  $\varphi$ , aufgefasst als reell-lineare Abbildung, bezüglich des zugehörigen reellen Skalarproduktes übereinstimmt.

**Aufgabe 41.9.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass die Zuordnung

$$\text{End}(V) \longrightarrow \text{End}(V), \varphi \longmapsto \hat{\varphi},$$

antilinear ist.

**Aufgabe 41.10.** Zeige anhand der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dass ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  nicht invariant unter dem adjungierten Endomorphismus  $\hat{\varphi}$  sein muss.

**Aufgabe 41.11.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei

$$V = V_1 \oplus V_2$$

die direkte Summe der Untervektorräume  $V_1$  und  $V_2$ . Es seien

$$\varphi_1: V_1 \longrightarrow V_1$$

und

$$\varphi_2: V_2 \longrightarrow V_2$$

lineare Abbildungen und

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$

die Summe davon.

- (a) Die Summenzerlegung sei zusätzlich orthogonal, d.h.  $V_1$  und  $V_2$  stehen senkrecht aufeinander. Zeige

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_1 \oplus \hat{\varphi}_2.$$

- (b) Zeige, dass die Aussage aus Teil (1) nicht gilt, wenn die Summenzerlegung nicht orthogonal ist.

**Aufgabe 41.12.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit der orthogonalen Projektion

$$p_U: V \longrightarrow U.$$

Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und sei  $\hat{\varphi}$  der zugehörige adjungierte Endomorphismus. Zeige die Beziehung

$$p_U \circ \hat{\varphi}|_U = (p_U \circ \varphi|_U)^\wedge.$$

**Aufgabe 41.13.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum mit dem Dualraum  $V^*$ .

- (a) Zeige, dass durch

$$\langle f, g \rangle := \langle \text{Grad } f, \text{Grad } g \rangle$$

ein Skalarprodukt auf dem Dualraum erklärt wird.

- (b) Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$V \longrightarrow V^*, v \longmapsto \langle v, - \rangle,$$

eine Isometrie zwischen  $V$  und  $V^*$  stiftet.

**Aufgabe 41.14.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige die folgenden Aussagen.

- (a) Die Identität ist selbstadjungiert.
- (b) Die Hintereinanderschaltung von zwei vertauschbaren selbstadjungierten Abbildungen ist wieder selbstadjungiert.
- (c) Zu einer bijektiven selbstadjungierten Abbildung ist auch die Umkehrabbildung selbstadjungiert.

**Aufgabe 41.15.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus und  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum. Zeige, dass auch die Einschränkung

$$\varphi|_U: U \longrightarrow U$$

selbstadjungiert ist.

**Aufgabe 41.16.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass es zu jeder Linearform  $f \in V^*$  einen eindeutig bestimmten Vektor  $y \in V$  mit

$$f(v) = \langle y, v \rangle$$

für alle  $v \in V$  und einen eindeutig bestimmten Vektor  $z \in V$  mit

$$f(v) = \langle v, z \rangle$$

für alle  $v \in V$  gibt.

**Aufgabe 41.17.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass die Menge der selbstadjungierten Endomorphismen von  $V$  einen Untervektorraum in  $\text{End}(V)$  bilden.

**Aufgabe 41.18.** Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine Isometrie auf einem euklidischen Vektorraum  $V$ . Zeige, dass  $\varphi$  genau dann selbstadjungiert ist, wenn die Ordnung von  $\varphi$  gleich 1 oder gleich 2 ist.

**Aufgabe 41.19.** Es sei  $M$  eine reell-symmetrische  $2 \times 2$ -Matrix. Zeige, dass  $M$  einen Eigenwert besitzt.

**Aufgabe 41.20.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Es sei  $\langle -, - \rangle$  das durch

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Skalarprodukt auf  $V$ . Zu einer linearen Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  bezeichne  $\Psi_\varphi$  die (über  $\langle -, - \rangle$ ) zugehörige Sesquilinearform. Zeige, dass die Gramsche Matrix von  $\Psi_\varphi$  bezüglich der Basis mit der beschreibenden Matrix von  $\varphi$  bezüglich der Basis übereinstimmt.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 41.21.** (4 Punkte)

Es seien  $V_1, \dots, V_n, V_{n+1}$  Vektorräume über  $\mathbb{C}$ , es seien

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow V_{i+1}$$

lineare oder antilineare Abbildungen und es sei

$$\varphi = \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$$

die Hintereinanderschaltung der Abbildungen. Zeige durch Induktion über  $n$  die beiden folgenden Aussagen.

- (a) Wenn die Anzahl der antilinearen Abbildungen gerade ist, so ist  $\varphi$  linear.
- (b) Wenn die Anzahl der antilinearen Abbildungen ungerade ist, so ist  $\varphi$  antilinear.

Gilt von diesen Aussagen auch die Umkehrung?

**Aufgabe 41.22.** (6 Punkte)

Die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix  $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  beschrieben. Auf dem  $\mathbb{R}^2$  sei ein Skalarprodukt  $\Psi$  durch  $\Psi(e_1, e_1) = 3$ ,  $\Psi(e_2, e_2) = 7$  und  $\Psi(e_1, e_2) = 2$  gegeben. Bestimme die Matrix des adjungierten Endomorphismus zu  $\varphi$  bezüglich des gegebenen Skalarproduktes und bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 41.23.** (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die lineare Abbildung, die bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$  durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$  gegeben sei. Bestimme die Matrix zum adjungierten Endomorphismus von  $\varphi$  bezüglich des Standardskalarprodukts und bezüglich dieser Basis.

**Aufgabe 41.24.** (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

die lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 4 & -2 + 9i \\ -2 - 9i & 5 \end{pmatrix}$  gegeben sei. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren von  $\varphi$ .

**Aufgabe 41.25.** (4 (1+1+1+1) Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

aufgefasst als lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ , nicht selbstadjungiert ist, und zwar mit den folgenden Methoden.

- (a) Bestimme die adjungierte Abbildung zu  $M$ .
- (b) Lemma 41.10 (1) ist nicht erfüllt.
- (c) Lemma 41.10 (3) ist nicht erfüllt.
- (d) Es gibt keine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  aus Eigenvektoren zu  $M$  (d.h. die Konklusion aus Satz 41.11 ist nicht erfüllt.)

## 42. VORLESUNG - NORMALE ENDOMORPHISMEN

### NORMALE ENDOMORPHISMEN

Nach Satz 34.2 besitzt eine Isometrie über  $\mathbb{C}$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und nach Satz 41.11 besitzt eine selbstadjungierte Abbildung (über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) ebenfalls eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Wir suchen nach einer Verallgemeinerung dieser beiden Aussagen über  $\mathbb{C}$ . Das Ergebnis ist der *Spektralsatz für normale Endomorphismen*, siehe Satz 42.9. Da es sich dabei um eine äquivalente Formulierung für die Existenz einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren handelt, ist eine weitere Verallgemeinerung nicht möglich.

**Definition 42.1.** Lineare Abbildungen

$$\varphi, \psi: V \longrightarrow V$$

auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  heißen *vertauschbar*, wenn

$$\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$$

gilt.

**Definition 42.2.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Ein Endomorphismus

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

heißt *normal*, wenn  $\varphi$  und der adjungierte Endomorphismus  $\hat{\varphi}$  vertauschbar sind.

Es muss also

$$\varphi \circ \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \circ \varphi$$

gelten. Ein selbstadjungierter Endomorphismus ist trivialerweise normal. Bei einer Isometrie  $\varphi$  ist der adjungierte Endomorphismus nach Beispiel 41.2 gleich  $\varphi^{-1}$ , und somit ist eine Isometrie ebenfalls normal. Wenn der Endomorphismus  $\varphi$  bezüglich einer Orthonormalbasis durch die Matrix  $M$  gegeben ist, so lautet die Normalitätsbedingung

$$M \overline{M}^{\text{tr}} = \overline{M}^{\text{tr}} M.$$

**Beispiel 42.3.** In der zweidimensionalen Situation lautet die Normalitätsbedingung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

was für die Einträge übersetzt zu den beiden Bedingungen

$$b\bar{b} = c\bar{c}$$

und

$$a\bar{c} + b\bar{d} = \bar{a}b + \bar{c}d$$

führt. Neben Diagonalmatrizen und Drehmatrizen haben beispielsweise reelle Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

diese Eigenschaft.

**Beispiel 42.4.** Die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

besitze eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarproduktes)  $u_1, \dots, u_n$  aus Eigenvektoren, d.h. die beschreibende Matrix besitzt die Diagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann wird der adjungierte Endomorphismus nach Beispiel 41.4 durch die komplex-konjugierte Matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{\lambda}_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

beschrieben. Diese beiden Matrizen sind offenbar vertauschbar, d.h. es liegt ein normaler Endomorphismus vor.

Die dritte Eigenschaft des folgenden Lemmas erklärt die Bezeichnung „normal“.

**Lemma 42.5.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

- (1)  $\varphi$  ist normal.

(2) Für alle  $v, w \in V$  gilt

$$\langle \hat{\varphi}(v), \hat{\varphi}(w) \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle.$$

(3) Für alle  $v \in V$  gilt

$$\|\hat{\varphi}(v)\| = \|\varphi(v)\|.$$

*Beweis.* Es ist

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, \hat{\varphi}(\varphi(w)) \rangle = \langle v, (\hat{\varphi} \circ \varphi)(w) \rangle$$

und unter Verwendung von Lemma 41.7 (3) ist

$$\langle \hat{\varphi}(v), \hat{\varphi}(w) \rangle = \langle v, \varphi(\hat{\varphi}(w)) \rangle = \langle v, (\varphi \circ \hat{\varphi})(w) \rangle.$$

Wenn  $\varphi$  und  $\hat{\varphi}$  vertauschen, so gilt also auch

$$\langle \hat{\varphi}(v), \hat{\varphi}(w) \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle$$

für beliebige  $v, w \in V$ . Wenn dies umgekehrt gilt, so ist

$$\langle v, (\hat{\varphi} \circ \varphi)(w) \rangle = \langle v, (\varphi \circ \hat{\varphi})(w) \rangle$$

für alle  $v \in V$  und daher sind die Endomorphismen vertauschbar. Daher sind (1) und (2) äquivalent. Von (2) nach (3) ist eine Einschränkung. Umgekehrt kann man aus (3) auch (2) gewinnen, da man das Skalarprodukt gemäß der Polarisationsformel aus der Norm erhalten kann.  $\square$

**Lemma 42.6.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann ist ein Untervektorraum  $U \subseteq V$  genau dann  $\varphi$ -invariant, wenn das orthogonale Komplement  $U^\perp$  invariant unter  $\hat{\varphi}$  ist.*

*Beweis.* Es sei  $U$  invariant unter  $\varphi$ . Es sei  $v \in U^\perp$  und  $u \in U$ . Dann ist

$$\langle u, \hat{\varphi}(v) \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle = 0.$$

Die Umkehrung ergibt sich daraus, dass die Situation wegen Korollar 32.13 (3) und Lemma 41.7 (3) symmetrisch ist.  $\square$

Nach Aufgabe 42.7 gilt, dass auch  $U$  selbst invariant unter  $\hat{\varphi}$  ist, doch dies beruht auf Satz 42.9 weiter unten.

**Lemma 42.7.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein normaler Endomorphismus. Dann ist*

$$\text{kern } \varphi = \text{kern } \hat{\varphi}.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 42.6.  $\square$

**Lemma 42.8.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein normaler Endomorphismus. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1)  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist ein Eigenwert von  $\varphi$  genau dann, wenn  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert von  $\hat{\varphi}$  ist.
- (2) Ein Vektor  $v \in V$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  genau dann, wenn  $v$  ein Eigenvektor zu  $\hat{\varphi}$  zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$  ist.

*Beweis.* Es sei

$$\psi := \varphi - \lambda \text{Id}_V,$$

dessen Kern der Eigenraum von  $\varphi$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist. Der adjungierte Endomorphismus zu  $\psi$  ist unter Verwendung von Lemma 41.7

$$\hat{\psi} = \hat{\varphi} - (\lambda \text{Id}_V)^\wedge = \hat{\varphi} - \bar{\lambda}(\text{Id}_V)^\wedge = \hat{\varphi} - \bar{\lambda} \text{Id}_V.$$

Nach Aufgabe 42.26 ist auch  $\psi$  normal und nach Lemma 42.7 ist somit

$$\text{Eig}_\lambda(\varphi) = \text{kern}(\varphi - \lambda \text{Id}_V) = \text{kern}(\hat{\varphi} - \bar{\lambda} \text{Id}_V) = \text{Eig}_{\bar{\lambda}}(\hat{\varphi}).$$

□

**Satz 42.9.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann ist  $\varphi$  genau dann normal, wenn es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu  $\varphi$  gibt.*

*Beweis.* Es sei zunächst  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , wobei die  $u_i$  Eigenvektoren zu  $\varphi$  seien. Die beschreibende Matrix  $M$  ist dann eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge die Eigenwerte sind. Nach Lemma 41.6 wird der adjungierte Endomorphismus durch die konjugiert-transponierte Matrix beschrieben. Daher ist diese ebenfalls eine Diagonalmatrix und damit mit  $M$  vertauschbar. Also ist  $\varphi$  normal.

Die Umkehrung beweisen wir durch Induktion über die Dimension von  $V$ . Es sei also  $\varphi$  normal. Der eindimensionale Fall ist klar. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es einen Eigenvektor  $v \in V$  von  $\varphi$ , den wir als normiert annehmen können. Nach Lemma 42.8 (2) ist  $v$  auch ein Eigenvektor zu  $\hat{\varphi}$ . Daraus folgt mit Lemma 42.6, dass  $W = \mathbb{C}v^\perp$  invariant unter  $\varphi$  ist. Daher ist  $\varphi$  die direkte Summe der Einschränkungen  $\varphi$ . Die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $W$  ist somit wieder normal und die Induktionsvoraussetzung liefert die Behauptung. □

Die vorstehende Aussage ist im Reellen nicht richtig, wie jede Drehung (mit Ausnahme der Identität und der Halbdrehung) zeigt.

## HAUPTACHSENTTRANSFORMATION

Wir wenden nun die Ergebnisse der letzten Vorlesung auf hermitesche Formen an. Man spricht von *Hauptachsentransformation*, wobei sich dieser Begriff wohl erst in der nächsten Vorlesung klärt. Da wir im Komplexen arbeiten, erwähnen wir kurz, dass sich die Begriffe positiv definit, negativ definit und Typ, die wir für eine reell-symmetrische Bilinearform definiert haben, direkt auf komplex-hermitesche Sesquilinearformen übertragen. Auch der Sylvester'sche Trägheitssatz gilt mit dem gleichen Beweis entsprechend, ebenso das Minorenkriterium.

**Satz 42.10.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit einer hermiteschen Sesquilinearform  $\langle -, - \rangle$  vom Typ  $(p, q)$ . Dann ist die Gramsche Matrix von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit  $p$  positiven reellen und  $q$  negativen reellen Einträgen.*

Daraus folgt auch unmittelbar, dass wenn man mit einer reell-symmetrischen Bilinearform auf dem  $\mathbb{R}^n$  startet und diese als hermitesche Sesquilinearform auf dem  $\mathbb{C}^n$  auffasst, der reelle Typ mit dem komplexen Typ übereinstimmt. Der große Vorteil der komplexen Situation ist, dass der Fundamentalsatz der Algebra zur Verfügung steht, was die Existenz von Eigenwerten sichert. Selbst wenn man wie in Lemma 41.10 weiß, dass alle Eigenwerte reell sind, so wird deren Existenz erst über die komplexen Zahlen gesichert.

**Satz 42.11.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei  $\Psi$  eine hermitesche Form auf  $V$ , die dem selbstadjungierten Endomorphismus*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*im Sinne von Lemma 41.12 entspricht. Es sei  $(p, q)$  der Typ von  $\Psi$ . Dann ist  $p$  die Anzahl der positiven Eigenwerte und  $q$  die Anzahl der negativen Eigenwerte von  $\varphi$ , wobei man diese Anzahl mit der (algebraischen oder geometrischen) Vielfachheit nehmen muss.*

*Beweis.* Nach Lemma 41.10 zerfällt das charakteristische Polynom von  $\varphi$  in reelle Linearfaktoren. Es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die positiven Nullstellen und  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$  die negativen Nullstellen. Nach Satz 41.11 liegt eine direkte, bezüglich des Skalarproduktes orthogonale Summenzerlegung

$$V = \text{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus \text{Eig}_{\lambda_r}(\varphi) \oplus \text{Eig}_{\lambda_{r+1}}(\varphi) \oplus \dots \oplus \text{Eig}_{\lambda_s}(\varphi) \oplus \text{Eig}_0(\varphi)$$

vor (wobei  $\text{Eig}_0(\varphi)$  der Nullraum sein kann). Für Vektoren  $v_i$  und  $v_j$  aus verschiedenen Eigenräumen ist

$$\Psi(v_i, v_j) = \langle \varphi(v_i), v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = 0,$$

sodass die Eigenräume auch bezüglich der Form  $\Psi$  orthogonal sind. Für

$$v = v_1 + \dots + v_r \neq 0$$

mit  $v_i \in \text{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)$  ist

$$\begin{aligned}\Psi(v, v) &= \Psi(v_1, v_1) + \cdots + \Psi(v_r, v_r) \\ &= \Psi_\varphi(v_1, v_1) + \cdots + \Psi_\varphi(v_r, v_r) \\ &= \langle \varphi(v_1), v_1 \rangle + \cdots + \langle \varphi(v_r), v_r \rangle \\ &= \langle \lambda_1 v_1, v_1 \rangle + \cdots + \langle \lambda_r v_r, v_r \rangle \\ &= \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \cdots + \lambda_r \langle v_r, v_r \rangle \\ &> 0.\end{aligned}$$

Auf diesem Unterraum ist also die eingeschränkte Form positiv definit, sodass

$$p \geq \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{K}}(\text{Eig}_{\lambda_i}(\varphi))$$

ist. Wäre  $p$  echt größer als diese Dimension, so würde es einen  $p$ -dimensionalen Untervektorraum  $W \subseteq V$  derart geben, dass die Einschränkung von  $\Psi$  darauf positiv definit ist und so, dass nach Korollar 9.8

$$W \cap (\text{Eig}_{\lambda_{r+1}}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \text{Eig}_{\lambda_s}(\varphi) \oplus \text{Eig}_0(\varphi)) \neq 0$$

ist. Dies ergibt direkt einen Widerspruch, da auf dem rechten Raum die Form  $\Psi$  negativ semidefinit ist. Also ist

$$p = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{K}}(\text{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)).$$

Die Argumentation für  $q$  verläuft gleich. □

Wir können nun den Beweis zum Eigenwertkriterium für den Typ einer reell-symmetrischen Bilinearform nachtragen. Dieser ergibt sich unmittelbar aus Satz 42.11.

Der folgende Satz heißt *Satz über die Hauptachsentransformation*.

**Satz 42.12.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei  $\Psi$  eine hermitesche Form auf  $V$ . Dann gibt es eine Orthonormalbasis von  $V$  (bezüglich des Skalarproduktes), die eine Orthogonalbasis bezüglich  $\Psi$  ist.*

*Beweis.* Nach Lemma 41.12 (2) und Lemma 41.12 (4) ist

$$\Psi = \Psi_\varphi$$

für einen selbstadjungierten Endomorphismus

$$\varphi: V \longrightarrow V.$$

Nach Satz 41.11 gibt es eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  aus Eigenvektoren zu  $\varphi$  mit den Eigenwerten  $\lambda_i$ . Für diese Basis gilt

$$\Psi(v_i, v_j) = \Psi_\varphi(v_i, v_j) = \langle \varphi(v_i), v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle.$$

Daher liegt auch eine Orthogonalbasis bezüglich  $\Psi$  vor. □

In diesem Zusammenhang heißen die Eigengeraden von  $\varphi$  auch *Hauptachsen* von  $\Psi_\varphi$  und die Eigenwerte auch *Hauptwerte*.

## 42. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 42.1.** Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  definiert einen Endomorphismus  $\mu_z: x \rightarrow zx$ . Skizziere in der Ebene  $\mathbb{C}$  diejenigen komplexen Zahlen mit der Eigenschaft, dass  $\mu_z$  eine Isometrie, selbstadjungiert, eine selbstadjungierte Isometrie bzw. normal ist.

**Aufgabe 42.2.** Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  definiert eine Streckung  $\mu_z: v \rightarrow zv$  auf dem  $\mathbb{C}^n$ . Für welche Zahlen  $z$  handelt es sich dabei um eine Isometrie, einen selbstadjungierten Endomorphismus, einen normalen Endomorphismus?

**Aufgabe 42.3.** Wann ist eine Scherung  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  auf dem  $\mathbb{R}^2$  ein normaler Endomorphismus?

**Aufgabe 42.4.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann normal ist, wenn der adjungierte Endomorphismus  $\hat{\varphi}$  normal ist.

**Aufgabe 42.5.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei

$$V = V_1 \oplus V_2$$

die direkte Summe der Untervektorräume  $V_1$  und  $V_2$ , die zueinander orthogonal seien. Es seien

$$\varphi_1: V_1 \longrightarrow V_1$$

und

$$\varphi_2: V_2 \longrightarrow V_2$$

normale Endomorphismen und

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$

die Summe davon. Zeige, dass auch  $\varphi$  normal ist.

**Aufgabe 42.6.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus. Zeige

$$\text{kern } \varphi = \text{kern } \hat{\varphi}.$$

Für die Lösung der folgenden Aufgabe benutze man Satz 42.9 und Aufgabe 26.22.

**Aufgabe 42.7.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus und  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum. Zeige, dass  $U$  auch invariant unter dem adjungierten Endomorphismus  $\hat{\varphi}$  ist.

**Aufgabe 42.8.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus und  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum. Zeige, dass auch die Einschränkung

$$\varphi|_U: U \longrightarrow U$$

normal ist.

**Aufgabe 42.9.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass die Menge der normalen Endomorphismen von  $V$  keinen Untervektorraum in  $\text{End}(V)$  bilden.

**Aufgabe 42.10.** Die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  werde bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$  beschrieben. Handelt es sich um einen normalen Endomorphismus?

**Aufgabe 42.11.** Die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  werde bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$  durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$  beschrieben. Handelt es sich um einen normalen Endomorphismus?

**Aufgabe 42.12.** Entscheide, ob es für die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 - 3i & 4 + 5i \\ 11 - 3i & 6 + 9i \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^2$  aus Eigenvektoren gibt.

**Aufgabe 42.13.** Entscheide, ob es für die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 - 5i & 3 - 4i & 1 + 5i \\ 0 & 1 - i & 2 + 9i \\ 6 + 3i & i - 7 & -4i \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^3$  aus Eigenvektoren gibt.

**Aufgabe 42.14.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus und  $\Psi_\varphi$  die zugehörige Sesquilinearform im Sinne von Lemma 41.12. Wie verhält sich die beschreibende Matrix von  $\varphi$  zur Gramschen Matrix zu  $\Psi_\varphi$ ? Welche Beziehung besteht zur Gramschen Matrix der Form  $\Theta_\varphi$ , die durch

$$\Theta_\varphi(v, w) = \langle v, \varphi(w) \rangle$$

definiert wird.

**Aufgabe 42.15.** Es sei  $X^2 + (3 - 2i)X - 6i$  das charakteristische Polynom eines normalen Endomorphismus  $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Bestimme das charakteristische Polynom des adjungierten Endomorphismus  $\hat{\varphi}$ .

**Aufgabe 42.16.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem fixierten Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Wir nennen eine Sesquilinearform  $\Psi$  auf  $V$  *orthogonalisierbar*, wenn es eine Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_n$  (bezüglich des Skalarproduktes) von  $V$  mit

$$\Psi(u_i, u_j) = 0$$

für alle  $i \neq j$  gibt. Zeige, dass bei der Korrespondenz

$$\text{End}(V) \longrightarrow \text{Sesq}(V), \varphi \longmapsto \Psi_\varphi,$$

die normalen Endomorphismen den orthogonalisierbaren Sesquilinearformen entsprechen.

**Aufgabe 42.17.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine hermitesche Sesquilinearform auf  $V$ . Zeige, dass  $V$  eine Orthogonalbasis besitzt.

**Aufgabe 42.18.** Beweise den Trägheitssatz von Sylvester für eine komplex-hermitesche Form.

**Aufgabe 42.19.** Der  $\mathbb{R}^4$  sei (neben dem Standardskalarprodukt) mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Man gebe eine Basis des  $\mathbb{R}^4$  an, die bezüglich des Skalarproduktes eine Orthonormalbasis und bezüglich der Minkowski-Form eine Orthogonalbasis ist.

**Aufgabe 42.20.** Der  $\mathbb{R}^2$  sei (neben dem Standardskalarprodukt) mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Bestimme sämtliche Basen des  $\mathbb{R}^2$ , die bezüglich des Skalarproduktes eine Orthonormalbasis und bezüglich der Minkowski-Form eine Orthogonalbasis sind.

**Aufgabe 42.21.** Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 7 & -9 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

**Aufgabe 42.22.** Bestimme den Typ der Matrix

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 - 2i & -1 + 3i \\ 3 + 2i & 1 & 5 \\ -1 - 3i & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.23.** Es sei  $\Psi$  eine hermitesche Form mit der Gramschen Matrix  $G$  (bezüglich einer Basis). Zeige, dass die Determinante von  $G$  reell ist.

**Aufgabe 42.24.** Es sei  $\Psi$  eine hermitesche Form mit der Gramschen Matrix  $G$  (bezüglich einer Basis). Zeige, dass das charakteristische Polynom von  $G$  reelle Koeffizienten besitzt.

## AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 42.25.** (2 Punkte)

Die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  werde bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$  durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  beschrieben. Handelt es sich um einen normalen Endomorphismus?

**Aufgabe 42.26.** (2 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus. Zeige, dass auch  $\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V$  normal ist.

**Aufgabe 42.27.** (3 Punkte)

Entscheide, ob es für die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4+i & 6-7i & 6+3i \\ 4-i & 2-i & 2-i \\ 5+3i & 2i-11 & 4+3i \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^3$  aus Eigenvektoren gibt.

**Aufgabe 42.28.** (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$ . Zeige, dass  $\varphi$  genau dann selbstadjungiert ist, wenn alle Eigenwerte von  $\varphi$  reell sind.

**Aufgabe 42.29.** (3 Punkte)

Bestimme den Typ der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 3-i & -4+i \\ 3+i & 2 & 7i \\ -4-i & -7i & 4 \end{pmatrix}.$$

## 43. VORLESUNG - QUADRATISCHE FORMEN

## POLYNOME IN MEHREREN VARIABLEN UND NULLSTELLENMENGEN

Als eine Anwendung der Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matrizen bzw. der Hauptachsentransformation besprechen wir, wie man einfache polynomiale Gleichungen in mehreren Variablen von niedrigem Grad auf eine besonders einfache Form bringen kann. Dazu führen wir kurz Polynome in mehreren Variablen ein.

**Definition 43.1.** Zu einer Variablenmenge  $X_1, \dots, X_n$  und einem  $n$ -Tupel  $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$  nennt man einen Ausdruck der Form  $X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$  ein *Monom* in den  $X_i$ .

Der *Grad* eines Monoms ist die Summe der Exponenten, also gleich  $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$ .

**Definition 43.2.** Unter einem *Polynom*  $F$  in den Variablen  $X_1, \dots, X_n$  über einem Körper  $K$  versteht man eine endliche Linearkombination von Monomen

$$F = \sum_{\nu} c_{\nu} X^{\nu}$$

mit  $c_{\nu} \in K$ .

Der *Grad eines Polynoms* ist das Maximum der Grade der beteiligten Monome (also derjenigen Monome, die mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten wirklich vorkommen). Ein Polynom  $F = F(X_1, \dots, X_n)$  in  $n$  Variablen über  $K$  definiert durch Einsetzen eine Funktion

$$K^n \longrightarrow K, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto F(x_1, \dots, x_n).$$

Dies sind wichtige Funktionen in der höherdimensionalen Analysis. Die Variable  $X_i$  in diesem Sinne interpretiert repräsentiert einfach die  $i$ -te Projektion, und die Addition und die Multiplikation von Polynomen entspricht dann der Addition und der Multiplikation von Funktionen, bei der die Werte in  $K$  addiert bzw. multipliziert werden.

**Definition 43.3.** Zu einem Körper  $K$  und einer Variablenmenge  $X_1, \dots, X_n$  besteht der *Polynomring*

$$K[X_1, \dots, X_n]$$

aus allen Polynomen  $F(X_1, \dots, X_n)$  in diesen Variablen, wobei diese Menge durch die komponentenweise Addition und die Multiplikation, die sich durch die distributive Fortsetzung der Regel

$$X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n} \cdot X_1^{s_1} \cdots X_n^{s_n} := X_1^{r_1+s_1} \cdots X_n^{r_n+s_n}$$

ergibt, zu einem kommutativen Ring gemacht wird.

**Definition 43.4.** Es sei  $K$  ein Körper und sei  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynom in  $n$  Variablen. Dann nennt man

$$\{P \in K^n \mid F(P) = 0\}$$

das *Nullstellengebilde* (oder *Nullstellenmenge*) zu  $F$ .

Das Nullstellengebilde zu  $F$  ist also einfach die Faser zu der durch  $F$  gegebenen Funktion

$$F: K^n \longrightarrow K.$$

Bei  $n = 1$  ist dies einfach eine endliche Ansammlung von einzelnen Punkten, den Nullstellen von  $F$ , (bei  $F = 0$  handelt es sich um ganz  $K$ ), bei  $n \geq 2$  entstehen aber zunehmend interessantere und kompliziertere geometrische Gebilde. Das Studium dieser Gebilde heißt *algebraische Geometrie*. Bei  $n = 2$  spricht man von algebraischen Kurven.

Bei beliebigem  $n$  hat ein Polynom vom Grad  $\leq 1$  die Gestalt

$$F = a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b$$

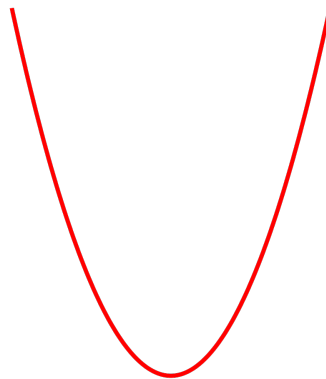
und das zugehörige Nullstellengebilde ist einfach die Lösungsmenge der inhomogenen linearen Gleichung

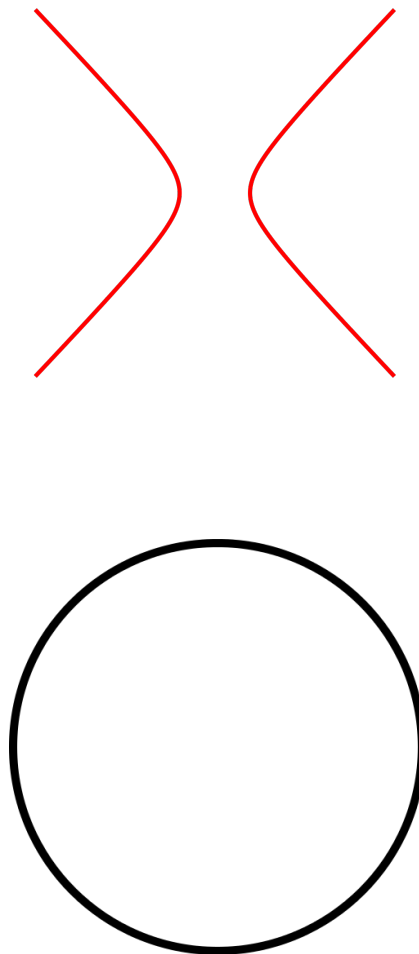
$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = -b,$$

also ein affin-linearer Raum.

## REELLE QUADRIKEN

Die Polynome vom Grad zwei und ihre Nullstellenmengen sind weitgehend mit Mitteln der linearen Algebra beherrschbar.





**Definition 43.5.** Unter einem *quadratischen Polynom*  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  über einem Körper  $K$  versteht man ein Polynom vom Grad 2, also einen Ausdruck der Form

$$F = \sum_{i \leq j} a_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n b_i X_i + c$$

mit  $a_{ij}, b_i, c \in K$ .

**Beispiel 43.6.** Zu einem quadratischen Polynom  $aX^2 + bX + c$  in einer Variablen  $X$  mit  $a, b, c \in K$  und  $a \neq 0$  findet man die Nullstellen durch *quadratisches Ergänzen*. D.h. man schreibt (die Charakteristik des Körpers sei nicht 2)

$$aX^2 + bX + c = a \left( X^2 + \frac{b}{a} X + \frac{c}{a} \right) = a \left( \left( X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right).$$

Dies ist genau dann gleich 0, wenn

$$X = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} - \frac{b}{2a}}$$

und die Wurzel

$$\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

in dem Körper existiert. Je nachdem gibt es keine, eine oder zwei Lösungen.

Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen quadratischen Polynomen und Bilinearformen her.

**Definition 43.7.** Zu einer Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  nennt man die Abbildung

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, v \rangle,$$

die *zugehörige quadratische Form*.

Zu einer fixierten Basis  $v_1, \dots, v_n$  wird eine Bilinearform durch ihre Gramsche Matrix

$$G = (g_{ij})_{ij}$$

beschrieben, und die zugehörige quadratische Form  $V \rightarrow K$  wird, wenn man  $X_i$  für die  $i$ -te Projektion (die zugehörige Dualbasis) schreibt, durch das quadratische Polynom

$$(X_1, \dots, X_n) G \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} X_i X_j = \sum_i g_{ii} X_i^2 + \sum_{i < j} (g_{ij} + g_{ji}) X_i X_j$$

beschrieben. Im symmetrischen Fall ist dies

$$\sum_i g_{ii} X_i^2 + \sum_{i < j} 2g_{ij} X_i X_j.$$

Umgekehrt kann man jedes rein-quadratische Polynom in  $n$  Variablen in dieser Weise mit einer symmetrischen Gramschen Matrix ausdrücken. Die Theorie der reell-symmetrischen Bilinearformen erlaubt es, durch eine geeignete Koordinatentransformation (einen Basiswechsel) die gemischten Terme wegzukriegen.

**Beispiel 43.8.** Wir erstellen eine Liste von reellen quadratischen Polynomen in den beiden Variablen  $X$  und  $Y$  mit den zugehörigen Nullstellenmengen, wobei wir die Koeffizienten auf  $0, 1, -1$  beschränken. Wenn nur die eine Variable  $X$  vorkommt, so hat man im Wesentlichen die drei folgenden Möglichkeiten.

- $X^2$  Das Nullstellengebilde ist eine „verdoppelte Gerade“.
- $X^2 - 1$  Das bedeutet  $X = \pm 1$ , das Nullstellengebilde besteht also aus *zwei parallelen Geraden*.

- $X^2 + 1$  Das Nullstellengebilde ist *leer*.

In diesen Fällen (wo die zweite Variable  $Y$  nicht explizit vorkommt) ist das Nullstellengebilde einfach die Produktmenge eines nulldimensionalen Nullstellengebilde (endlich viele Punkte) und einer Geraden.

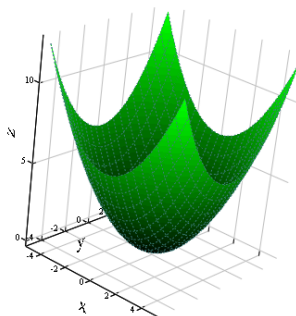
Nun betrachten wir die Polynome, wo beide Variablen vorkommen.

- $Y^2 - X$  Das Nullstellengebilde ist eine *Parabel*.
- $Y^2 - X^2$  Das bedeutet  $(Y - X)(Y + X) = 0$ , das Nullstellengebilde besteht also aus *zwei sich kreuzenden Geraden*.
- $Y^2 + X^2$  Die einzige Lösung ist der *Punkt*  $(0, 0)$ , das Nullstellengebilde ist also ein einziger Punkt.
- $Y^2 - X^2 - 1$  Das bedeutet  $(Y - X)(Y + X) = 1$ , das Nullstellengebilde ist also eine *Hyperbel*.
- $Y^2 + X^2 - 1$  Das Nullstellengebilde ist der *Einheitskreis*.
- $Y^2 + X^2 + 1$  Das ist wieder *leer*.

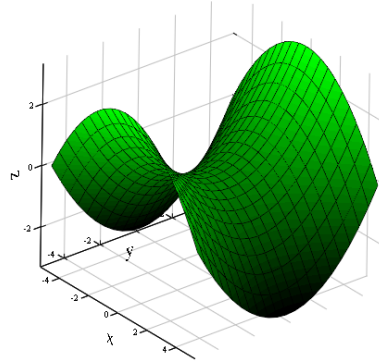
Das Polynom  $XY - 1$  taucht in dieser Liste nicht direkt auf, da es in den Variablen  $X = U + V$  und  $Y = U - V$ , also

$$U^2 - V^2 = 1$$

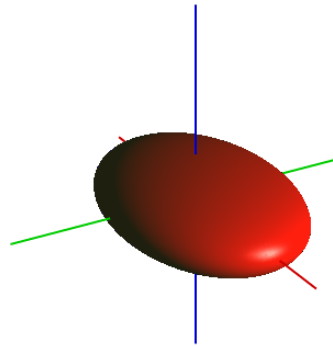
geschrieben werden kann. In dieser Form ist es also doch in der Liste. Der folgende Satz sagt unter anderem, dass bis auf Verzerrungen die Liste vollständig ist.



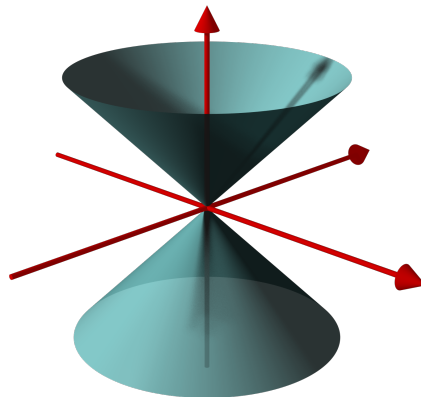
Ein *Paraboloid*.



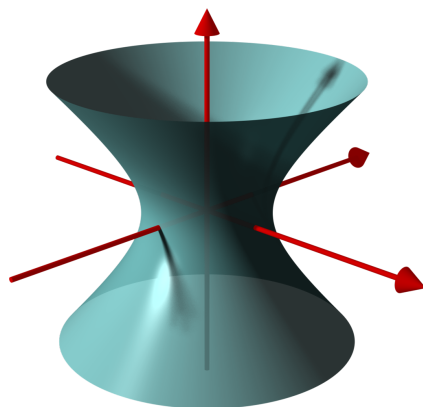
Ein *hyperbolisches Paraboloid*, auch eine *Sattelfläche* genannt.



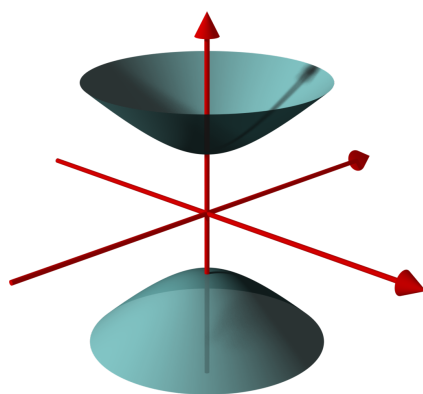
Ein *Ellipsoid*. Die Oberfläche ist eine *Quadrik*.



Ein *Doppelkegel*.



Ein einschaliges Hyperboloid.



Ein zweischaliges Hyperboloid.

**Beispiel 43.9.** Wir erstellen eine Liste von reellen quadratischen Polynomen in den drei Variablen  $X, Y$  und  $Z$  mit den zugehörigen Nullstellenmengen, wobei wir die Koeffizienten auf  $0, 1, -1$  beschränken. Ferner betrachten wir nur solche Polynome, wo sämtliche Variablen vorkommen und deren Nullstellengebilde nicht leer ist.

- $Y^2 + X^2 - Z$  Das Nullstellengebilde ist ein *Paraboloid*.
- $Y^2 - X^2 - Z$  Das Nullstellengebilde ist eine *Sattelfläche*.
- $X^2 + Y^2 + Z^2$  Die einzige Lösung ist der *Punkt*  $(0, 0, 0)$ , das Nullstellengebilde ist also ein einziger Punkt.
- $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1$  Das Nullstellengebilde ist eine *Sphäre*, also die Oberfläche einer Kugel.
- $X^2 + Y^2 - Z^2$  Das Nullstellengebilde ist die Lösungsmenge zur Gleichung  $Z^2 = X^2 + Y^2$ . Das ist ein runder (Doppel)-*Kegel*.
- $X^2 + Y^2 - Z^2 - 1$  Das Nullstellengebilde ist ein *einschaliges Hyperboloid*.

- $X^2 + Y^2 - Z^2 + 1$  Das Nullstellengebilde ist ein *zweischaliges Hyperboloid*.

**Satz 43.10.** *Jedes reelle rein-quadratische Polynom*

$$F = \sum_{i \leq j} a_{ij} X_i X_j$$

*besitzt in einer geeigneten Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarproduktes) die Form*

$$F = \sum_{1 \leq i \leq n} r_i U_i^2.$$

*Die Koeffizienten  $r_i$  sind die Eigenwerte der quadratischen symmetrischen Matrix*

$$M = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

*mit*

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{für } i = j, \\ \frac{a_{ij}}{2} & \text{für } i < j, \\ \frac{a_{ji}}{2} & \text{für } i > j. \end{cases}$$

*Beweis.* Mit der im Satz aufgestellten Matrix  $M$  kann man das Polynom in der Form

$$(X_1, \dots, X_n) M \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Nach Definition ist die Matrix  $M$  symmetrisch. Nach Satz 42.12 gibt es eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  des  $\mathbb{R}^n$ , bezüglich der die neue Gramsche Matrix

$$D = B^{\text{tr}} M B$$

Diagonalgestalt besitzt, wobei

$$B = M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{v}}$$

die Basiswechselmatrix von der neuen Basis zur Standardbasis bezeichnet, was wir kurz als

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = B^{\text{tr}} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

im Sinne von Bemerkung 9.3 ausdrücken. Es sei  $U_1, \dots, U_n$  die Dualbasis zur neuen Orthonormalbasis. Die  $U_i$  beschreiben also die neuen Koordinatenfunktionen, und diese fassen wir als neue Variablen auf. Es besteht dann nach Lemma 14.14 die Beziehung

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_d \end{pmatrix}.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} F &= (X_1, \dots, X_n) M \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\ &= (X_1, \dots, X_n) B^{-1\text{tr}} D B^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\ &= (U_1, \dots, U_n) D \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenn man dies ausrechnet, so ergibt sich  $\sum_{i=1}^n r_i U_i^2$ , wobei die  $r_i$  die Diagonaleinträge von  $D$  sind. Nach Lemma 21.10 stimmen die Eigenwerte von  $M$  mit denen von  $D$  (einschließlich der Vielfachheiten) überein.  $\square$

**Beispiel 43.11.** Wir betrachten das rein-quadratische Polynom

$$F = 3X^2 - 4XY + 5Y^2.$$

Um Satz 43.10 anzuwenden, müssen wir von der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte bestimmen. Das charakteristische Polynom ist

$$(X - 3)(X - 5) - 4 = X^2 - 8X + 11 = (X - 4)^2 - 5.$$

Somit sind die Eigenwerte gleich

$$x_1 = \sqrt{5} + 4 \text{ und } x_2 = -\sqrt{5} + 4.$$

In einer geeigneten Orthonormalbasis besitzt dieses Polynom daher die Form

$$F = (\sqrt{5} + 4)U^2 + (-\sqrt{5} + 4)V^2.$$

**Beispiel 43.12.** Wir möchten die rein-quadratische Form

$$\frac{3}{2}X^2 + 2Y^2 + 2XY - 2YZ$$

auf Standardform im Sinne von Satz 43.10 bringen. Die zugehörige symmetrische Matrix ist

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

deren Eigenwerte wir bestimmen müssen. Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\det \begin{pmatrix} X - \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -1 & X - 2 & 1 \\ 0 & 1 & X \end{pmatrix} = \left(X - \frac{3}{2}\right)(X^2 - 2X - 1) - X$$

$$\begin{aligned}
&= X^3 - \frac{7}{2}X^2 + X + \frac{3}{2} \\
&= (X-1)\left(X^2 - \frac{5}{2}X - \frac{3}{2}\right) \\
&= (X-1)(X-3)\left(X + \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

die Eigenwerte sind also

$$1, 3, -\frac{1}{2}.$$

In den neuen Variablen  $U, V, W$  zur Orthonormalbasis aus den Eigenvektoren zu diesen Eigenwerte ist

$$F = U^2 + 3V^2 - \frac{1}{2}W^2.$$

**Satz 43.13.** *Jedes reelle quadratische Polynom*

$$F = \sum_{i \leq j} a_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n b_i X_i + c$$

besitzt in einer geeigneten (verschobenen) Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarproduktes) die Form (mit  $k \leq n$  und  $r_i \neq 0$ )

$$F = \sum_{1 \leq i \leq k} r_i U_i^2 + s$$

oder die Form (mit  $k \leq n-1$  und  $r_i \neq 0$ )

$$F = \sum_{1 \leq i \leq k} r_i U_i^2 + s U_{k+1}.$$

*Beweis.* Wir führen auf dem rein-quadratischen Anteil  $\sum_{i \leq j} a_{ij} X_i X_j$  die Transformation aus Satz 43.10 durch und erhalten neue Variablen  $V_j$  (die dual zu einer Orthonormalbasis sind), in denen das Polynom die Gestalt

$$F = \sum_{1 \leq i \leq k} e_i V_i^2 + \sum_{j=1}^n f_j V_j + g$$

bekommt, mit einem gewissen  $k$  zwischen 1 und  $n$ , wobei die  $e_i \neq 0$  seien. Die Summanden

$$e_i V_i^2 + f_i V_i$$

können durch quadratisches Ergänzen mit den neuen Variablen  $U_i = V_i + h_i$  auf die Gestalt

$$e_i U_i^2 + g_i$$

gebracht werden. Abgesehen vom nun rein-quadratischen Term bleibt entweder eine Konstante oder ein lineares Polynom übrig, welches als Variable  $U_{k+1}$  angesetzt werden kann.  $\square$

Die im vorstehenden Satz auftretende Darstellung nennen wir die *Standardgestalt* einer quadratischen Form. Bei ihr kommen nur rein-quadratische Terme sowie allenfalls eine Variable in der ersten Potenz vor. Der Satz besagt also, dass jede quadratische Form in geeigneten orthonormalen (kartesischen) Koordinaten auf eine solche Standardgestalt gebracht werden kann. Für das Nullstellengebilde bedeutet eine solche Koordinatentransformation lediglich, dass eine affin-lineare Isometrie angewendet wird.

**Bemerkung 43.14.** Eine quadratische Form in Standardgestalt

$$\sum_{1 \leq i \leq k} r_i U_i^2 + s \text{ bzw. } \sum_{1 \leq i \leq k} r_i U_i^2 + s U_{k+1},$$

wie sie nach Satz 43.13 stets erreicht werden kann, kann weiter vereinfacht werden, wobei man allerdings Verzerrungen in Kauf nehmen muss. In den neuen Koordinaten

$$Z_i = \sqrt{|r_i|} U_i$$

bzw.

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{|r_i|}} Z_i$$

für  $i = 1, \dots, k$  besitzt die quadratische Form eine Darstellung der Form

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \pm Z_i^2 + s \text{ bzw. } \sum_{1 \leq i \leq k} \pm Z_i^2 + s Z_{k+1},$$

wobei die Vorfaktoren jetzt gleich 1 oder gleich  $-1$  sind. Man spricht von einer *normierten Standardgestalt* der quadratischen Form. Durch Vertauschen der Reihenfolge kann man erreichen, dass die ersten Variablen den Vorfaktor 1 und die hinteren den Vorfaktor  $-1$  besitzen. Bei diesem Übergang erfährt das Nullstellengebilde Verzerrungen, aus einer Ellipse wird beispielsweise ein Kreis gemacht oder eine Parabel wird gestaucht. Da sich das Nullstellengebilde nicht ändert, wenn man die Form mit  $-1$  multipliziert, kann man davon ausgehen, dass die Anzahl des Vorfaktors 1 mindestens so groß ist wie die Anzahl des Vorfaktors  $-1$ .

**Beispiel 43.15.** Wir betrachten das quadratische Polynom

$$F = 3X^2 - 4XY + 5Y^2 + 6X + 2Y - 7$$

und möchten es gemäß Satz 43.13 auf Standardform bringen. In Beispiel 43.11 haben wir den rein-quadratischen Anteil  $3X^2 - 4XY + 5Y^2$  mit Hilfe der symmetrischen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

untersucht und die Eigenwerte als

$$x_1 = \sqrt{5} + 4 \text{ und } x_2 = -\sqrt{5} + 4$$

bestimmt. Um  $F$  selbst auf Standardform zu bringen, brauchen wir die Eigenvektoren, und müssen mit ihnen den Variablenwechsel explizit durchführen. Die Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5} + 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$$

und somit bilden

$$u = \frac{1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5} + 1 \end{pmatrix} \text{ und } v = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Es besteht die Beziehung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

im Sinne von Bemerkung 9.3, und mit den neuen Variablen  $U, V$  gilt gemäß Lemma 14.14 die Beziehung

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

Daher ist (für den rein-quadratischen Anteil muss man nichts ausrechnen)

$$\begin{aligned} & F \\ &= 3X^2 - 4XY + 5Y^2 + 6X + 2Y - 7 \\ &= (\sqrt{5} + 4)U^2 + (-\sqrt{5} + 4)V^2 + 6 \left( \frac{-2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}U + \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}V \right) \\ &\quad + 2 \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}U + \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}V \right) V - 7 \\ &= (\sqrt{5} + 4)U^2 + (-\sqrt{5} + 4)V^2 + \frac{-10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}U + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}V - 7. \end{aligned}$$

Quadratisches Ergänzen mit

$$U = W + \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(\sqrt{5} + 4)}$$

bzw.

$$V = Z + \frac{-5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}(-\sqrt{5} + 4)}$$

liefert

$$\begin{aligned} & (\sqrt{5} + 4)U^2 + \frac{-10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}U \\ &= (\sqrt{5} + 4)W^2 + \frac{-10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(\sqrt{5} + 4)} \end{aligned}$$

$$= (\sqrt{5} + 4)W^2 - \frac{60 - 20\sqrt{5}}{(10 + 2\sqrt{5})(\sqrt{5} + 4)}$$

und

$$\begin{aligned} & (-\sqrt{5} + 4)V^2 + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}V \\ = & (-\sqrt{5} + 4)Z^2 + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cdot \frac{-5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}(-\sqrt{5} + 4)} \\ = & (-\sqrt{5} + 4)Z^2 - \frac{60 + 20\sqrt{5}}{(10 - 2\sqrt{5})(-\sqrt{5} + 4)}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$\begin{aligned} & F \\ = & (\sqrt{5} + 4)W^2 + (-\sqrt{5} + 4)Z^2 - \frac{60 - 20\sqrt{5}}{(10 + 2\sqrt{5})(\sqrt{5} + 4)} \\ & - \frac{60 + 20\sqrt{5}}{(10 - 2\sqrt{5})(-\sqrt{5} + 4)} - 7. \end{aligned}$$

### 43. ARBEITSBLATT

#### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 43.1.** Multipliziere in  $\mathbb{Z}/(5)[x, y]$  die beiden Polynome

$$x^4 + 2x^2y^2 - xy^3 + 2y^3 \text{ und } x^4y + 4x^2y + 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^2.$$

**Aufgabe 43.2.** Multipliziere in  $\mathbb{Q}[x, y, z]$  die beiden Polynome

$$x^5 + 3x^2y^2 - xyz^3 \text{ und } 2x^3yz + z^2 + 5xy^2z - x^2y.$$

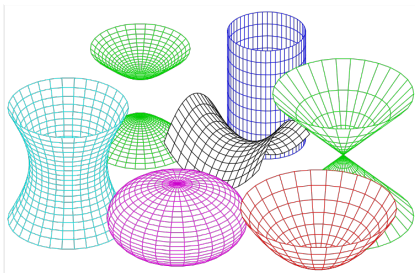
**Aufgabe 43.3.** Zeige, dass im Polynomring  $K[X, Y]$  über einem Körper  $K$  das Ideal  $(X, Y)$  kein Hauptideal ist.

**Aufgabe 43.4.** Skizziere im  $\mathbb{R}^2$  die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

- (1)  $x^2 - y^2 - 1 = 0$ ,
- (2)  $x^2 + xy + y^2 = 0$ ,
- (3)  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ,
- (4)  $x^2 + y^2 = 0$ ,

- (5)  $x^2 + y^3 = 0$ ,  
 (6)  $x^3 - y^5 = 0$ ,  
 (7)  $x^2 - x^3 = 0$ ,  
 (8)  $x^3 + y^3 = 1$ ,  
 (9)  $x^4 + y^4 = 1$ ,  
 (10)  $-5 + 3x + 4x^2 + x^3 - y^2 = 1$ .

**Aufgabe 43.5.** Welche der unten skizzierten Quadriken kann man (in welchem Sinne) mit weniger als drei Variablen beschreiben?



**Aufgabe 43.6.** Bestimme, welche Quadriken aus Beispiel 43.9 sich als Graph und welche sich als Rotationsfläche beschreiben lassen.

In den folgenden Aufgaben ist Standardform im Sinne von Satz 43.10 zu verstehen.

**Aufgabe 43.7.** Bringe das reelle rein-quadratische Polynom

$$3X^2 - 5Y^2 + 8XY$$

auf eine Standardgestalt.

**Aufgabe 43.8.** Bringe das reelle rein-quadratische Polynom

$$2X^2 - Y^2 + 3Z^2 + 4YZ$$

auf eine Standardgestalt.

In den folgenden Aufgaben ist Standardform im Sinne von Satz 43.13 zu verstehen. Es muss die neue Basis, die Variablentransformation (Koordinatentransformation) und das vereinfachte quadratische Polynom angegeben werden.

**Aufgabe 43.9.** Wir betrachten das reelle quadratische Polynom

$$F = X^2 - 4Y^2 + 6XY - 3X + Y + 2$$

mit dem rein-quadratischen Anteil

$$G = X^2 - 4Y^2 + 6XY.$$

- Bestimme eine Standardgestalt für  $G$ .
- Bestimme eine Orthonormalbasis, bezüglich der  $G$  Standardgestalt besitzt. Wie drückt man die Variablen  $X, Y$  mit den neuen Variablen aus?
- Drücke  $F$  in den Variablen zur neuen Orthonormalbasis aus.
- Bestimme eine Standardgestalt von  $F$ .

**Aufgabe 43.10.** Bringe das reelle quadratische Polynom

$$5X^2 - 2Y^2 - 6XY - 5X - 3Y - 7$$

auf eine Standardgestalt.

In der folgenden Aufgabe geht es um zwei Definitionen für eine Ellipse.

**Aufgabe 43.11.** Es seien  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^2$  zwei Punkte,  $c > 0$  und es sei

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, Q_1) + d(P, Q_2) = c\}.$$

Zeige, dass  $E$  die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in zwei Variablen ist. Wie sieht die Standardgestalt aus? Was sind die Hauptachsen?

Tipp: Führe die beschriebene Situation auf den Fall zurück, wo  $Q_1 = (e, 0)$  und  $Q_2 = (-e, 0)$ .

Unter normierter Standardgestalt verstehen wir eine quadratische Form, bei der die Koeffizienten nur den Wert  $0, 1, -1$  haben dürfen. Dies kann man durch Verzerrungen stets erreichen (wobei aber die Orthogonalität verloren geht).

**Aufgabe 43.12.** Bestimme die normierte Standardgestalt der reellen Quadrik

$$7x^2 - 11y^2 + 15xy.$$

**Aufgabe 43.13.** Bestimme die normierte Standardgestalt der reellen Quadrik

$$3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2yz.$$

**Aufgabe 43.14.** Bestimme die normierte Standardgestalt der reellen Quadrik

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 4xy + 6xy - 2yz.$$

**Aufgabe 43.15.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum der Dimension  $n$ . Wir betrachten die Menge

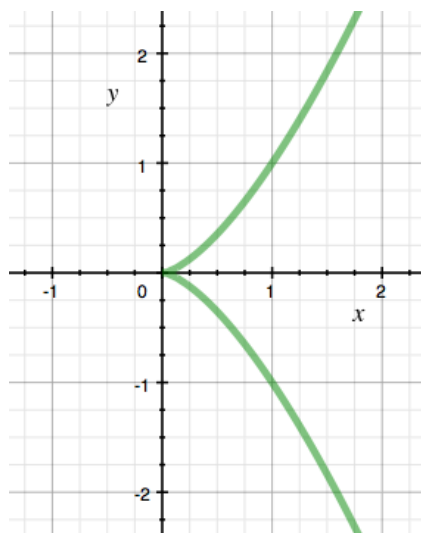
$$T = \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Für welche  $n$  ist  $T$  wegzusammenhängend, für welche zerfällt es in verschiedene Komponenten?

**Aufgabe 43.16.** Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum der Dimension  $n$ . Wir betrachten die Menge

$$T = \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Es sei  $w$  der Beobachtervektor eines Beobachters  $B$  und es sei  $V_B$  seine Raumkomponente. Welche Gestalt besitzt  $T \cap V_B$ ?



**Aufgabe 43.17.** Es sei  $K$  ein Körper. Das Bild der durch

$$K \longrightarrow K^2, t \longmapsto (t^2, t^3),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt  $(x, y) \in K^2$  genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung  $x^3 = y^2$  erfüllt.

**Aufgabe 43.18.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3).$$

Bestimme die Punkte  $t_0 \in \mathbb{R}$ , für die der Abstand der zugehörigen Kurvenpunkte  $f(t) = (t^2, t^3)$  zum Punkt  $(1, 0)$  minimal wird.

**Aufgabe 43.19.** Wir betrachten die Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

(a) Zeige, dass die Bildpunkte  $(x, y)$  der Kurve die Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3$$

erfüllen.

(b) Zeige, dass jeder Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $y^2 = x^2 + x^3$  zum Bild der Kurve gehört.

(c) Zeige, dass es genau zwei Punkte  $t_1$  und  $t_2$  mit identischem Bildpunkt gibt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

**Aufgabe 43.20.** Es sei  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  das Bild unter der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^3 - 1, t^2 - 1).$$

Bestimme ein Polynom  $F \neq 0$  in zwei Variablen derart, dass  $C$  auf dem Nullstellengebilde zu  $F$  liegt.

**Aufgabe 43.21.** Es sei  $T$  der Graph der Standardparabel

$$y = x^2$$

und  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  die Rotationsfläche zu  $T$  um die  $x$ -Achse.

(a) Zeige, dass  $M$  durch keine Quadrik beschrieben wird.

(b) Zeige, dass  $M$  die Nullstellenmenge eines Polynoms in drei Variablen ist.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 43.22.** (3 Punkte)

Wie viele Monome vom Grad  $d$  gibt es im Polynomring in einer, in zwei und in drei Variablen?

**Aufgabe 43.23.** (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper  $K = \mathbb{Z}/(2)$ ,  $\mathbb{Z}/(3)$ ,  $\mathbb{Z}/(5)$  und  $\mathbb{Z}/(7)$ .

**Aufgabe 43.24.** (8 (2+2+2+2) Punkte)

Wir betrachten das reelle quadratische Polynom

$$F = 3X^2 - 5Y^2 + 7XY + 4X - 2Y + 5$$

mit dem rein-quadratischen Anteil

$$G = 3X^2 - 5Y^2 + 7XY.$$

- Bestimme eine Standardgestalt für  $G$ .
- Bestimme eine Orthonormalbasis, bezüglich der  $G$  Standardgestalt besitzt. Wie drückt man die Variablen  $X, Y$  mit den neuen Variablen aus?
- Drücke  $F$  in den Variablen zur neuen Orthonormalbasis aus.
- Bestimme eine Standardgestalt von  $F$ .

**Aufgabe 43.25.** (10 (4+6) Punkte)

Wir betrachten den Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und es sei  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  eine affine Ebene. Der Durchschnitt  $K \cap E$  heißt *Kegelschnitt*.

- Zeige, dass jeder Kegelschnitt

$$K \cap E \subseteq E \cong \mathbb{R}^2$$

in geeigneten Koordinaten  $u, v$  des  $\mathbb{R}^2$  als Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in  $u, v$  beschrieben werden kann.

- Bestimme, welche der Quadriken aus Beispiel 43.8 sich als Kegelschnitte realisieren lassen.

**Aufgabe 43.26.** (4 Punkte)

Bestimme die normierte Standardgestalt der reellen Quadrik

$$5x^2 - 4y^2 + z^2 - xy + 3xz.$$

#### 44. VORLESUNG - GRUPPENHOMOMORPHISMEN

In den folgenden Vorlesungen werden wir unsere Methoden um einige wesentliche Aspekte erweitern, indem wir insbesondere Äquivalenzrelationen in algebraischen Strukturen und Restklassenbildung besprechen. Diese Konstruktionen verlaufen für verschiedene algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe, Vektorräume) nach dem gleichen Schema, sodass wir diese Konstruktion grundlegend für Gruppen besprechen.

## GRUPPEN

Für ein Element  $g \in G$  einer multiplikativ geschriebenen Gruppe  $G$  und  $n \in \mathbb{N}$  schreibt man

$$g^n = g \cdots g$$

( $n$  mal) und

$$g^n = (g^{-1})^{-n}$$

für  $n \in \mathbb{Z}_-$ . Aufgrund der Potenzgesetze, siehe Aufgabe 44.2, passt dies zusammen. Für Permutationen und invertierbare Matrizen haben wir schon mehrfach über die Ordnung gesprochen.

**Definition 44.1.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$  ein Element. Dann nennt man die kleinste positive Zahl  $n$  mit  $g^n = e_G$  die *Ordnung* von  $g$ . Man schreibt hierfür  $\text{ord}(g)$ . Wenn alle positiven Potenzen von  $g$  vom neutralen Element verschieden sind, so setzt man  $\text{ord}(g) = \infty$ .

**Definition 44.2.** Eine Gruppe  $G$  heißt *zyklisch*, wenn sie von einem Element erzeugt wird.

Das bedeutet, dass es ein Element  $g \in G$  (einen *Erzeuger*) derart gibt, dass man jedes Element aus  $G$  als  $g^n$  mit einem  $n \in \mathbb{Z}$  schreiben kann. Die Gruppe  $(\mathbb{Z}, +, 0)$  ist zyklisch, wobei man 1 oder  $-1$  als Erzeuger nehmen kann. Auch die Untergruppen von  $\mathbb{Z}$  sind selbst wieder zyklisch, wie die folgende Aussage zeigt.

**Satz 44.3.** Die Untergruppen von  $\mathbb{Z}$  sind genau die Teilmengen der Form

$$\mathbb{Z}d = \{kd \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

mit einer eindeutig bestimmten nichtnegativen Zahl  $d$ .

*Beweis.* Siehe Aufgabe 44.3. □

**Beispiel 44.4.** Es sei  $d \in \mathbb{N}_+$ . Wir betrachten auf

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \dots, d-1\}$$

die Verknüpfung

$$a + b := (a + b) \pmod{d} = \begin{cases} a + b, & \text{falls } a + b < d, \\ a + b - d, & \text{falls } a + b \geq d. \end{cases}$$

Mit dieser Verknüpfung liegt gemäß Aufgabe 44.14 eine Gruppe vor. Da man jedes Element als eine gewisse Summe der 1 mit sich selbst schreiben kann, liegt eine zyklische Gruppe vor.

## GRUPPENHOMOMORPHISMEN

Gruppenhomomorphismen haben wir schon in der 18ten Vorlesung in Zusammenhang mit dem Signum einer Permutation erwähnt.

**Definition 44.5.** Es seien  $(G, \circ, e_G)$  und  $(H, \circ, e_H)$  Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi: G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle  $g, g' \in G$  gilt.

Die Menge der Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $H$  wird mit

$$\text{Hom}(G, H)$$

bezeichnet. Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen sind insbesondere Gruppenhomomorphismen. Die beiden folgenden Lemmata folgen direkt aus der Definition.

**Lemma 44.6.** *Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und  $\varphi: G \rightarrow H$  sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist  $\varphi(e_G) = e_H$  und  $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$  für jedes  $g \in G$ .*

*Beweis.* Zum Beweis der ersten Aussage betrachten wir

$$\varphi(e_G) = \varphi(e_G e_G) = \varphi(e_G) \varphi(e_G).$$

Durch Multiplikation mit  $\varphi(e_G)^{-1}$  folgt  $e_H = \varphi(e_G)$ . Zum Beweis der zweiten Behauptung verwenden wir

$$\varphi(g^{-1}) \varphi(g) = \varphi(g^{-1} g) = \varphi(e_G) = e_H.$$

Das heißt, dass  $\varphi(g^{-1})$  die Eigenschaft besitzt, die für das Inverse von  $\varphi(g)$  charakteristisch ist. Da das Inverse in einer Gruppe nach Lemma 3.2 eindeutig bestimmt ist, muss  $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$  gelten.  $\square$

**Lemma 44.7.** *Es seien  $F, G, H$  Gruppen. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die Identität*

$$\text{Id}: G \longrightarrow G$$

*ist ein Gruppenhomomorphismus.*

(2) *Sind  $\varphi: F \rightarrow G$  und  $\psi: G \rightarrow H$  Gruppenhomomorphismen, so ist auch die Hintereinanderschaltung  $\psi \circ \varphi: F \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus.*

(3) *Ist  $F \subseteq G$  eine Untergruppe, so ist die Inklusion  $F \hookrightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus.*

- (4) Es sei  $\{e\}$  die triviale Gruppe. Dann ist die Abbildung  $\{e\} \rightarrow G$ , die  $e$  auf  $e_G$  schickt, ein Gruppenhomomorphismus. Ebenso ist die (konstante) Abbildung  $G \rightarrow \{e\}$  ein Gruppenhomomorphismus.

*Beweis.* Das ist trivial. □

**Beispiel 44.8.** Es sei  $d \in \mathbb{N}$  fixiert. Die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto dn,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Dies folgt unmittelbar aus dem Distributivgesetz. Für  $d \geq 1$  ist diese Abbildung injektiv und das Bild ist die Untergruppe  $\mathbb{Z}d \subseteq \mathbb{Z}$ . Bei  $d = 0$  liegt die Nullabbildung vor. Bei  $d = 1$  ist die Abbildung die Identität, bei  $d \geq 2$  ist die Abbildung nicht surjektiv.

**Beispiel 44.9.** Es sei  $d \in \mathbb{N}_+$ . Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \dots, d-1\}$$

mit der in Beispiel 44.4 beschriebenen Addition, die damit eine Gruppe ist. Die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(d),$$

die eine ganze Zahl  $n$  auf ihren Rest bei Division durch  $d$  abbildet, ist ein Gruppenhomomorphismus. Sind nämlich  $m = ad + r$  und  $n = bd + s$  mit  $0 \leq r, s < d$  gegeben, so ist

$$m + n = (a + b)d + r + s,$$

wobei allerdings  $r + s \geq d$  sein kann. In diesem Fall ist

$$\varphi(m + n) = r + s - d$$

und das stimmt mit der Addition von  $r$  und  $s$  in  $\mathbb{Z}/(d)$  überein. Diese Abbildungen sind surjektiv, aber nicht injektiv.

**Beispiel 44.10.** Zu einem Körper  $K$  und  $n \in \mathbb{N}_+$  ist die Determinante

$$\det: \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow K^\times, M \longmapsto \det M,$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dies beruht auf dem Determinantenmultiplikationssatz und Satz 16.11.

**Beispiel 44.11.** Die Zuordnung

$$S_n \longrightarrow \{1, -1\}, \pi \longmapsto \mathrm{sgn}(\pi),$$

wobei  $S_n$  die Permutationsgruppe zu  $n$  Elementen bezeichnet, ist nach Satz 18.13 ein Gruppenhomomorphismus.

**Lemma 44.12.** Es sei  $G$  eine Gruppe. Dann entsprechen sich eindeutig Gruppenelemente  $g \in G$  und Gruppenhomomorphismen  $\varphi$  von  $\mathbb{Z}$  nach  $G$  über die Korrespondenz

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1).$$

*Beweis.* Es sei  $g \in G$  fixiert. Dass die Abbildung

$$\varphi_g: \mathbb{Z} \longrightarrow G, n \longmapsto g^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, ist eine Umformulierung der Potenzgesetze. Wegen  $\varphi_g(1) = g^1 = g$  erhält man aus der Potenzabbildung das Gruppenelement zurück. Umgekehrt ist ein Gruppenhomomorphismus  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$  durch  $\varphi(1)$  eindeutig festgelegt, da  $\varphi(n) = (\varphi(1))^n$  für  $n$  positiv und  $\varphi(n) = ((\varphi(1))^{-1})^{-n}$  für  $n$  negativ gelten muss.  $\square$

Man kann den Inhalt dieses Lemmas auch kurz durch  $G \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$  ausdrücken. Die Gruppenhomomorphismen von einer Gruppe  $G$  nach  $\mathbb{Z}$  sind schwieriger zu charakterisieren. Die Gruppenhomomorphismen von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$  sind die Multiplikationen mit einer festen ganzen Zahl  $a$ , also

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto ax.$$

#### GRUPPENISOMORPHISMEN

**Definition 44.13.** Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen. Einen bijektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

nennt man einen *Isomorphismus* (oder eine *Isomorphie*).

Bijektive lineare Abbildungen sind insbesondere Gruppenisomorphismen.

**Definition 44.14.** Die Gruppen  $H$  und  $G$  heißen *isomorph*, wenn es einen Gruppenisomorphismus  $\varphi: G \rightarrow H$  gibt.

**Lemma 44.15.** *Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

*ein Gruppenisomorphismus. Dann ist auch die Umkehrabbildung*

$$\varphi^{-1}: H \longrightarrow G, h \longmapsto \varphi^{-1}(h),$$

*ein Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(h_1 h_2) &= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(h_1))\varphi(\varphi^{-1}(h_2))) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2))) \\ &= \varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2). \end{aligned}$$

$\square$

**Beispiel 44.16.** Betrachte die additive Gruppe der reellen Zahlen, also  $(\mathbb{R}, 0, +)$ , und die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen, also  $(\mathbb{R}_+, 1, \cdot)$ . Dann ist die Exponentialabbildung

$$\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto \exp(x),$$

ein Gruppenisomorphismus. Dies beruht auf grundlegenden analytischen Eigenschaften der Exponentialfunktion. Die Homomorphieeigenschaft ist lediglich eine Umformulierung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x) \exp(y).$$

Die Injektivität der Abbildung folgt aus der strengen Monotonie, die Surjektivität folgt aus dem Zwischenwertsatz. Die Umkehrabbildung ist der natürliche Logarithmus, der somit ebenfalls ein Gruppenisomorphismus ist.

Isomorphe Gruppen sind bezüglich ihrer gruppentheoretischen Eigenschaften als gleich anzusehen. Isomorphismen einer Gruppe auf sich selbst nennt man auch *Automorphismen*. Die Menge aller Automorphismen auf  $G$  bildet mit der Hintereinanderschaltung eine Gruppe, die man mit  $\text{Aut } G$  bezeichnet und die die *Automorphismengruppe* zu  $G$  nennt. Wichtige Beispiele für Automorphismen sind die sogenannten inneren Automorphismen.

**Definition 44.17.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$  fixiert. Die durch  $g$  definierte Abbildung

$$\kappa_g: G \longrightarrow G, x \longmapsto gxg^{-1},$$

heißt *innerer Automorphismus*.

Diese Abbildung  $\kappa_g$  heißt auch die *Konjugation* mit  $g$ . Wenn  $G$  eine kommutative Gruppe ist, so ist wegen  $gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$  die Identität der einzige innere Automorphismus. Der Begriff ist also nur bei nicht kommutativen Gruppen von Interesse.

**Beispiel 44.18.** Zu einer fixierten invertierbaren Matrix  $B \in \text{GL}_n(K)$  ist die Konjugation

$$\kappa_B: \text{GL}_n(K) \longrightarrow \text{GL}_n(K), M \longmapsto BMB^{-1},$$

gerade diejenige Abbildung, die der beschreibenden Matrix  $M$  zu einer linearen Abbildung bezüglich einer Basis die beschreibende Matrix bezüglich einer neuen Basis zuordnet.

**Lemma 44.19.** *Ein innerer Automorphismus ist in der Tat ein Automorphismus. Die Zuordnung*

$$G \longrightarrow \text{Aut } G, g \longmapsto \kappa_g,$$

*ist ein Gruppenhomomorphismus.*

*Beweis.* Es ist

$$\kappa_g(xy) = gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = \kappa_g(x)\kappa_g(y),$$

sodass ein Gruppenhomomorphismus vorliegt. Wegen

$$\kappa_g(\kappa_h(x)) = \kappa_g(hxh^{-1}) = ghxh^{-1}g^{-1} = ghx(gh)^{-1} = \kappa_{gh}(x)$$

ist einerseits

$$\kappa_{g^{-1}} \circ \kappa_g = \kappa_{g^{-1}g} = \text{Id}_G,$$

sodass  $\kappa_g$  bijektiv, also ein Automorphismus, ist. Andererseits ist deshalb die Gesamtabbildung  $\kappa$  ein Gruppenhomomorphismus.  $\square$

### DER KERN EINES GRUPPENHOMOMORPHISMUS

**Definition 44.20.** Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dann nennt man das Urbild des neutralen Elementes den *Kern* von  $\varphi$ , geschrieben

$$\text{kern } \varphi = \varphi^{-1}(e_H) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}.$$

**Lemma 44.21.** Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der Kern von  $\varphi$  eine Untergruppe von  $G$ .

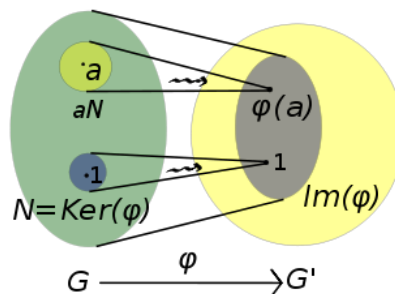
*Beweis.* Wegen  $\varphi(e_G) = e_H$  ist  $e_G \in \text{kern } \varphi$ . Seien  $g, g' \in \text{kern } \varphi$ . Dann ist

$$\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = e_H e_H = e_H$$

und daher ist auch  $gg' \in \text{kern } \varphi$ . Der Kern ist also ein Untermonoid. Es sei nun  $g \in \text{kern } \varphi$ , wir betrachten das inverse Element  $g^{-1}$ . Nach Lemma 44.6 ist

$$\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} = e_H^{-1} = e_H,$$

also auch  $g^{-1} \in \text{kern } \varphi$ .  $\square$



Wie für lineare Abbildungen gilt wieder das *Kernkriterium für die Injektivität*.

**Lemma 44.22.** Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen. Ein Gruppenhomomorphismus  $\varphi: G \rightarrow H$  ist genau dann injektiv, wenn der Kern von  $\varphi$  trivial ist.

*Beweis.* Wenn  $\varphi$  injektiv ist, so darf auf jedes Element  $h \in H$  höchstens ein Element aus  $G$  gehen. Da  $e_G$  auf  $e_H$  geschickt wird, darf kein weiteres Element auf  $e_H$  gehen, d.h.  $\ker \varphi = \{e_G\}$ . Es sei umgekehrt dies der Fall und sei angenommen, dass  $g, \tilde{g} \in G$  beide auf  $h \in H$  geschickt werden. Dann ist

$$\varphi(g\tilde{g}^{-1}) = \varphi(g)\varphi(\tilde{g})^{-1} = hh^{-1} = e_H$$

und damit ist  $g\tilde{g}^{-1} \in \ker \varphi$ , also  $g\tilde{g}^{-1} = e_G$  nach Voraussetzung und damit  $g = \tilde{g}$ .  $\square$

## DAS BILD EINES GRUPPENHOMOMORPHISMUS

**Lemma 44.23.** *Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

*ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist das Bild von  $\varphi$  eine Untergruppe von  $H$ .*

*Beweis.* Es sei  $B := \text{bild } \varphi$ . Dann ist  $e_H = \varphi(e_G) \in B$ . Es seien  $h_1, h_2 \in B$ . Dann gibt es  $g_1, g_2 \in G$  mit  $\varphi(g_1) = h_1$  und  $\varphi(g_2) = h_2$ . Damit ist  $h_1 \cdot h_2 = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) = \varphi(g_1 \cdot g_2) \in B$ . Ebenso gibt es für  $h \in B$  ein  $g \in G$  mit  $\varphi(g) = h$ . Somit ist  $h^{-1} = (\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in B$ .  $\square$

**Beispiel 44.24.** Betrachte die analytische Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Aufgrund des Exponentialgesetzes (bzw. der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen) ist  $e^{i(t+s)} = e^{it}e^{is}$ . Daher liegt ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe  $(\mathbb{R}, +, 0)$  in die multiplikative Gruppe  $(\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$  vor. Wir bestimmen den Kern und das Bild dieser Abbildung. Für den Kern muss man diejenigen reellen Zahlen  $t$  bestimmen, für die

$$\cos t = 1 \text{ und } \sin t = 0$$

ist. Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen ist dies genau dann der Fall, wenn  $t$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist. Der Kern ist also die Untergruppe  $2\pi\mathbb{Z}$ . Für einen Bildpunkt gilt  $|e^{it}| = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ , sodass der Bildpunkt auf dem komplexen Einheitskreis liegt. Andererseits durchlaufen die trigonometrischen Funktionen den gesamten Einheitskreis, sodass die Bildgruppe der Einheitskreis mit der komplexen Multiplikation ist.

## 44. ARBEITSBLATT

## ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 44.1.** Beweise das folgende *Untergruppenkriterium*. Eine nichtleere Teilmenge  $H \subseteq G$  einer Gruppe  $G$  ist genau dann eine Untergruppe, wenn gilt:

$$\text{für alle } g, h \in H \text{ ist } gh^{-1} \in H.$$

**Aufgabe 44.2.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$  ein Element, und seien  $m, n \in \mathbb{Z}$  ganze Zahlen. Zeige die folgenden Potenzgesetze.

- (1) Es ist  $g^0 = e_G$ .
- (2) Es ist  $g^{m+n} = g^m g^n$ .

**Aufgabe 44.3.** Zeige, dass die Untergruppen von  $\mathbb{Z}$  genau die Teilmengen der Form

$$\mathbb{Z}d = \{kd \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

mit einer eindeutig bestimmten nicht-negativen Zahl  $d$  sind.

**Aufgabe 44.4.** Berechne die Ordnung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

über dem Körper  $\mathbb{F}_5$ .

**Aufgabe 44.5.** Betrachte die rationalen Zahlen  $(\mathbb{Q}, +, 0)$  als kommutative Gruppe. Es sei  $G \subseteq \mathbb{Q}$  eine endlich erzeugte Untergruppe. Zeige, dass  $G$  zyklisch ist.

**Aufgabe 44.6.** Beweise Lemma 44.7.

**Aufgabe 44.7.** Es sei  $G$  eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G, x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

**Aufgabe 44.8.** Es sei  $G$  eine kommutative Gruppe und

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass  $H$  ebenfalls kommutativ ist.

**Aufgabe 44.9.** Es sei  $G$  eine additiv geschriebene kommutative Gruppe. Zeige, dass die Negation, also die Abbildung

$$G \longrightarrow G, x \longmapsto -x,$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

**Aufgabe 44.10.** Bestimme, ob die durch die Gaußklammer gegebene Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}, q \longmapsto \lfloor q \rfloor,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist oder nicht.

**Aufgabe 44.11.** (a) Für welche reellen Polynome  $P \in \mathbb{R}[X]$  ist die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, +), x \longmapsto P(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

(b) Für welche reellen Polynome  $Q \in \mathbb{R}[X]$  ist allenfalls 0 eine Nullstelle und die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}^\times, 1, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot), x \longmapsto Q(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

**Aufgabe 44.12.** Zeige, dass die Abbildung

$$S_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \pi \longmapsto M_\pi,$$

die einer Permutation  $\pi$  auf  $\{1, \dots, n\}$  ihre Permutationsmatrix  $M_\pi$  zuordnet, ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

**Aufgabe 44.13.** Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $h \in R$ . Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R, f \longmapsto hf,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Beschreibe das Bild und den Kern dieser Abbildung.

Mit dem Konzept der Restklassenbildung werden die folgenden Aufgaben bald deutlich einfacher.

**Aufgabe 44.14.** Es sei  $d \in \mathbb{N}_+$ . Wir betrachten auf

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \dots, d-1\}$$

die Verknüpfung

$$a + b := (a + b) \pmod{d} = \begin{cases} a + b, & \text{falls } a + b < d, \\ a + b - d, & \text{falls } a + b \geq d. \end{cases}$$

Zeige, dass dadurch eine assoziative Verknüpfung auf dieser Menge definiert ist, und dass damit sogar eine Gruppe vorliegt.

**Aufgabe 44.15.** Es sei  $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Wir betrachten

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \dots, d-1\}$$

mit der in Aufgabe 44.14 beschriebenen Addition. Zeige, dass die Abbildung

$$\psi: \mathbb{Z}/(d) \longrightarrow \mathbb{Z}, r \longmapsto r,$$

kein Gruppenhomomorphismus ist.

**Aufgabe 44.16.** Bestimme die Ordnungen sämtlicher Elemente in der Gruppe  $\mathbb{Z}/(100)$ .

**Aufgabe 44.17.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $h \in G$ . Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow G, g \longmapsto hgh^{-1},$$

eine Gruppenautomorphismus ist.

**Aufgabe 44.18.** Wir betrachten die Abbildung

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 8x - 4y + 14z - 7w & -28x + 16y - 49z + 28w \\ 2x - y + 4z - 2w & -7x + 4y - 14z + 8w \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass es sich dabei um einen inneren Automorphismus handelt.

**Aufgabe 44.19.** Es seien  $a, b, c, d$  reelle Zahlen mit  $ad - bc = 1$ . Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} adx - acy + bdz - bcw & -abx + a^2y - b^2z + abw \\ cdx - c^2y + d^2z - cdw & -bcx + acy - bdz + adw \end{pmatrix}$$

ein innerer Automorphismus ist.

**Aufgabe 44.20.** Es sei  $M$  eine endliche Menge und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge, und es seien  $\text{Perm}(T)$  und  $\text{Perm}(M)$  die zugehörigen Permutationsgruppen (also die Menge aller bijektiven Abbildungen auf  $M$ , siehe Aufgabe 3.10). Zeige, dass durch

$$\Psi: \text{Perm}(T) \longrightarrow \text{Perm}(M), \varphi \longmapsto \tilde{\varphi},$$

mit

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{falls } x \in T, \\ x & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus gegeben ist.

**Aufgabe 44.21.** Es sei  $G$  eine Gruppe und sei  $g \in G$  ein Element und sei

$$\varphi: G \longrightarrow G, h \longmapsto hg,$$

die Multiplikation mit  $g$ . Zeige, dass  $\varphi$  bijektiv ist, und dass  $\varphi$  genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn  $g = e_G$  ist.

**Aufgabe 44.22.** Gibt es Gruppenhomomorphismen

$$(\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0),$$

die nicht  $\mathbb{R}$ -linear sind?

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 44.23.** (3 (1+2) Punkte)

Es seien  $G_1, \dots, G_n$  Gruppen.

(a) Definiere eine Gruppenstruktur auf dem Produkt

$$G_1 \times \cdots \times G_n.$$

(b) Es sei  $H$  eine weitere Gruppe. Zeige, dass eine Abbildung

$$\varphi: H \longrightarrow G_1 \times \cdots \times G_n, x \longmapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)),$$

genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn alle Komponenten  $\varphi_i$  Gruppenhomomorphismen sind.

**Aufgabe 44.24.** (2 Punkte)

Bestimme die Ordnungen sämtlicher Elemente in der Gruppe  $\mathbb{Z}/(12)$ .

**Aufgabe 44.25.** (3 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen von  $(\mathbb{Q}, +, 0)$  nach  $(\mathbb{Z}, +, 0)$ .

**Aufgabe 44.26.** (2 Punkte)

Bestimme für jedes  $n \in \mathbb{N}$  den Kern des Potenzierens

$$\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times, z \longmapsto z^n.$$

Wann ist die Abbildung surjektiv?

**Aufgabe 44.27.** (1 Punkt)

Zeige, dass es keinen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: (\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow G$$

in eine Gruppe  $G$  mit der Eigenschaft gibt, dass  $r \in \mathbb{R}$  genau dann irrational ist, wenn  $\varphi(r) = 0$  ist.

## 45. VORLESUNG - ÄQUIVALENZRELATIONEN

## RELATIONEN

**Definition 45.1.** Es seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Eine *Relation* zwischen  $X$  und  $Y$  ist eine Teilmenge  $R \subseteq X \times Y$ .

D.h. bei einer Relation stehen gewisse Paare  $(x, y)$  in der gegebenen Relation, und die anderen Paare eben nicht. Man schreibt dafür  $(x, y) \in R$  oder  $R(x, y)$  oder  $xRy$ . Bei  $X = Y$  spricht man von einer Relation auf  $X$ . Aus der Analysis sind die Ordnungsrelationen bekannt.

**Definition 45.2.** Eine Relation  $\preccurlyeq$  auf einer Menge  $I$  heißt *Ordnungsrelation* oder *Ordnung*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist  $i \preccurlyeq i$  für alle  $i \in I$ .
- (2) Aus  $i \preccurlyeq j$  und  $j \preccurlyeq k$  folgt stets  $i \preccurlyeq k$ .
- (3) Aus  $i \preccurlyeq j$  und  $j \preccurlyeq i$  folgt  $i = j$ .

Die dabei auftretenden Relationseigenschaften heißen der Reihe nach reflexiv, transitiv, antisymmetrisch.

## ÄQUIVALENZRELATIONEN

**Definition 45.3.** Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge  $M$  ist eine Relation  $R \subseteq M \times M$ , die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige  $x, y, z \in M$ ).

- (1) Es ist  $x \sim x$  (*reflexiv*).
- (2) Aus  $x \sim y$  folgt  $y \sim x$  (*symmetrisch*).

(3) Aus  $x \sim y$  und  $y \sim z$  folgt  $x \sim z$  (*transitiv*).

Dabei bedeutet  $x \sim y$ , dass das Paar  $(x, y)$  zu  $R$  gehört.

**Beispiel 45.4.** Das Urbeispiel für eine Äquivalenzrelation ist die Gleichheit auf einer beliebigen Menge  $M$ . Unter der Gleichheit ist jedes Element nur mit sich selbst äquivalent.



Gnus bilden eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation der Gleichartigkeit, ebenso Zebras.

**Beispiel 45.5.** Häufig interessiert man sich gar nicht so genau für einzelne Objekte, sondern nur für bestimmte Eigenschaften davon. Objekte, die sich bezüglich einer bestimmten, genau definierten Eigenschaft gleich verhalten, kann man dann (bezüglich dieser Eigenschaft) als äquivalent betrachten. Offenbar handelt es sich dabei um eine Äquivalenzrelation. Wenn man sich beispielsweise nur für die Farbe von Objekten interessiert, so sind alle Objekte, die (exakt) gleichfarbig sind, zueinander äquivalent. Wenn man sich bei Tieren nicht für irgendwelche individuellen Eigenschaften interessiert, sondern nur für ihre Art, so sind gleichartige Tiere äquivalent, d.h. zwei Tiere sind genau dann äquivalent, wenn sie zur gleichen Art gehören. Studierende kann man als äquivalent ansehen, wenn sie die gleiche Fächerkombination studieren. Vektoren kann man als äquivalent ansehen, wenn sie zum Nullpunkt den gleichen Abstand besitzen, etc. Eine Äquivalenzrelation ist typischerweise ein bestimmter Blick auf bestimmte Objekte, der unter Bezug auf eine gewisse Eigenschaft gewisse Objekte als gleich ansieht.

Bei den zuletzt genannten „alltäglichen“ Beispielen muss man etwas vorsichtig sein, da im Allgemeinen die Eigenschaften nicht so genau definiert werden. Im Alltag spielt Ähnlichkeit eine wichtigere Rolle als Gleichheit hinsichtlich einer bestimmten Eigenschaft. Die Ähnlichkeit ist aber keine Äquivalenzrelation, da sie zwar reflexiv und symmetrisch ist, aber nicht transitiv. Wenn  $A$  und  $B$  zueinander (knapp) ähnlich sind und  $B$  und  $C$  ebenso, so kann  $A$  und  $C$  schon knapp unähnlich sein (ebenso: lebt in der Nachbarschaft von, ist verwandt mit, etc.).

Die Gleichheit bezüglich einer Eigenschaft wird durch folgende mathematische Konstruktion präzisiert.

**Beispiel 45.6.** Es seien  $M$  und  $N$  Mengen und sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung. In einer solchen Situation hat man immer eine Äquivalenzrelation auf dem Definitionsbereich  $M$  der Abbildung, und zwar erklärt man zwei Elemente  $x, y \in M$  als äquivalent, wenn sie unter  $f$  auf das gleiche Element abgebildet werden, wenn also  $f(x) = f(y)$  ist. Wenn die Abbildung  $f$  injektiv ist, so ist die durch  $f$  auf  $M$  definierte Äquivalenzrelation die Gleichheit. Wenn die Abbildung konstant ist, so sind unter der zugehörigen Äquivalenzrelation alle Elemente aus  $M$  untereinander äquivalent.

Zu einer Abbildung  $f: M \rightarrow N$  nennt man übrigens die Menge aller Punkte  $x \in M$ , die auf einen bestimmten Punkt  $z \in N$  abgebildet werden, die *Faser* über  $z$ . Die Äquivalenzklassen (s.u.) sind dann also die Fasern.

**Beispiel 45.7.** Es sei  $d \in \mathbb{N}$  fixiert. Wir betrachten auf  $\mathbb{Z}$  die Äquivalenzrelation  $\sim$ , bei der zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  als äquivalent betrachtet werden, wenn ihre Differenz  $a - b$  ein Vielfaches von  $d$  ist. Zwei Zahlen sind also zueinander äquivalent, wenn man von der einen Zahl zu der anderen durch Sprünge der Sprungweite  $d$  gelangen kann. Unter Verwendung der Division mit Rest bedeutet dies, dass zwei Zahlen zueinander äquivalent sind, wenn sie bei Division durch  $d$  den gleichen Rest ergeben.

**Beispiel 45.8.** Wir betrachten die *Gaußklammer* (oder den „floor“) einer reellen Zahl, also die Abbildung

$$\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}, t \longmapsto \lfloor t \rfloor.$$

Eine Zahl  $t$  wird also auf die größte ganze Zahl abgebildet, die kleiner oder gleich  $t$  ist (die „Vorkommazahl“). Dabei wird das gesamte ganzzahlige (also mit ganzzahligen Intervallgrenzen) rechtsseitig offene Intervall  $[n, n + 1)$  auf  $n \in \mathbb{Z}$  abgebildet. Bezüglich dieser Abbildung sind also zwei reelle Zahlen genau dann äquivalent, wenn sie im gleichen ganzzahligen Intervall liegen.

Statt der Vorkommazahl kann man auch die „Nachkommazahl“ betrachten. Das ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow [0, 1), t \longmapsto t - \lfloor t \rfloor.$$

Unter der durch diese Abbildung definierte Äquivalenzrelation sind zwei reelle Zahlen genau dann gleich, wenn sie die gleiche Nachkommazahl besitzen, und das ist genau dann der Fall, wenn ihre Differenz eine ganze Zahl ist.

## ÄQUIVALENZKLASSEN UND REPRÄSENTANTENSYSTEME

Eine Äquivalenzrelation  $R \subseteq M \times M$  auf einer Menge  $M$  kann auch als *Zerlegung* (*Partition*) der Menge  $M$  aufgefasst werden. Hierzu ist der Begriff der *Äquivalenzklasse* nützlich.

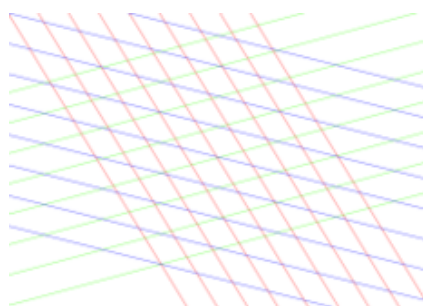
**Definition 45.9.** Es sei  $R \subseteq M \times M$  eine Äquivalenzrelation und  $x \in M$ . Dann ist

$$[x] := \{y \in M \mid (x, y) \in R\}$$

die *Äquivalenzklasse* von  $x$  bezüglich  $R$ .

In Worten:  $[x]$  ist die Teilmenge aller Elemente von  $M$ , die zu  $x$  äquivalent sind. Jedes Element  $y \in [x]$  heißt ein *Repräsentant* für die Äquivalenzklasse  $[x]$ .

**Definition 45.10.** Es sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $M$ . Eine Teilmenge  $T \subseteq M$  heißt ein *Repräsentantensystem* für die Äquivalenzrelation, wenn es für jede Äquivalenzklasse genau ein Element in  $T$  aus dieser Klasse gibt.



Drei Äquivalenzklassen für die durch die Parallelität gegebene Äquivalenzrelation.

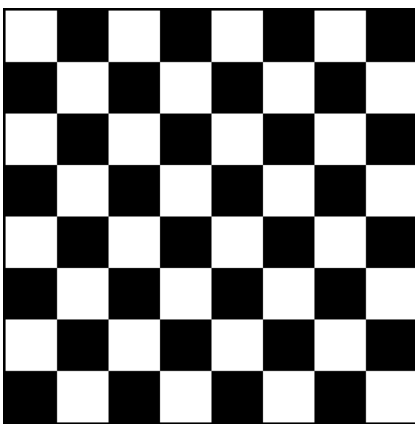
**Beispiel 45.11.** Auf der Menge aller Geraden in der Ebene kann man die Parallelität als Äquivalenzrelation auffassen. Eine Gerade ist zu sich selbst parallel, die Relation ist offenbar symmetrisch und wenn  $G_1$  zu  $G_2$  parallel und  $G_2$  zu  $G_3$  parallel ist, so ist auch  $G_1$  zu  $G_3$  parallel. Die Äquivalenzklasse zu einer Geraden  $G$  besteht aus allen zu  $G$  parallelen Geraden, diese bilden eine parallele Geradenschar. Wir fixieren einen Punkt  $M$  in der Ebene. Dann gibt es zu jeder Geraden  $G$  eine dazu parallele Gerade  $G'$ , die durch den Punkt  $M$  verläuft. Man kann also jede Äquivalenzklasse durch eine Gerade durch den Punkt  $M$  repräsentieren, und zwar eindeutig, da parallele Geraden, die durch einen Punkt verlaufen, übereinstimmen müssen. Die Menge der Geraden durch  $M$  bildet also ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation der Parallelität.



Unter der Äquivalenzrelation „erreichbar auf dem Landweg“ sind Inseln und Kontinente die Äquivalenzklassen.

**Beispiel 45.12.** Es sei eine Situation gegeben, wo gewisse Orte (oder Objekte) von gewissen anderen Orten aus erreichbar sind oder nicht. Die Erreichbarkeit kann dabei durch die Wahl eines Verkehrsmittels oder durch eine abstraktere (Bewegungs)-Vorschrift festgelegt sein. Solche Erreichbarkeitsrelationen liefern häufig eine Äquivalenzrelation. Dass ein Ort von sich selbst aus erreichbar ist, sichert die Reflexivität. Die Symmetrie der Erreichbarkeit besagt, dass wenn man von  $A$  nach  $B$  kommen kann, dass man dann auch von  $B$  nach  $A$  kommen kann. Das ist nicht für jede Erreichbarkeit selbstverständlich, für die meisten aber schon. Die Transitivität gilt immer dann, wenn man die Bewegungsvorgänge hintereinander ausführen kann, also zuerst von  $A$  nach  $B$  und dann von  $B$  nach  $C$ .

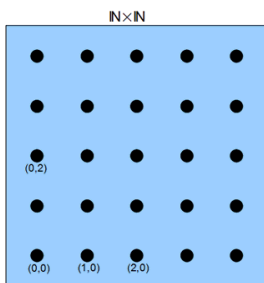
Wenn erreichbar beispielsweise dadurch gegeben ist, dass man auf dem Landweg von einem Ort zu einem anderen kommen kann, so sind zwei Ortspunkte genau dann äquivalent, wenn sie auf der gleichen Insel (oder dem gleichen Kontinent) liegen. Inseln und Kontinente sind dann die Äquivalenzklassen. In der Topologie spielt der Begriff des Wegzusammenhangs eine wichtige Rolle: Zwei Punkte sind wegzusammenhängend, wenn man sie durch einen stetigen Weg verbinden kann. Oder: Auf den ganzen Zahlen lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es, welche Flöhe können sich begegnen?



**Beispiel 45.13.** Beim Schach darf ein Läufer diagonal in jede Richtung beliebig weit ziehen. Zwei Felder heißen läuferäquivalent, wenn man von dem einen Feld mit endlich vielen Läuferzügen zu dem anderen Feld gelangen kann. Das ist eine Äquivalenzrelation. Da sich bei einem Diagonalzug die Farbe des Feldes nicht ändert, bleibt ein Läufer, der auf einem weißen Feld steht, stets auf einem weißen Feld. Zugleich kann ein Läufer, der auf einem weißen Feld steht, jedes weiße Feld (grundsätzlich, ohne Beachtung von

anderen Figuren in einer Stellung) erreichen. Deshalb gibt es zwei Äquivalenzklassen: die weißen Felder und die schwarzen Felder, und entsprechend spricht man von weißfeldrigen Läufern und schwarzfeldrigen Läufern (das ist nicht die Farbe der Figur).

**Beispiel 45.14.** Wir betrachten die Produktmenge  $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , die wir uns als ein Punktgitter vorstellen.



Visualisierung des Beispiels. Die Äquivalenzklassen bekommen verschiedene Farben.

Wir fixieren die Sprünge (man denke an Springmäuse, die alle diese Sprünge ausführen können)

$$\pm(2, 0) \text{ und } \pm(3, 3),$$

und sagen, dass zwei Punkte  $P = (a, b)$ ,  $Q = (c, d) \in M$  äquivalent sind, wenn man ausgehend von  $P$  den Punkt  $Q$  mit einer Folge von solchen Sprüngen erreichen kann. Dies ist eine Äquivalenzrelation (dafür ist entscheidend, dass bei den Sprüngen auch der entgegengesetzte Sprung dazu gehört). Typische Fragestellungen sind: Wie kann man äquivalente Felder charakterisieren, wie entscheiden, ob zwei Felder äquivalent sind oder nicht? Wie viele Äquivalenzklassen gibt es überhaupt, gibt es für sie ein schönes Repräsentantensystem?

#### QUOTIENTENMENGE UND KANONISCHE ABBILDUNG

**Definition 45.15.** Es sei  $R \subseteq M \times M$  eine Äquivalenzrelation. Dann heißt

$$M/R := \{[x] \mid x \in M\}$$

die *Quotientenmenge* von  $R$ .

**Definition 45.16.** Es sei  $R \subseteq M \times M$  eine Äquivalenzrelation und  $M/R$  die Quotientenmenge. Die Abbildung

$$q_R: M \longrightarrow M/R, x \longmapsto [x],$$

heißt *kanonische Projektion* von  $R$ .

Mit Hilfe der Quotientenmenge werden die Äquivalenzklassen zu Elementen einer neuen Menge gemacht. Durch die kanonische Projektion werden äquivalente Elemente miteinander identifiziert. Man spricht daher bei Äquivalenzrelationen auch von der *Kunst des Identifizierens*. Im praktischen Umgang mit den Quotientenmengen tritt häufig die eigentliche Definition in den Hintergrund und man arbeitet eher mit den intrinsischen Eigenschaften dieser Mengen. Die folgende Aussage besagt insbesondere, dass man jede Äquivalenzrelation wie in Beispiel 45.6 erhalten kann. Äquivalent bedeutet also stets wertegleich unter einer geeigneten Abbildung.

**Lemma 45.17.** *Es sei  $M$  eine Menge und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$  mit den Äquivalenzklassen  $[x]$  und der Quotientenmenge  $M/\sim$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es ist  $x \sim y$  genau dann, wenn  $[x] = [y]$  ist, und dies gilt genau dann, wenn  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ .*
- (2)  *$M = \bigcup_{[x] \in M/\sim} [x]$  ist eine disjunkte Vereinigung.*
- (3) *Die kanonische Projektion*

$$q: M \longrightarrow M/\sim, x \longmapsto [x],$$

*ist surjektiv.*

- (4) *Es ist  $q^{-1}([x]) = [x]$ .*

*Beweis.* (1) Seien  $x$  und  $y$  äquivalent und  $u \in [x]$ . Dann ist  $x \sim u$  und nach der Transitivität auch  $y \sim u$ , also  $u \in [y]$ . Damit stimmen die Äquivalenzklassen überein. Die Implikation von der Mitte nach rechts ist klar, da wegen  $x \sim x$  Äquivalenzklassen nicht leer sind. Es sei nun  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ , und sei  $z$  ein Element im Durchschnitt. Dann ist  $x \sim z$  und  $y \sim z$  und wegen der Transitivität ist  $x \sim y$ .

(2) Wegen der Reflexivität ist  $x \in [x]$  und daher ist  $M = \bigcup_{[x] \in M/\sim} [x]$ . Wegen Teil (1) ist die Vereinigung disjunkt.

(3) Die Surjektivität ist klar aufgrund der Definition der Quotientenmenge, und da  $x$  auf die Klasse  $[x]$  geschickt wird.

(4) Es ist

$$\begin{aligned} q^{-1}([x]) &= \{y \in M \mid q(y) = [x]\} \\ &= \{y \in M \mid [y] = [x]\} \\ &= \{y \in M \mid y \sim x\} \\ &= [x]. \end{aligned}$$

□

Wesentliche mathematische Konstruktionen beschreibt man mit Hilfe von Quotientenmengen bezüglich gewisser Äquivalenzrelationen auf einfacheren Mengen. Dafür geben wir zwei Beispiele.

**Beispiel 45.18.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $M = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Der  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist ein reeller Vektorraum, wobei die Skalarmultiplikation von  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\lambda \cdot x$  bezeichnet wird. Es sei weiter

$$R = \{(x, y) \in M \times M \mid \text{es gibt ein } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } \lambda \cdot x = y\}.$$

Zwei Punkte werden also als äquivalent erklärt, wenn sie durch Skalarmultiplikation mit einem Skalar  $\lambda \neq 0$  ineinander überführt werden können. Ebenso könnte man sagen, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn sie dieselbe Gerade durch den Nullpunkt definieren.

Dass wirklich eine Äquivalenzrelation vorliegt, sieht man so. Die Reflexivität folgt aus  $x = 1x$  für jedes  $x \in M$ . Zur Symmetrie sei  $xRy$ , d.h. es gibt ein  $\lambda \neq 0$  mit  $\lambda x = y$ . Dann gilt aber auch  $y = \lambda^{-1}x$ , da ja  $\lambda$  ein Inverses besitzt. Zum Nachweis der Transitivität sei  $xRy$  und  $yRz$  angenommen, d.h. es gibt  $\lambda, \delta \neq 0$  mit  $\lambda x = y$  und  $\delta y = z$ . Dann ist insgesamt  $z = \delta y = (\delta\lambda)x$  mit  $\delta\lambda \neq 0$ . Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation sind die einzelnen Geraden durch den Nullpunkt (aber ohne den Nullpunkt). Die Quotientenmenge heißt *reell-projektiver Raum* (der reellen Dimension  $n$ ) und wird mit  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  bezeichnet.

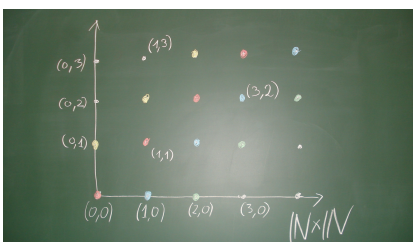
**Beispiel 45.19.** Es sei  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen und  $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  die Produktmenge mit der komponentenweisen Addition.<sup>8</sup> Wir erklären auf  $M$  eine Relation durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } a + d = b + c.$$

Dies ist bei  $a \leq c$  genau dann der Fall, wenn es ein  $e \in \mathbb{N}$  (nämlich  $e = c - a$ ) mit

$$(c, d) = (a, b) + (e, e)$$

gibt. D.h. die beiden Paare unterscheiden sich um ein Diagonalelement, also um ein Paar, wo beide Komponenten übereinstimmen. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation auf  $M$ , siehe Aufgabe 45.22.



<sup>8</sup>Passende Interpretationen für die Paare in diesem Kontext sind beispielsweise: Das Paar  $(a, b)$  repräsentiert das Ergebnis eines Fußballspieles, wobei  $a$  die Toranzahl der Heimmannschaft und  $b$  die Toranzahl der Gastmannschaft repräsentiert, oder: Das Paar  $(a, b)$  repräsentiert das Alter eines menschlichen Paares, wobei  $a$  für das Alter der Frau und  $b$  für das Alter des Mannes steht. Der Übergang zu den Äquivalenzklassen bedeutet dann, sich nur noch für die Tordifferenz bzw. den Altersunterschied zu interessieren, nicht mehr für das genaue Ergebnis bzw. das Alter der einzelnen Personen. Man kann auch das Paar als eine Schrittfolge aus  $a$  Schritten nach rechts und  $b$  Schritten nach links ansehen.

Wenn man  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  als ein quadratisches Gitter anordnet (das ist ein „diskretes Koordinatensystem“), so sind die Äquivalenzklassen durch die Punkte auf einer zur Diagonalen parallelen „diskreten Geraden“ gegeben. Die Punkte  $(a, b)$  mit  $a \geq b$  sind äquivalent zu  $(a - b, 0)$ , sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die zweite Komponente 0 ist. Die Punkte  $(a, b)$  mit  $a \leq b$  sind äquivalent zu  $(0, b - a)$ , sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die erste Komponente 0 ist. Die Punkte  $(a, a)$  sind zu  $(0, 0)$  äquivalent. Den Repräsentanten einer Äquivalenzklasse, bei dem mindestens eine Komponente 0 ist, nennen wir den *Standardvertreter* dieser Äquivalenzklasse. Die Standardvertreter sind die diskreten Punkte des begrenzenden Viertelkreuzes; zu einem Punkt ergibt sich der Standardvertreter, wenn man parallel zur Diagonalen in Richtung der Halbachsen wandert, bis man auf einer der Halbachsen landet. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Standardvertreter besitzen.

Wir bezeichnen nun die Quotientenmenge, also die Menge der Äquivalenzklassen unter dieser Äquivalenzrelation, als *Menge der ganzen Zahlen* und bezeichnen sie mit  $\mathbb{Z}$ . Jede ganze Zahl hat dann genau einen Standardvertreter der Form  $n := (n, 0)$  mit  $n \in \mathbb{N}_+$ , der Form  $0 := (0, 0)$  oder der Form  $-n := (0, n)$  mit  $n \in \mathbb{N}_+$ . Eine natürliche Zahl  $n$  fassen wir von nun an als die ganze Zahl  $(n, 0)$  auf.

Wir wollen nun zwei ganze Zahlen, also zwei solche Äquivalenzklassen  $[(a, b)]$  und  $[(c, d)]$  miteinander „addieren“, also eine Verknüpfung  $\oplus$  auf  $\mathbb{Z}$  einführen. Der naheliegende Ansatz ist, diese Verknüpfung mittels der komponentenweisen Addition als

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$$

zu definieren. Hier tritt das Problem der *Wohldefiniertheit* auf, denn die Verknüpfung wird erklärt unter Bezug auf Repräsentanten, und es ist nicht von vornherein klar, dass unterschiedliche Repräsentanten zum gleichen Ergebnis führen. Wenn also  $(a, b) \sim (a', b')$  und  $(c, d) \sim (c', d')$  sind, so muss man überprüfen, dass

$$(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$$

und damit  $[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')]$  ist. Dies ist der Fall, siehe Aufgabe 45.23. Man kann weiterhin zeigen, dass die so definierte Verknüpfung auf  $\mathbb{Z}$  assoziativ und kommutativ ist, dass  $[(0, 0)]$  das neutrale Element der Verknüpfung ist und dass es zu jedem Element  $[(a, b)]$  ein inverses Element gibt, nämlich  $[(b, a)]$ .

Wir definieren nun eine Multiplikation auf  $\mathbb{Z}$  durch

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)].$$

Dies ist wieder wohldefiniert und man kann zeigen, dass die Multiplikation assoziativ und kommutativ ist mit  $1 = [(1, 0)]$  als neutralem Element und dass das Distributivgesetz gilt.

Die folgende Aussage beschreibt die *universelle Eigenschaft* der Quotientenmenge.

**Lemma 45.20.** *Es sei  $M$  eine Menge und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$  mit der Quotientenmenge  $M/\sim$ . Es sei  $\varphi: M \rightarrow W$  eine Abbildung mit  $\varphi(x) = \varphi(y)$  für alle  $x, y \in M$  mit  $x \sim y$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung  $\bar{\varphi}: M/\sim \rightarrow W$  mit  $\varphi = \bar{\varphi} \circ q$ .*

*Beweis.* Es sei  $[x] \in M/\sim$  gegeben. Die einzige Möglichkeit für  $\bar{\varphi}$  ist  $\bar{\varphi}([x]) := \varphi(x)$  zu setzen. Es muss aber gezeigt werden, dass diese Abbildung überhaupt wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ist. Es sei hierzu  $[x] = [y]$ , also  $x \sim y$ . Dann ist nach der Voraussetzung an  $\varphi$  aber  $\varphi(x) = \varphi(y)$ .  $\square$

## 45. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 45.1.** Bestimme, ob die durch die Relationstabelle

	A	B	C
A		x	x
B	x	x	
C	x	x	x

beschriebene Relation auf der Menge  $\{A, B, C\}$  reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch ist.

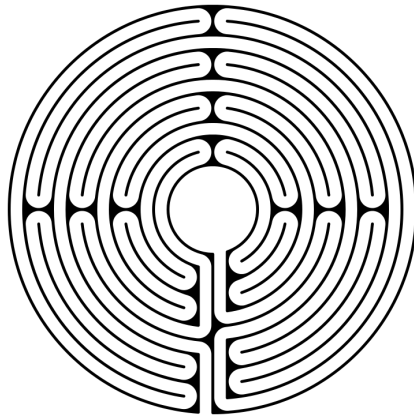
**Aufgabe 45.2.** Es sei  $M$  eine Menge mit  $n$  Elementen. Bestimme die Anzahl der Relationen auf  $M$ , die

- (1) reflexiv
- (2) symmetrisch
- (3) reflexiv und symmetrisch

sind.

**Aufgabe 45.3.** Auf den ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

**Aufgabe 45.4.** Wir betrachten auf dem weißen Teil des angegebenen Labyrinths die Äquivalenzrelation, die dadurch festgelegt ist, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn man durch eine stetige Bewegung (also ohne Sprünge) von einem Punkt zum anderen Punkt gelangen kann. Zeige, dass ein Punkt außerhalb des äußeren Kreises und ein Punkt des inneren Kreises zueinander äquivalent sind.



**Aufgabe 45.5.** Es sei  $B$  ein Blatt Papier (oder ein Taschentuch). Man versuche, sich die folgenden Äquivalenzrelationen auf  $B$  und die zugehörige Identifizierungsabbildungen vorzustellen (möglichst geometrisch).

- (1) Die vier Eckpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (2) Alle Randpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (3) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (4) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand und jeder Punkt des oberen Randes ist äquivalent zu seinem vertikal gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (5) Jeder Punkt des Randes ist äquivalent zu seinem punktsymmetrisch (bezüglich des Mittelpunktes des Blattes) gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (6) Es sei  $K$  ein Kreis (d.h. eine Kreislinie) auf dem Blatt. Alle Kreispunkte seien untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
- (7) Es gebe zwei Punkte  $P \neq Q$ , die untereinander äquivalent seien, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.

- (8) Es sei  $H$  die horizontale Halbierungsgerade des Blattes. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie achsensymmetrisch zu  $H$  sind.

**Aufgabe 45.6.** Wir betrachten auf der Menge aller höheren Säugetiere die Äquivalenzrelationen, die durch „gehören zur gleichen Gattung“, „gehören zur gleichen Familie“, „gehören zur gleichen Art“, „gehören zur gleichen Klasse“, „gehören zur gleichen Ordnung“ gegeben sind. Welche Äquivalenzrelation ist eine Verfeinerung von welcher Äquivalenzrelation? Man gebe für je zwei dieser Äquivalenzrelationen Tiere an, die bezüglich der einen Relation äquivalent sind, aber nicht bezüglich der anderen. Wie viele Äquivalenzklassen besitzt die Äquivalenzrelation zur Ordnung?

**Aufgabe 45.7.** Es sei  $M$  die Menge der Menschen und  $R$  die Verwandtschaftsrelation darauf, die wir großzügig als transitiv interpretieren. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

**Aufgabe 45.8.** Wir betrachten die Produktmenge  $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Wir fixieren die Sprünge

$$\pm(2, 1) \text{ und } \pm(1, 3),$$

und sagen, dass zwei Punkte  $P = (a, b)$ ,  $Q = (c, d) \in M$  äquivalent sind, wenn man ausgehend von  $P$  den Punkt  $Q$  mit einer Folge von diesen Sprüngen aus erreichen kann (und dabei in  $M$  bleibt). Dies ist eine Äquivalenzrelation. Man bestimme die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation und für jede Äquivalenzklasse genau einen besonders einfachen Vertreter. Man gebe auch einen Algorithmus an, der zu einem  $(a, b) \in M$  diesen äquivalenten Vertreter findet.

**Aufgabe 45.9.** Es seien  $M$  und  $N$  Mengen und sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung. Es sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $N$ . Zeige, dass durch  $x \equiv x'$ , falls  $f(x) \sim f(x')$  gilt, eine Äquivalenzrelation auf  $M$  definiert wird.

**Aufgabe 45.10.** Es sei  $G$  eine Gruppe. Betrachte die Relation  $\sim$  auf  $G$ , die durch

$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x = y^{-1}$$

erklärt ist. Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 45.11.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Zeige, dass die Relation auf  $V$ , die durch

$$v \sim w, \text{ falls es ein } \lambda \in K, \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w \text{ gibt}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

**Aufgabe 45.12.** Wir fassen ein Dreieck als ein Dreiertupel im  $\mathbb{R}^2$  auf. Zeige, dass die Kongruenz von Dreiecken eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 45.13.** Es sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten die folgende Relation auf  $\text{Mat}_n(K)$ .

$$M \sim N, \text{ falls es eine invertierbare Matrix } B \text{ gibt mit } M = BNB^{-1}.$$

Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 45.14.** Wir betrachten die Relation auf der Menge der quadratischen  $n \times n$ -Matrizen, bei der Matrizen  $M$  und  $N$  als äquivalent angesehen werden, wenn es Elementarmatrizen  $E_1, \dots, E_k$  mit  $M = E_k \circ \dots \circ E_1 \circ N$  gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 45.15.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $m \in \mathbb{N}$ . Betrachte auf der Produktmenge  $V^m$  die folgende Relation.

$$(v_1, \dots, v_m) \sim (w_1, \dots, w_m), \text{ falls } \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$$

Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Man gebe eine Bijektion zwischen der zugehörigen Quotientenmenge und der Menge der Unterräume von  $V$  der Dimension  $\leq m$  an. Zeige ferner, dass zwei Tupel  $(v_1, \dots, v_m)$  und  $(w_1, \dots, w_m)$  genau dann in dieser Relation zueinander stehen, wenn es eine invertierbare  $m \times m$ -Matrix  $M = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_m(K)$  gibt mit

$$v_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} w_j$$

für alle  $i$ .

**Aufgabe 45.16.** Wir betrachten auf der Mengen der linearen Abbildungen  $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  die Relation  $\sim$ , bei der  $\varphi \sim \psi$  genau dann gilt, wenn es Basen  $v_1, \dots, v_n$  und  $w_1, \dots, w_n$  mit  $M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}(\varphi) = M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{w}}(\psi)$  gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Wie kann man den Satz über die Jordansche Normalform im Kontext von Äquivalenzrelationen interpretieren?

**Aufgabe 45.17.** Wir betrachten auf  $\mathbb{N}_+$  die Relation  $\sim$ , die durch

$$m \sim n$$

festgelegt ist, falls  $m$  eine Potenz von  $n$  und  $n$  eine Potenz von  $m$  teilt.

(1) Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.

- (2) Bestimme, welche der folgenden Elemente zueinander äquivalent sind, welche nicht.

$$100, 1000, 9, 125, 500, 27, 10, 210.$$

- (3) Es sei  $Q$  die Quotientenmenge zu dieser Äquivalenzrelation und es sei  $\mathbb{P}$  die Menge der Primzahlen mit der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(\mathbb{P})$ . Zeige, dass es eine natürliche Abbildung

$$\varphi: \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{P})$$

gibt, die zu einer injektiven Abbildung

$$\tilde{\varphi}: Q \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{P})$$

führt. Ist  $\tilde{\varphi}$  surjektiv?

- (4) Wie sieht ein besonders einfaches Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation aus?

**Aufgabe 45.18.** Es sei  $M$  die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Definiere auf  $M$  eine Relation durch

$$f \sim g \text{ falls } f(0) = g(0), f'(0) = g'(0) \text{ und } f''(1) = g''(1).$$

- Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.
- Finde für jede Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation einen polynomialen Vertreter.
- Zeige, dass diese Äquivalenzrelation mit der Addition von Funktionen verträglich ist.
- Zeige, dass diese Äquivalenzrelation nicht mit der Multiplikation von Funktionen verträglich ist.

**Aufgabe 45.19.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, wir betrachten die Menge

$$C^1(I, \mathbb{R}) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar}\}.$$

Für  $f, g \in C^1(I, \mathbb{R})$  definieren wir

$$f \sim g, \text{ falls es ein } c \in \mathbb{R} \text{ gibt mit } f(x) = g(x) + c \text{ für alle } x \in I.$$

Liegt eine Äquivalenzrelation vor? Wenn ja, beschreibe die Äquivalenzklassen.

**Aufgabe 45.20.** Es sei  $K$  ein Körper und sei

$$\text{Abb}(K, K) = \{f : K \rightarrow K \mid f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von  $K$  nach  $K$ . Wir betrachten die Relation auf  $\text{Abb}(K, K)$ , die durch  $f \sim g$ , falls es  $c, d \in K$  mit

$$f(x) = g(x + c) + d$$

für alle  $x \in K$  gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

**Aufgabe 45.21.** Es sei  $K$  ein Körper und  $K[X]$  der Polynomring in der einen Variablen  $X$  über  $K$ . Zu einem Polynom  $P \in K[X]$  und einer Linearform

$$L = aX + b$$

mit  $a \neq 0$  bezeichnet

$$P \frac{L}{X}$$

das Polynom, das entsteht, wenn man jedes Vorkommen von  $X$  in  $P$  durch  $aX + b$  ersetzt. Dieser Einsetzungsprozess ist mit der Addition und der Multiplikation von Polynomen verträglich. Wir betrachten die Relation  $\sim$  auf  $K[X]$ , die durch

$$P \sim Q,$$

falls es eine Linearform  $aX + b$  mit  $a \neq 0$  mit

$$Q = P \frac{aX + b}{X}$$

gibt.

- (a) Berechne

$$(3X^2 - 4X + 7) \frac{3X - 5}{X}.$$

- (b) Zeige, dass durch  $\sim$  eine Äquivalenzrelation gegeben ist.  
 (c) Es sei  $K = \mathbb{C}$ . Zeige, dass jedes Polynom einen Repräsentanten  $Q$  mit

$$Q(0) = 0$$

besitzt.

- (d) Es sei  $K = \mathbb{C}$ . Zeige, dass jedes Polynom  $\neq 0$  einen normierten Repräsentanten besitzt.  
 (e) Zeige, dass die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms  $P \neq 0$  nur von der Äquivalenzklasse  $[P]$  abhängt.

**Aufgabe 45.22.** Zeige, dass die auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  in Beispiel 45.19 eingeführte Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } a + d = b + c,$$

eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 45.23.** Zeige, dass die auf  $\mathbb{Z}$  in Beispiel 45.19 eingeführte Addition und Multiplikation wohldefiniert sind.

Die folgende Aufgabe beschreibt die Konstruktion von  $\mathbb{Q}$  aus  $\mathbb{Z}$  mit Hilfe von Äquivalenzklassen und Quotientenmengen.

**Aufgabe 45.24.** Betrachte auf  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  die Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist.}$$

- (a) Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.
- (b) Zeige, dass es zu jedem  $(a, b)$  ein äquivalentes Paar  $(a', b')$  mit  $b' > 0$  gibt.
- (c) Es sei  $M$  die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow M, z \longmapsto [(z, 1)].$$

Zeige, dass  $\varphi$  injektiv ist.

- (d) Definiere auf  $M$  (aus Teil c) eine Verknüpfung  $+$  derart, dass  $M$  mit dieser Verknüpfung und mit  $[(0, 1)]$  als neutralem Element eine Gruppe wird, und dass für die Abbildung  $\varphi$  die Beziehung

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$  gilt.

**Aufgabe 45.25.** Es sei  $M \times N$  eine Produktmenge. Zeige, dass die Gleichheit in der ersten Komponente eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $M \times N$  ist. Zeige, dass man jede Äquivalenzklasse mit  $N$  und die Quotientenmenge  $M \times N / \sim$  mit  $M$  identifizieren kann.

**Aufgabe 45.26.** Es seien  $M_1$  und  $M_2$  Mengen und  $\sim_1$  sei eine Äquivalenzrelation auf  $M_1$  und  $\sim_2$  sei eine Äquivalenzrelation auf  $M_2$ . Betrachte die Relation  $\sim$  auf der Produktmenge  $M_1 \times M_2$ , die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ und } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt,}$$

definiert ist. Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.

Zeige ferner, dass auf  $M_1 \times M_2$  die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ oder } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt,}$$

definierte Relation keine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 45.27.** Es sei  $M$  eine Menge und  $P \subseteq \mathfrak{P}(M)$ . Dann heißt  $P$  eine *Partition* von  $M$ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Für alle  $A \in P$  gilt  $A \neq \emptyset$ .
- (2) Für  $A, B \in P$ ,  $A \neq B$ , gilt  $A \cap B = \emptyset$ .
- (3) Die Elemente von  $P$  bilden eine Überdeckung von  $M$ , d.h. jedes Element von  $M$  liegt in mindestens einem Element von  $P$ .

Beweise, dass die Quotientenmenge  $M/\sim = \{[x] \mid x \in M\}$  zu einer Äquivalenzrelation  $\sim$  eine Partition der Menge  $M$  ist.

**Aufgabe 45.28.** Es sei  $M$  eine Menge und  $P \subseteq \mathfrak{P}(M)$  eine Partition. Zeige, dass  $P$  durch

$$x \sim y, \text{ falls es ein } A \in P \text{ gibt mit } x \in A \text{ und } y \in A,$$

eine Äquivalenzrelation auf  $M$  induziert. Berechne diese Relation für die Partition  $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}\}$  der Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

**Aufgabe 45.29.** Es sei  $M$  eine Menge und  $(R_i)_{i \in I}$  eine Familie von Äquivalenzrelationen auf  $M$ . Zeige, dass durch den Durchschnitt  $R := \bigcap_{i \in I} R_i$  wieder eine Äquivalenzrelation auf  $M$  definiert ist. Gilt dies auch für  $\bigcup_{i \in I} R_i$ ?

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 45.30.** (2 Punkte)

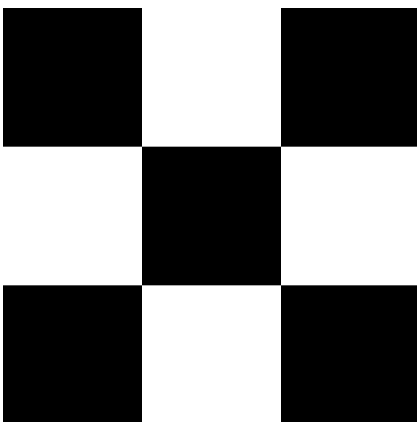
Bestimme, ob die durch die Relationstabelle

	A	B	C	D
A	×		×	
B	×	×		
C			×	
D		×		×

beschriebene Relation auf der Menge  $\{A, B, C, D\}$  reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch ist.

**Aufgabe 45.31.** (2 Punkte)

Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem  $8 \times 8$ -Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreibe für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem  $3 \times 3$ -Schachbrett aus?

**Aufgabe 45.32.** (2 Punkte)

Wir betrachten für je zwei Teilmengen  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  die symmetrische Differenz

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wir setzen  $A \sim B$ , falls  $A \Delta B$  endlich ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf  $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$  definiert wird.

**Aufgabe 45.33.** (2 Punkte)

Es sei  $G$  eine Gruppe. Betrachte die Relation  $R$  auf  $G$ , wobei  $xRy$  bedeutet, dass es einen inneren Automorphismus  $\kappa_g$  mit  $x = \kappa_g(y)$  gibt. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation bekommen einen eigenen Namen:

Zu einer Gruppe  $G$  nennt man die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation, bei der zwei Elemente als äquivalent (oder *konjugiert*) gelten, wenn sie durch einen inneren Automorphismus ineinander überführt werden können, die *Konjugationsklassen*.

**Aufgabe 45.34.** (2 Punkte)

Es sei  $S_3$  die Gruppe der bijektiven Abbildungen der Menge  $\{1, 2, 3\}$  in sich selbst. Bestimme die Konjugationsklassen dieser Gruppe.

**Aufgabe 45.35.** (3 Punkte)

Es sei  $\text{GL}_n(K)$  die Menge der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen über einem Körper  $K$ . Zeige, dass für zueinander konjugierte Matrizen  $M$  und  $N$  aus  $\text{GL}_n(K)$  die folgenden Eigenschaften bzw. Invarianten übereinstimmen: Die

Determinante, die Eigenwerte, die Dimension der Eigenräume zu einem Eigenwert, die Diagonalisierbarkeit, die Trigonalisierbarkeit.

**Aufgabe 45.36.** (2 Punkte)

Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Betrachte die Relation  $R$  auf  $M$ , wobei  $xRy$  bedeutet, dass es eine stetige Abbildung

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow M, t \longmapsto \gamma(t),$$

mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$  gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf  $M$  ist.

#### 46. VORLESUNG - RESTKLASSEN-BILDUNG

Eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf einer Menge  $M$  definiert die Quotientenmenge  $M/\sim$  und die kanonische Projektion  $M \rightarrow M/\sim$ . Wenn es auf  $M$  zusätzliche Strukturen gibt und die Äquivalenzrelation diese respektiert, so kann man häufig auf  $M/\sim$  wieder die gleiche Struktur erhalten. Als Hauptbeispiel für diesen Prozess betrachten wir Äquivalenzrelationen auf Gruppen, die durch eine Untergruppe definiert werden.

#### NEBENKLASSEN

**Definition 46.1.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Wir setzen  $x \sim_H y$  (und sagen, dass  $x$  und  $y$  äquivalent sind) wenn  $x^{-1}y \in H$ .

Dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation: Aus  $x^{-1}x = e_G \in H$  folgt, dass diese Relation reflexiv ist. Aus  $x^{-1}y \in H$  folgt sofort  $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$  und aus  $x^{-1}y \in H$  und  $y^{-1}z \in H$  folgt  $x^{-1}z \in H$ .

Zwei Gruppenelemente  $x$  und  $y$  sind genau dann äquivalent, wenn es ein Element  $h \in H$  der Untergruppe mit  $y = xh$  gibt. In Anschluss an Beispiel 45.12 kann man die Situation so interpretieren, dass die Untergruppe  $H$  eine Menge an Bewegungsmöglichkeiten festlegt, und zwei Elemente genau dann äquivalent sind, wenn sie durch eine solche durch  $H$  gegebene Bewegung ineinander überführt werden können.

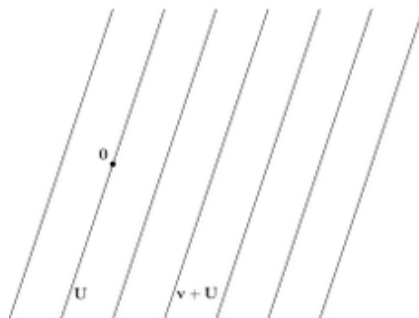
**Beispiel 46.2.** In einer (additiv geschriebenen) kommutativen Gruppe wie  $\mathbb{Z}$  oder einem Vektorraum  $V$  und einer Untergruppe  $H$  bedeutet  $x \sim_H y$ , dass  $y - x \in H$  ist bzw. dass es ein  $h \in H$  mit

$$y = x + h$$

gibt. Die Äquivalenzklassen sind von der Form  $x + H = \{x + h \mid h \in H\}$ . Bei  $H = \mathbb{Z}d \subseteq \mathbb{Z}$  mit einem festen  $d$  besitzen die Äquivalenzklassen die Form

$$\begin{aligned} H &= \mathbb{Z}d, 1 + H = \{\dots, 1 - d, 1, 1 + d, 1 + 2d, \dots\}, \\ 2 + H &= \{\dots, 2 - d, 2, 2 + d, 2 + 2d, \dots\}, \dots \end{aligned}$$

Die Klassen vereinigen diejenigen ganzen Zahlen, die bei Division durch  $d$  den Rest 0 oder 1 oder 2 u.s.w. haben. Diese Klassen bilden eine vollständige Zerlegung von  $\mathbb{Z}$ .



Die Äquivalenzklassen zu einem Untervektorraum.

Wenn  $H = U \subseteq V$  ein Untervektorraum ist, so haben die Äquivalenzklassen die Form  $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$  für einen Vektor  $v \in V$ . Dies ist der affine Raum mit dem Aufpunkt  $v$  und dem Verschiebungsraum  $U$  (im Sinne von Definition 29.1). Die Äquivalenzklassen bilden eine Familie von zueinander parallelen affinen Unterräumen.

**Definition 46.3.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Dann heißt zu jedem  $x \in G$  die Teilmenge

$$xH = \{xh \mid h \in H\}$$

die *Linksnebenklasse* von  $x$  in  $G$  bezüglich  $H$ . Jede Teilmenge von dieser Form heißt *Linksnebenklasse*. Entsprechend heißt eine Menge der Form

$$Hx = \{hx \mid h \in H\}$$

*Rechtsnebenklasse* (zu  $x$ ).

Die Äquivalenzklassen zu der oben definierten Äquivalenzrelation sind wegen

$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in G \mid x \sim y\} \\ &= \{y \in G \mid x^{-1}y \in H\} \\ &= \{y \in G \mid \text{es gibt } h \in H \text{ mit } x^{-1}y = h\} \\ &= \{y \in G \mid \text{es gibt } h \in H \text{ mit } y = xh\} \\ &= xH \end{aligned}$$

genau die Linksnebenklassen. Die Nebenklasse zum neutralen Element ist die Untergruppe  $H$  selbst. Die Linksnebenklassen bilden somit eine disjunkte

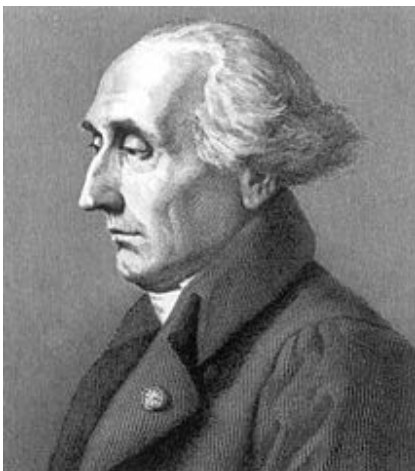
Zerlegung (eine *Partition*) von  $G$ . Dies gilt ebenso für die Rechtsnebenklassen. Im kommutativen Fall muss man nicht zwischen Links- und Rechtsnebenklassen unterscheiden.

**Lemma 46.4.** *Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Es seien  $x, y \in G$  Elemente. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  $x \in yH$ .
- (2)  $y \in xH$ .
- (3)  $y^{-1}x \in H$ .
- (4)  $x^{-1}y \in H$ .
- (5)  $xH \cap yH \neq \emptyset$ .
- (6)  $x \sim_H y$ .
- (7)  $xH = yH$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz von (1) und (3) (und die von (2) und (4)) folgt aus Multiplikation mit  $y^{-1}$  bzw. mit  $y$ . Die Äquivalenz von (3) und (4) folgt durch Übergang zum Inversen. Aus (1) folgt (5) wegen  $1 \in H$ . Wenn (5) erfüllt ist, so bedeutet das  $xh_1 = yh_2$  mit gewissen  $h_1, h_2 \in H$ . Damit ist  $x = yh_2h_1^{-1}$  und (1) ist erfüllt. (4) und (6) sind nach Definition 46.1 äquivalent. Da die Linksnebenklassen die Äquivalenzklassen sind, ergibt sich die Äquivalenz von (5) und (7).  $\square$

#### DER SATZ VON LAGRANGE



Joseph-Louis Lagrange (1736 Turin - 1813 Paris)

**Definition 46.5.** Zu einer endlichen Gruppe  $G$  bezeichnet man die Anzahl ihrer Elemente als *Gruppenordnung* oder als die *Ordnung der Gruppe*, geschrieben

$$\text{ord}(G) = \#(G).$$

Mit diesem Begriff kann man sagen, dass die Ordnung einer Untergruppe die Ordnung der Gruppe teilt.

**Lemma 46.6.** *Es sei  $G$  eine endliche Gruppe. Dann besitzt jedes Element  $g \in G$  eine endliche Ordnung. Die Potenzen*

$$g^0 = e_G, g^1 = g, g^2, \dots, g^{\text{ord}(g)-1}$$

*sind alle verschieden.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 46.7. □

**Satz 46.7.** *Es sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe von  $G$ . Dann ist ihre Kardinalität  $\#(H)$  ein Teiler von  $\#(G)$ .*

*Beweis.* Betrachte die Linksnebenklassen  $gH := \{gh \mid h \in H\}$  für sämtliche  $g \in G$ . Es ist

$$H \longrightarrow gH, h \longmapsto gh,$$

eine Bijektion zwischen  $H$  und  $gH$ , sodass alle Nebenklassen gleich groß sind (und zwar  $\#(H)$  Elemente haben). Die Nebenklassen bilden (als Äquivalenzklassen) zusammen eine Zerlegung von  $G$ , sodass  $\#(G)$  ein Vielfaches von  $\#(H)$  sein muss. □

**Korollar 46.8.** *Es sei  $G$  eine endliche Gruppe und sei  $g \in G$  ein Element. Dann teilt die Ordnung von  $g$  die Gruppenordnung.*

*Beweis.* Es sei  $H$  die von  $g$  erzeugte Untergruppe. Nach Lemma 46.6 ist

$$\text{ord}(g) = \text{ord}(H).$$

Daher teilt diese Zahl nach Satz 46.7 die Gruppenordnung von  $G$ . □

**Definition 46.9.** Zu einer Untergruppe  $H \subseteq G$  heißt die Anzahl der (Links- oder Rechts-)Nebenklassen der *Index* von  $H$  in  $G$ , geschrieben

$$\text{ind}_G H.$$

In der vorstehenden Definition ist Anzahl im allgemeinen als die *Mächtigkeit* einer Menge zu verstehen. Der Index wird aber hauptsächlich dann verwendet, wenn er endlich ist, wenn es also nur endlich viele Nebenklassen gibt. Das ist bei endlichem  $G$  automatisch der Fall, kann aber auch bei unendlichem  $G$  der Fall sein, wie schon die Beispiele  $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 1$ , zeigen. Wenn  $G$  eine endliche Gruppe ist und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe, so gilt aufgrund des Satzes von Lagrange die einfache *Indexformel*

$$\#(G) = \#(H) \cdot \text{ind}_G H.$$

Auch wenn  $G$  nicht endlich ist, so sind die verschiedenen Äquivalenzklassen untereinander insofern „ähnlich“, dass es stets eine natürliche bijektive Abbildung

$$H \longrightarrow gH, h \longmapsto gh,$$

gibt. Damit gibt es auch eine natürliche bijektive Abbildung zwischen je zwei Äquivalenzklassen.

### NORMALTEILER

**Definition 46.10.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Man nennt  $H$  einen *Normalteiler*, wenn

$$xH = Hx$$

für alle  $x \in G$  ist, wenn also die Linksnebenklasse zu  $x$  mit der Rechtsnebenklasse zu  $x$  übereinstimmt.

Bei einem Normalteiler braucht man nicht zwischen Links- und Rechtsnebenklassen zu unterscheiden und spricht einfach von *Nebenklassen*. Statt  $xH$  oder  $Hx$  schreiben wir meistens  $[x]$ . Die Gleichheit  $xH = Hx$  bedeutet *nicht*, dass  $xh = hx$  für alle  $h \in H$  ist, sondern lediglich, dass es zu jedem  $h \in H$  ein  $\tilde{h} \in H$  mit  $xh = \tilde{h}x$  gibt.

**Lemma 46.11.** *Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  $H$  ist ein Normalteiler von  $G$ .
- (2) Es ist  $xhx^{-1} \in H$  für alle  $x \in G$  und  $h \in H$ .
- (3)  $H$  ist invariant unter jedem inneren Automorphismus von  $G$ .

*Beweis.* (1) bedeutet bei gegebenem  $h \in H$ , dass man  $xh = \tilde{h}x$  mit einem  $\tilde{h} \in H$  schreiben kann. Durch Multiplikation mit  $x^{-1}$  von rechts ergibt sich  $xhx^{-1} = \tilde{h} \in H$ , also (2). Dieses Argument rückwärts ergibt die Implikation (2)  $\Rightarrow$  (1). Ferner ist (2) eine explizite Umformulierung von (3).  $\square$

**Beispiel 46.12.** Wir betrachten die Permutationsgruppe  $G = S_3$  zu einer dreielementigen Menge, d.h.  $S_3$  besteht aus den bijektiven Abbildungen der Menge  $\{1, 2, 3\}$  in sich. Die triviale Gruppe  $\{\text{id}\}$  und die ganze Gruppe sind Normalteiler. Die Teilmenge  $H = \{\text{id}, \varphi\}$ , wobei  $\varphi$  die Elemente 1 und 2 vertauscht und 3 unverändert lässt, ist eine Untergruppe. Sie ist aber kein Normalteiler. Um dies zu zeigen, sei  $\psi$  die Bijektion, die 1 fest lässt und 2 und 3 vertauscht. Dieses  $\psi$  ist zu sich selbst invers. Die Konjugation  $\psi\varphi\psi^{-1} = \psi\varphi\psi$  ist dann die Abbildung, die 1 auf 3, 2 auf 2 und 3 auf 1 schickt, und diese Bijektion gehört nicht zu  $H$ .

**Lemma 46.13.** *Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

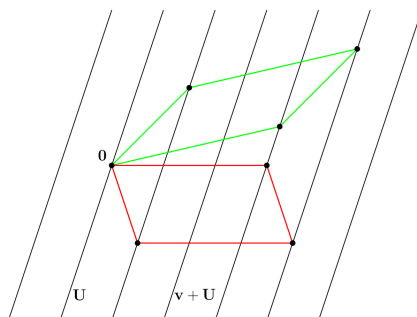
*ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der Kern  $\ker \varphi$  ein Normalteiler in  $G$ .*

*Beweis.* Eine Untergruppe liegt aufgrund von Lemma 44.21 vor. Wir verwenden Lemma 46.11. Es sei also  $x \in G$  beliebig und  $h \in \ker \varphi$ . Dann ist

$$\varphi(xhx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(h)\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)e_H\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x)^{-1} = e_H,$$

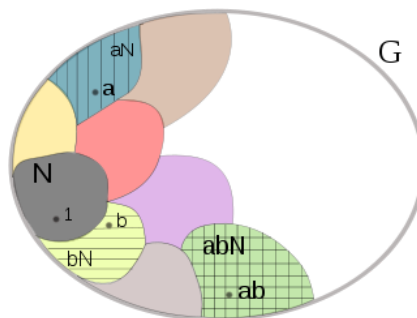
also gehört  $xhx^{-1}$  ebenfalls zum Kern.  $\square$

### RESTKLASSEN-BILDUNG



Das Bild zeigt die Äquivalenzklassen zu einem Untervektorraum mit der wohldefinierten Addition auf den Klassen.

Wir zeigen nun umgekehrt, dass jeder Normalteiler sich als Kern eines geeigneten, surjektiven Gruppenhomomorphismus realisieren lässt. Statt  $G/\sim_H$  schreibt man einfach  $G/H$ .



Die Multiplikation der Nebenklassen zu einem Normalteiler  $N \subseteq G$ .

**Satz 46.14.** *Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  ein Normalteiler. Es sei  $G/H$  die Menge der Nebenklassen (die Quotientenmenge) und*

$$q: G \longrightarrow G/H, g \longmapsto [g],$$

*die kanonische Projektion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Gruppenstruktur auf  $G/H$  derart, dass  $q$  ein Gruppenhomomorphismus ist.*

*Beweis.* Da die kanonische Projektion zu einem Gruppenhomomorphismus werden soll, muss die Verknüpfung durch

$$[x][y] = [xy]$$

gegeben sein. Wir müssen also zeigen, dass durch diese Vorschrift eine wohldefinierte Verknüpfung auf  $G/H$  definiert ist, die unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. D.h. wir haben für  $[x] = [x']$  und  $[y] = [y']$  zu zeigen, dass  $[xy] = [x'y']$  ist. Nach Voraussetzung können wir  $x' = xh$  und  $hy' = \tilde{h}y = yh'$  mit  $h, \tilde{h}, h' \in H$  schreiben. Damit ist

$$x'y' = (xh)y' = x(hy') = x(yh') = xyh'.$$

Somit ist  $[xy] = [x'y']$ . Aus der Wohldefiniertheit der Verknüpfung auf  $G/H$  folgen die Gruppeneigenschaften, die Homomorphieeigenschaft der Projektion und die Eindeutigkeit.  $\square$

**Definition 46.15.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  ein Normalteiler. Die Quotientenmenge

$$G/H$$

mit der aufgrund von Satz 46.14 eindeutig bestimmten Gruppenstruktur heißt *Restklassengruppe von  $G$  modulo  $H$* . Die Elemente  $[g] \in G/H$  heißen *Restklassen*. Für eine Restklasse  $[g]$  heißt jedes Element  $g' \in G$  mit  $[g'] = [g]$  ein *Repräsentant* von  $[g]$ .

**Beispiel 46.16.** Die Untergruppen der ganzen Zahlen sind nach Satz 44.3 von der Form  $\mathbb{Z}n$  mit  $n \geq 0$ . Die Restklassengruppen werden mit

$$\mathbb{Z}/(n)$$

bezeichnet (sprich „ $\mathbb{Z}$  modulo  $n$ “). Bei  $n = 0$  ist das einfach  $\mathbb{Z}$  selbst, bei  $n = 1$  ist das die triviale Gruppe. Im Allgemeinen ist die durch die Untergruppe  $\mathbb{Z}n$  definierte Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Z}$  dadurch gegeben, dass zwei ganze Zahlen  $a$  und  $b$  genau dann äquivalent sind, wenn ihre Differenz  $a - b$  zu  $\mathbb{Z}n$  gehört, also ein Vielfaches von  $n$  ist. Daher ist (bei  $n \geq 1$ ) jede ganze Zahl zu genau einer der  $n$  Zahlen

$$0, 1, 2, \dots, n - 1$$

äquivalent (oder, wie man auch sagt, *kongruent modulo  $n$* ), nämlich zum Rest, der sich bei Division durch  $n$  ergibt. Diese Reste bilden also ein Repräsentantensystem für die Restklassengruppe, und diese besitzt  $n$  Elemente. Die Tatsache, dass die Restklassenabbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n), a \longmapsto [a] = a \bmod n,$$

ein Homomorphismus ist, kann man auch so ausdrücken, dass der Rest einer Summe von zwei ganzen Zahlen nur von den beiden Resten, nicht aber von den Zahlen selbst, abhängt. Als Bild der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}$  ist auch  $\mathbb{Z}/(n)$  zyklisch, und zwar ist 1 (aber auch  $-1$ ) stets ein Erzeuger.

## 46. ARBEITSBLATT

## ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 46.1.** Bestimme die Nebenklassen zu den folgenden Untergruppen von kommutativen Gruppen.

- (a)  $(\mathbb{Z}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$ .
- (b)  $(\mathbb{Q}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$ .
- (c)  $(\mathbb{R}, 0, +) \subseteq (\mathbb{C}, 0, +)$ .
- (d)  $(\mathbb{Z}d, 0, +) \subseteq (\mathbb{Z}, 0, +)$  (zu  $d \in \mathbb{N}$ ).
- (e)  $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$ .
- (f)  $(\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot)$  (zu  $n \in \mathbb{N}$ ).

Wann bestehen die Nebenklassen aus endlich vielen Elementen, wann ist der Index endlich?

**Aufgabe 46.2.** Wir betrachten die Permutationsgruppe  $S_4$  mit der Untergruppe  $H$ , die vom Dreierzyklus  $a \mapsto b, b \mapsto c, c \mapsto a$  erzeugt wird. Bestimme die Links- und die Rechtsnebenklassen zu dieser Untergruppe.

**Aufgabe 46.3.** Wir betrachten die Gruppe  $G$  der invertierbaren  $2 \times 2$ -Matrizen über dem Körper  $\mathbb{Z}/(3)$  mit 3 Elementen und die Untergruppe  $H$ , die aus allen invertierbaren Matrizen mit Determinante 1 besteht. Welche der folgenden Matrizen sind untereinander äquivalent (bezüglich  $H$ ), welche nicht?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 46.4.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H_1, H_2 \subseteq H$  Untergruppen mit den zugehörigen Äquivalenzrelationen  $\sim_1$  bzw.  $\sim_2$ . Zeige, dass die Äquivalenzrelation zu  $H = H_1 \cap H_2$  der Durchschnitt der beiden Äquivalenzrelationen ist.

**Aufgabe 46.5.** Es sei  $p$  eine Primzahl und sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p$ . Zeige, dass  $G$  eine zyklische Gruppe ist.

**Aufgabe 46.6.** Es sei  $G$  eine zyklische Gruppe. Zeige, dass dann auch jede Untergruppe von  $G$  zyklisch ist.

**Aufgabe 46.7.** Es sei  $G$  eine endliche Gruppe. Zeige, dass jedes Element  $g \in G$  eine endliche Ordnung besitzt, und dass die Potenzen

$$g^0 = e_G, g^1 = g, g^2, \dots, g^{\text{ord}(g)-1}$$

alle verschieden sind.

**Aufgabe 46.8.** Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit  $p$  Elementen, wobei  $p$  eine Primzahl sei. Zeige, dass  $R$  ein Körper ist.

**Aufgabe 46.9.** Bestimme die Untergruppen von  $\mathbb{Z}/(15)$ .

**Aufgabe 46.10.** Es sei  $G = S_3$  die Permutationsgruppe zu einer dreielementigen Menge. Welche Zahlen treten als Ordnungen von Untergruppen und welche als Ordnungen von Elementen auf?

**Aufgabe 46.11.** Es sei  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}_+$ , es sei  $\text{GL}_n(K)$  die allgemeine lineare Gruppe der invertierbaren Matrizen und

$$\text{SL}_n(K) \subseteq \text{GL}_n(K)$$

die Untergruppe der Matrizen mit Determinante 1. Zeige, dass die Linksnebenklasse (und auch die Rechtsnebenklasse) zu  $M \in \text{GL}_n(K)$  gleich der Menge aller Matrizen ist, deren Determinante mit  $\det M$  übereinstimmt.

Zeige auf möglichst viele Weisen, dass  $\text{SL}_n(K)$  ein Normalteiler in  $\text{GL}_n(K)$  ist.

**Aufgabe 46.12.** Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild  $\varphi^{-1}(N)$  eines Normalteilers  $N \subseteq H$  ein Normalteiler in  $G$  ist.

**Aufgabe 46.13.** Zeige, dass der Durchschnitt von Normalteilern  $N_i$ ,  $i \in I$ , in einer Gruppe  $G$  ein Normalteiler ist.

**Aufgabe 46.14.** Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Ist das Bild von  $\varphi$  ein Normalteiler in  $H$ ?

**Aufgabe 46.15.** Es sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass die Gruppe der  $n$ -ten Einheitswurzeln in  $\mathbb{C}$  und die Gruppe  $\mathbb{Z}/(n)$  isomorph sind.

Die nächste Aufgabe verwendet das Konzept einer exakten Sequenz.

Es seien  $G_0, \dots, G_n$  Gruppen und  $f_i: G_{i-1} \rightarrow G_i$  Gruppenhomomorphismen derart, dass  $\ker f_{i+1} = \text{Bild } f_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt. Dann heißt

$$G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \dots \rightarrow G_{n-1} \rightarrow G_n$$

eine *exakte Sequenz von Gruppen*.

**Aufgabe 46.16.** Es sei

$$G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \dots \rightarrow G_{n-1} \rightarrow G_n$$

eine exakte Sequenz von Gruppen, wobei alle beteiligten Gruppen endlich seien und  $G_0 = G_n$  die triviale Gruppe sei. Zeige, dass dann

$$\prod_{i=0}^n \#(G_i)^{(-1)^i} = 1$$

gilt.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 46.17.** (2 Punkte)

Bestimme die Untergruppen von  $\mathbb{Z}/(20)$ .

**Aufgabe 46.18.** (2 Punkte)

Bestimme sämtliche Gruppen mit vier Elementen.

**Aufgabe 46.19.** (3 Punkte)

Es sei  $M$  eine endliche Menge und sei  $\sigma$  eine Permutation auf  $M$  und  $x \in M$ . Zeige, dass  $\{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n(x) = x\}$  eine Untergruppe von  $\mathbb{Z}$  ist. Den eindeutig bestimmten nichtnegativen Erzeuger dieser Untergruppe bezeichnen wir mit  $\text{ord}_x \sigma$ . Zeige die Beziehung

$$\text{ord}(\sigma) = \text{kgV} \{\text{ord}_x \sigma \mid x \in M\}.$$

**Aufgabe 46.20.** (2 Punkte)

Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild  $\varphi(N)$  eines Normalteilers  $N \subseteq G$  ein Normalteiler in  $H$  ist.

**Aufgabe 46.21.** (2 Punkte)

Zeige, dass jede Untergruppe vom Index zwei in einer Gruppe  $G$  ein Normalteiler in  $G$  ist.

**Aufgabe 46.22.** (2 Punkte)

Es sei  $G$  eine Gruppe und sei  $M$  eine Menge mit einer Verknüpfung. Es sei

$$\varphi: G \rightarrow M$$

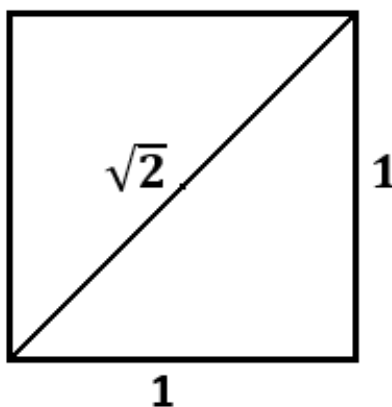
eine surjektive Abbildung mit  $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$  für alle  $g, h \in G$ . Zeige, dass  $M$  eine Gruppe und  $\varphi$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

**Aufgabe 46.23.** (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von Untergruppen  $F \subseteq G \subseteq H$  an derart, dass  $F$  ein Normalteiler in  $G$  und  $G$  ein Normalteiler in  $H$ , aber  $F$  kein Normalteiler in  $H$  ist.

## 47. VORLESUNG - HOMOMORPHIESÄTZE

## KOMMENSURABILITÄT



Die Seitenlänge und die Diagonale in einem Quadrat sind nicht kommensurabel.

**Definition 47.1.** Zwei Strecken  $s$  und  $t$  heißen *kommensurabel*, wenn es eine Strecke  $g$  mit der Eigenschaft gibt, dass beide Strecken ganzzahlige Vielfache von  $g$  sind.

**Definition 47.2.** Reelle Zahlen  $r, s \neq 0$  heißen *kommensurabel*, wenn  $\frac{r}{s}$  eine rationale Zahl ist.

Somit handelt es sich um die Äquivalenzrelation zur Untergruppe

$$(\mathbb{Q}^\times, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot)$$

im Sinne von Definition 46.1.

**Bemerkung 47.3.** Die Frage, inwiefern es über die rationalen Zahlen hinaus weitere sinnvolle Zahlen gibt, geht in die griechische Antike zurück. Die Frage wurde in der Form gestellt, ob je zwei in natürlicher Weise gegebene Strecken zueinander kommensurabel sind, ob es also eine dritte Strecke gibt, von der beide Strecken ganzzahlige Vielfache sind. Die Pythagoreer waren von der Harmonie des Universums überzeugt und das schloss ihrer Auffassung nach mit ein, dass alle Streckenverhältnisse durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können. Solche ganzzahligen Beziehungen fanden sie in der Musik (Schwingungsverhältnisse) und vermuteten sie für die Planeten und ihre Bewegungen und für die gesamte Geometrie. Es wird darüber spekuliert, ob in den pythagoreischen Kreisen die in Satz 4.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2023-2024)) besprochene Überlegung, die die Irrationalität der  $\sqrt{2}$  begründet (die Inkommensurabilität von Seitenlänge und Diagonale in einem Quadrat), bekannt war und sogar geheimgehalten wurde. Jedenfalls setzte sich später in der Antike die Erkenntnis durch, dass es irrationale Zahlen geben muss.

Die Untergruppenbeziehung

$$(\mathbb{Q}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$$

(die man auch als eine Untervektorraumbeziehung von  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen auffassen kann) führt ebenfalls zu einer Äquivalenzrelation auf den reellen Zahlen. Dabei sind zwei reelle Zahlen äquivalent, wenn ihre Differenz eine rationale Zahl ist.

## HOMOMORPHIE- UND ISOMORPHIESATZ

**Satz 47.4.** *Es seien  $G, Q$  und  $H$  Gruppen, es sei  $\varphi: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus und  $\psi: G \rightarrow Q$  ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Es sei vorausgesetzt, dass*

$$\text{kern } \psi \subseteq \text{kern } \varphi$$

*ist. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus*

$$\tilde{\varphi}: Q \longrightarrow H$$

*derart, dass  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$  ist. Mit anderen Worten: das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \psi \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ Q & & \end{array}$$

*ist kommutativ.*

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Für jedes Element  $u \in Q$  gibt es mindestens ein  $g \in G$  mit  $\psi(g) = u$ . Wegen der Kommutativität des Diagramms muss

$$\tilde{\varphi}(u) = \varphi(g)$$

gelten. Das bedeutet, dass es maximal ein  $\tilde{\varphi}$  geben kann. Wir müssen zeigen, dass durch diese Bedingung eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist. Es seien also  $g, g' \in G$  zwei Urbilder von  $u$ . Dann ist

$$\psi(g'g^{-1}) = uu^{-1} = e_Q$$

und somit ist  $g'g^{-1} \in \ker \psi \subseteq \ker \varphi$ . Daher ist  $\varphi(g) = \varphi(g')$ . Die Abbildung ist also wohldefiniert. Seien  $u, v \in Q$  und seien  $g, h \in G$  Urbilder davon. Dann ist  $gh$  ein Urbild von  $uv$  und daher ist

$$\tilde{\varphi}(uv) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \tilde{\varphi}(u)\tilde{\varphi}(v).$$

D.h.  $\tilde{\varphi}$  ist ein Gruppenhomomorphismus.  $\square$

**Beispiel 47.5.** Wir betrachten die beiden surjektiven Gruppenhomomorphismen

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(4)$$

und

$$\psi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(12).$$

Es ist

$$\ker \psi = \mathbb{Z} \cdot 12 \subseteq \mathbb{Z} \cdot 4 = \ker \varphi.$$

Daher gibt es nach dem Homomorphiesatz einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{Z}/(12) \longrightarrow \mathbb{Z}/(4),$$

der mit den Restabbildungen verträglich ist. Dieser bildet den Rest der Zahl bei Division durch 12 auf den Rest bei Division durch 4 ab. Der Satz beinhaltet insbesondere die Aussage, dass dieser letztere Rest allein vom ersten Rest abhängt, nicht von der Zahl selbst.

Wenn man hingegen

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(5)$$

und

$$\psi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(12)$$

betrachtet, so ist

$$\ker \psi = \mathbb{Z} \cdot 12 \not\subseteq \mathbb{Z} \cdot 5 = \ker \varphi$$

und es gibt keine natürliche Abbildung

$$\mathbb{Z}/(12) \longrightarrow \mathbb{Z}/(5).$$

Beispielsweise haben 1, 13, 25, 37, 49, die alle modulo 12 den Rest 1 haben, modulo 5 die Reste 1, 3, 0, 2, 4.

Die im vorstehenden Satz konstruierte Abbildung heißt *induzierte Abbildung* oder *induzierter Homomorphismus* und entsprechend heißt der Satz auch *Satz vom induzierten Homomorphismus*.

**Korollar 47.6.** *Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

*ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie*

$$\tilde{\varphi}: G/\ker \varphi \longrightarrow H.$$

*Beweis.* Wir wenden Satz 47.4 auf  $Q = G/\ker \varphi$  und die kanonische Projektion  $q: G \rightarrow G/\ker \varphi$  an. Dies induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}: G/\ker \varphi \longrightarrow H$$

mit  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ q$ , der surjektiv ist. Sei  $[x] \in G/\ker \varphi$  und  $[x] \in \ker \tilde{\varphi}$ . Dann ist

$$\tilde{\varphi}([x]) = \varphi(x) = e_H,$$

also  $x \in \ker \varphi$ . Damit ist  $[x] = e_Q$ , d.h. der Kern von  $\tilde{\varphi}$  ist trivial und nach Lemma 44.22 ist  $\tilde{\varphi}$  auch injektiv.  $\square$

**Beispiel 47.7.** Es sei  $G$  eine zyklische Gruppe mit einem Erzeuger  $g$ . Wir betrachten den im Sinne von Lemma 44.12 zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow G, n \longmapsto g^n.$$

Da ein Erzeuger vorliegt, ist diese Abbildung surjektiv. Der Kern dieser Abbildung ist durch die Ordnung von  $g$  gegeben, die wir  $k$  nennen (oder 0, wenn die Ordnung  $\infty$  ist). Aufgrund von Korollar 47.6 gibt es eine kanonische Isomorphie

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{Z}/(k) \longrightarrow G.$$

Insbesondere gibt es bis auf Isomorphie für jedes  $k$  genau eine zyklische Gruppe, nämlich  $\mathbb{Z}/(k)$ .

**Beispiel 47.8.** Der Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{R} \longrightarrow S^1, t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

ist surjektiv und aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen ist der Kern gleich  $\mathbb{Z}2\pi$ . Nach dem Isomorphiesatz gibt es eine kanonische Isomorphie

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z}2\pi \cong S^1.$$

**Beispiel 47.9.** Die komplexe Exponentialfunktion

$$(\mathbb{C}, 0, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, 1, \cdot), z \longmapsto \exp z,$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Der Kern ist  $\mathbb{Z}2\pi i$ . Nach dem Isomorphiesatz gibt es eine kanonische Isomorphie

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z}2\pi i \cong \mathbb{C}^\times.$$

**Beispiel 47.10.** Die Determinante

$$\det: \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow K^\times, M \longmapsto \det M,$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, der Kern ist nach Definition die spezielle lineare Gruppe  $\mathrm{SL}_n(K)$ . Nach dem Isomorphiesatz gibt es eine kanonische Isomorphie

$$\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(K) \cong K^\times.$$

**Satz 47.11.** *Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

*ein Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es eine kanonische Faktorisierung*

$$G \xrightarrow{q} G/\mathrm{kern} \varphi \xrightarrow{\theta} \mathrm{bild} \varphi \xrightarrow{\iota} H,$$

*wobei  $q$  die kanonische Projektion,  $\theta$  ein Gruppenisomorphismus und  $\iota$  die kanonische Inklusion der Bildgruppe ist.*

*Beweis.* Dies folgt aus Korollar 47.6, angewandt auf die Bildgruppe  $U = \mathrm{bild} \varphi \subseteq H$ .  $\square$

Diese Aussage wird häufig kurz und prägnant so formuliert:

$$\mathrm{Bild} = \mathrm{Urbild} \text{ modulo Kern.}$$

**Satz 47.12.** *Es sei  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  ein Normalteiler mit der Restklassengruppe  $Q = G/N$ . Es sei  $H \subseteq G$  ein weiterer Normalteiler in  $G$ , der  $N$  umfasst. Dann ist das Bild  $\overline{H}$  von  $H$  in  $Q$  ein Normalteiler und es gilt die kanonische Isomorphie*

$$G/H \cong Q/\overline{H}.$$

*Beweis.* Für die erste Aussage siehe Aufgabe 46.20. Damit ist die Restklassengruppe  $Q/\overline{H}$  wohldefiniert. Wir betrachten die Komposition

$$p \circ q: G \longrightarrow Q \longrightarrow Q/\overline{H}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{kern}(p \circ q) &= \{x \in G \mid (p \circ q)(x) = e\} \\ &= \{x \in G \mid q(x) \in \mathrm{kern} p\} \\ &= \{x \in G \mid q(x) \in \overline{H}\} \\ &= H \end{aligned}$$

ist  $\mathrm{kern}(p \circ q) = H$ . Daher ergibt Korollar 47.6 die kanonische Isomorphie

$$G/H \longrightarrow Q/\overline{H}.$$

$\square$

Kurz gesagt ist also

$$G/H = (G/N)/(H/N).$$

## RESTKLASSENÄRÄUME

**Lemma 47.13.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann ist die durch*

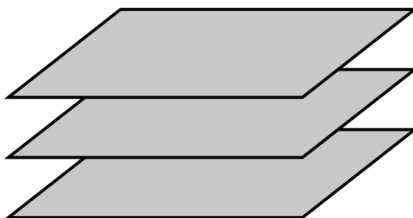
$$v \sim w, \text{ falls } v - w \in U,$$

*definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf  $V$ .*

*Beweis.* Dies gilt generell für die Nebenklassen zu einer Untergruppe, wie in der 46. Vorlesung gezeigt wurde.  $\square$

Wir geben noch einen direkten Beweis, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Wir gehen die Bedingungen einer Äquivalenzrelation durch. Die Reflexivität folgt aus  $v - v = 0 \in U$ , die Symmetrie folgt aus  $w - v = -(v - w) \in U$ , die Transitivität ergibt sich so: Aus  $u - v \in U$  und  $v - w \in U$  folgt  $u - w = (u - v) + (v - w) \in U$ .



Die Nebenklassen zu dem Untervektorraum  $U$  besitzen eine einfache geometrische Interpretation, eine Nebenklasse ist nichts anderes als ein zu  $U$  paralleler affiner Unterraum von  $V$ , also ein Raum der Form  $P + U$  mit  $P \in V$ . Die Quotientengruppe besteht aus der Menge dieser affinen Unterräume.

Wir können auf diese Äquivalenzrelation die allgemeinen Ergebnisse für Normalteiler in einer Gruppe und Äquivalenzrelationen anwenden und erhalten eine surjektive Quotientenabbildung (oder Identifizierungsabbildung oder kanonische Projektion)

$$q: V \longrightarrow V/\sim, v \longmapsto q(v) = [v] = v + U.$$

Statt  $V/\sim$  werden wir  $V/U$  schreiben. Das Besondere an dieser Situation ist, dass diese Quotientenmenge selbst ein Vektorraum ist, und dass die kanonische Abbildung linear ist.

**Satz 47.14.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Es sei  $V/U$  die Menge der Äquivalenzklassen (die Quotientenmenge) zu der durch  $U$  definierten Äquivalenzrelation auf  $V$  und es sei*

$$q: V \longrightarrow V/U, v \longmapsto [v],$$

die kanonische Projektion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte  $K$ -Vektorraumstruktur auf  $V/U$  derart, dass  $q$  eine  $K$ -lineare Abbildung ist.

*Beweis.* Die Existenz und Eindeutigkeit der Gruppenstruktur auf  $V/U$  und die Homomorphieeigenschaft folgt aus Satz 46.14. Die Skalarmultiplikation muss

$$\lambda[v] = [\lambda v]$$

erfüllen, damit die Projektion linear sein kann. Wir müssen zeigen, dass durch diese Vorschrift eine wohldefinierte Skalarmultiplikation auf  $V/U$  definiert ist. Es sei  $v' = v + u$  mit  $u \in U$ . Dann ist

$$\lambda v' = \lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u,$$

und das ist äquivalent zu  $\lambda v$ . Aus der Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation auf  $V/U$  und der Surjektivität der Abbildung folgt, dass eine Vektorraumstruktur vorliegt und dass die Abbildung auch mit der Skalarmultiplikation verträglich ist.  $\square$

**Definition 47.15.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann nennt man die Menge  $V/U$  der Äquivalenzklassen mit der in Satz 47.14 bewiesenen Vektorraumstruktur den *Restklassenraum* (oder *Quotientenraum*) von  $V$  modulo  $U$ .

**Satz 47.16.** Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V, Q$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ . Es sei  $\varphi: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung und  $\psi: V \rightarrow Q$  eine surjektive lineare Abbildung. Es sei vorausgesetzt, dass

$$\text{kern } \psi \subseteq \text{kern } \varphi$$

ist. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}: Q \rightarrow W$$

derart, dass  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$  ist. Mit anderen Worten: das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \psi \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ Q & & \end{array}$$

ist kommutativ.

*Beweis.* Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage ergibt sich aus Satz 47.4. Es ist also nur noch zu zeigen, dass der eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismus  $\tilde{\varphi}$  auch mit der Skalarmultiplikation verträglich ist. Es sei  $u \in Q$  mit einem Urbild  $v \in V$  und sei  $\lambda \in K$ . Dann ist  $\lambda v$  ein Urbild von  $\lambda u$  und daher ist

$$\tilde{\varphi}(\lambda u) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda \tilde{\varphi}(u),$$

also ist  $\tilde{\varphi}$  auch mit der Skalarmultiplikation verträglich.  $\square$

Die im vorstehenden Satz konstruierte Abbildung  $\tilde{\varphi}$  heißt *induzierte lineare Abbildung* und entsprechend heißt der Satz auch *der Satz über die induzierte Abbildung*.

**Korollar 47.17.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*eine surjektive lineare Abbildung zwischen  $K$ -Vektorräumen. Dann gibt es eine kanonische lineare Isomorphie*

$$\tilde{\varphi}: V/\ker \varphi \longrightarrow W.$$

*Beweis.* Dies folgt aus Korollar 47.6 und Satz 47.16. □

**Satz 47.18.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung zwischen  $K$ -Vektorräumen. Dann gibt es eine kanonische Faktorisierung*

$$V \xrightarrow{q} V/\ker \varphi \xrightarrow{\theta} \text{bild } \varphi \xrightarrow{\iota} W,$$

*wobei  $q$  die kanonische Projektion,  $\theta$  ein Vektorraum-Isomorphismus und  $\iota$  die kanonische Inklusion des Bildraumes in  $W$  ist.*

*Beweis.* Dies folgt aus Korollar 47.17, angewendet auf die surjektive lineare Abbildung

$$V \longrightarrow \text{bild } \varphi.$$

□

Diese Aussage wird häufig kurz und prägnant so formuliert:

$$\text{Bild} = \text{Urbild modulo Kern}.$$

**Lemma 47.19.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann ist*

$$\dim_K(V/U) = \dim_K(V) - \dim_K(U).$$

*Beweis.* Die kanonische Projektion

$$V \longrightarrow V/U$$

ist surjektiv und besitzt  $U$  als Kern. Nach der Dimensionsformel ist somit

$$\dim_K(V/U) = \dim_K(V) - \dim_K(U).$$

□

**Lemma 47.20.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit einer direkten Summenzerlegung*

$$V = U \oplus W$$

*in Untervektorräume  $U$  und  $W$ . Dann ist*

$$V/U \cong W.$$

*Beweis.* Die Projektion

$$V \longrightarrow W$$

besitzt  $U$  als Kern. Daher ergibt sich die Aussage aus Korollar 47.17.  $\square$

## 47. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 47.1.** Es seien  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  zwei reelle Zahlen  $\neq 0$ . Zeige, dass diese genau dann äquivalent bezüglich der durch die Untergruppe  $(\mathbb{Q}^\times, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot)$  gegebenen Äquivalenzrelation sind, wenn es eine reelle Zahl  $t \neq 0$  und ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $r = bt$  und  $s = at$  gibt.

**Aufgabe 47.2.** Wir betrachten  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Man mache sich klar, dass in  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  die Gleichheit  $[r] = [s]$  für zwei reelle Zahlen  $r, s$  genau dann gilt, wenn die Differenz  $r - s$  eine rationale Zahl ist.

**Aufgabe 47.3.** Für reelle Zahlen  $r, s$  setzen wir  $r \sim s$ , wenn es rationale Zahlen  $u, v \in \mathbb{Q}$  mit  $u \neq 0$  derart gibt, dass

$$r = us + v$$

ist.

- Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$  ist.
- Bestimme die Äquivalenzklasse zu  $\frac{3}{7}$ .
- Man gebe ein Beispiel für zwei reelle Zahlen, die nicht kommensurabel sind, die aber unter  $\sim$  äquivalent sind.

**Aufgabe 47.4.** Zeige, dass es in der Restklassengruppe  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  zu jedem  $n \in \mathbb{N}_+$  Elemente gibt, deren Ordnung gleich  $n$  ist.

**Aufgabe 47.5.** Zeige, dass es keine Untergruppe  $F \subseteq (\mathbb{Q}, 0, +)$  derart gibt, dass die zusammengesetzte Abbildung

$$F \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ein Isomorphismus ist.

**Aufgabe 47.6.** Bestimme die Restklassengruppe zu  $\{1, -1\} \subset \mathbb{R}^\times$ .

**Aufgabe 47.7.** Finde in der Permutationsgruppe  $S_3$  einen Normalteiler  $N \neq 0, S_3$  und bestimme die zugehörige Restklassengruppe.

**Aufgabe 47.8.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$  ein Element mit dem (nach Lemma 44.12) zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow G, n \longmapsto g^n.$$

Beschreibe die kanonische Faktorisierung von  $\varphi$  gemäß Satz 47.11.

**Aufgabe 47.9.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$  ein Element mit endlicher Ordnung. Zeige, dass die Ordnung von  $g$  mit dem minimalen  $d \in \mathbb{N}_+$  übereinstimmt, zu dem es einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(d) \longrightarrow G$$

gibt, in dessen Bild das Element  $g$  liegt.

**Aufgabe 47.10.** Zeige mit Hilfe der Homomorphiesätze, dass zyklische Gruppen mit der gleichen Ordnung isomorph sind.

**Aufgabe 47.11.** Es seien  $G, H$  und  $F$  Gruppen und seien  $\varphi: G \rightarrow H$  und  $\psi: G \rightarrow F$  Gruppenhomomorphismen mit  $\psi$  surjektiv und mit  $\text{kern } \psi \subseteq \text{kern } \varphi$ . Bestimme den Kern des induzierten Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}: F \longrightarrow H.$$

**Aufgabe 47.12.** Zeige, dass für jede reelle Zahl  $a \neq 0$  die Restklassengruppen  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}a$  untereinander isomorph sind.

Für die folgende Aufgabe muss man verwenden, dass jede positive natürliche Zahl eine eindeutige Faktorisierung in Primzahlen besitzt.

**Aufgabe 47.13.** Es sei  $p$  eine Primzahl. Definiere einen Gruppenhomomorphismus

$$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0),$$

der  $p \mapsto 1$  und alle anderen Primzahlen auf 0 schickt.

Bestimme auch den Kern dieses Gruppenhomomorphismus.

**Aufgabe 47.14.** Es seien  $G_1$  und  $G_2$  Gruppen und seien  $N_1 \subseteq G_1$  und  $N_2 \subseteq G_2$  Normalteiler. Zeige, dass  $N_1 \times N_2$  ein Normalteiler in  $G_1 \times G_2$  ist und dass eine Isomorphie

$$(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$$

vorliegt.

Die folgende Aufgabe verwendet den topologischen Begriff der Dichtheit.

Eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}$  heißt *dicht*, wenn es zu jeder reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  und jedem  $\epsilon > 0$  Elemente  $t \in T$  mit

$$|t - x| < \epsilon$$

gibt.

**Aufgabe 47.15.** Es sei  $H$  eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Zeige, dass entweder  $H = \mathbb{Z}a$  mit einer eindeutig bestimmten nichtnegativen reellen Zahl  $a$  ist, oder aber  $H$  dicht in  $\mathbb{R}$  ist.

**Aufgabe 47.16.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Es sei  $u_i, i \in I$ , eine Basis von  $U$  und  $v_j, j \in J$ , eine Familie von Vektoren in  $V$ . Zeige, dass die Gesamtfamilie  $u_i, i \in I, v_j, j \in J$ , genau dann eine Basis von  $V$  ist, wenn  $[v_j], j \in J$ , eine Basis des Restklassenraumes  $V/U$  ist.

**Aufgabe 47.17.** Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$ . Zeige

$$V_{i+1}/V_i \cong K$$

für  $i = 0, \dots, n-1$ .

**Aufgabe 47.18.** Der  $K$ -Vektorraum  $V$  sei die direkte Summe der Untervektorräume  $V_1$  und  $V_2$  und es seien  $U_1 \subseteq V_1$  und  $U_2 \subseteq V_2$  Untervektorräume. Zeige

$$V_1 \oplus V_2/(U_1 \oplus U_2) \cong V_1/U_1 \oplus V_2/U_2.$$

Man interpretiere die Aussage der folgenden Aufgabe im Kontext des Faktorisierungssatzes.

**Aufgabe 47.19.** Es sei  $M$  eine  $m \times n$ -Matrix über dem Körper  $K$  mit dem Rang  $r$ . Zeige, dass es eine  $r \times n$ -Matrix  $A$  und eine  $m \times r$ -Matrix  $B$ , beide mit dem Rang  $r$ , mit  $M = B \circ A$  gibt.

**Aufgabe 47.20.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum. Zeige, dass dies eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\varphi_{V/U}: V/U \longrightarrow V/U$$

auf dem Restklassenraum  $V/U$  mit der Eigenschaft induziert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/U & \xrightarrow{\varphi_{V/U}} & V/U \end{array}$$

kommutiert.

**Aufgabe 47.21.** Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum. Es sei  $u_1, \dots, u_s$  eine Basis von  $U$  und  $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$  eine Basis von  $V$ , bezüglich der  $\varphi$  durch die Matrix  $M$  beschrieben werde. Durch welche Matrix wird die in Aufgabe 47.20 definierte lineare Abbildung

$$\varphi_{V/U}: V/U \longrightarrow V/U$$

bezüglich der Basis  $[v_1], \dots, [v_s]$  von  $V/U$  beschrieben?

Zur folgenden Aufgabe vergleiche man Aufgabe 16.23.

**Aufgabe 47.22.** Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum. Es sei  $\varphi_U$  die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $U$  und

$$\varphi_{V/U}: V/U \longrightarrow V/U$$

die in Aufgabe 47.20 definierte lineare Abbildung. Zeige

$$\det \varphi = \det \varphi_U \cdot \det \varphi_{V/U}.$$

**Aufgabe 47.23.** Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum. Es sei  $\varphi_U$  die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $U$  und

$$\varphi_{V/U}: V/U \longrightarrow V/U$$

die in Aufgabe 47.20 definierte lineare Abbildung. Zeige, dass für das charakteristische Polynom die Beziehung

$$\chi_\varphi = \chi_{\varphi_U} \cdot \chi_{\varphi_{V/U}}$$

gilt.

**Aufgabe 47.24.** Es sei  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}$  der reelle Vektorraum aller Folgen. Zeige, dass die folgenden Teilmengen Untervektorräume sind.

- (a) Die Menge der konstanten Folgen.
- (b) Die Menge  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}_+)}$  der Folgen, für die nur endlich viele Folgenglieder von 0 verschieden sind.
- (c) Die Menge  $F$  der Folgen, die bis auf endlich viele Folgenglieder konstant sind.
- (d) Die Menge  $E$  der Folgen, die nur endlich viele verschiedene Werte haben.
- (e) Die Menge der konvergenten Folgen.
- (f) Die Menge  $N$  der Nullfolgen.

Welche Beziehungen gelten zwischen diesen Untervektorräumen?

**Aufgabe 47.25.** Wir betrachten die beiden reellen Folgen

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und wir verwenden einige Bezeichnungen aus Aufgabe 47.24.

- (a) Zeige, dass die beiden Folgen  $x_n$  und  $y_n$  in  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}/\mathbb{R}^{(\mathbb{N}_+)}$  linear unabhängig sind.
- (b) Zeige, dass die beiden Folgen  $x_n$  und  $y_n$  in  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}/F$  linear abhängig sind.
- (c) Wie sieht es in  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}/N$  aus?

**Aufgabe 47.26.** Es sei  $W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+}$  der reelle Vektorraum aller konvergenten Folgen und  $U \subseteq W$  der Untervektorraum der Nullfolgen. Zeige

$$W/U \cong \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 47.27.** Zeige, dass durch die Abbildung

$$S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, (u, t) \longmapsto ue^t,$$

ein Gruppenisomorphismus gegeben ist. Wie ist jeweils die Gruppenstruktur gegeben? Skizziere, welche markanten Teilmengen des Zylinders und der gelochten Ebene sich unter diesem Isomorphismus entsprechen.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 47.28.** (3 Punkte)

Es seien  $G$  und  $H$  Gruppen mit der Produktgruppe  $G \times H$ . Zeige, dass die Gruppe  $G \times \{e_H\}$  ein Normalteiler in  $G \times H$  ist, und dass die Restklassengruppe  $(G \times H)/(G \times \{e_H\})$  kanonisch isomorph zu  $H$  ist.

**Aufgabe 47.29.** (3 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen zwischen zwei zyklischen Gruppen. Welche sind injektiv und welche sind surjektiv?

**Aufgabe 47.30.** (2 Punkte)

Zeige, dass es eine Gruppe  $G$  und einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: (\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow G$$

mit der Eigenschaft gibt, dass  $r \in \mathbb{R}$  genau dann rational ist, wenn  $\varphi(r) = 0$  ist.

**Aufgabe 47.31.** (2 Punkte)

Wir betrachten  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und den Untervektorraum

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}.$$

Zeige, dass im Restklassenraum  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  zwei komplexe Zahlen genau dann gleich werden, wenn ihre Imaginärteile übereinstimmen.

**Aufgabe 47.32.** (3 Punkte)

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U_1, U_2, U$  seien Untervektorräume. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V/U$$

die kanonische Projektion. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (a) Für die Bildräume gilt

$$\varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) = 0.$$

- (b) Es ist

$$U_1 \cap (U_2 + U) \subseteq U.$$

- (c) Es ist

$$(U_1 + U) \cap (U_2 + U) \subseteq U.$$

**Aufgabe 47.33.** (4 Punkte)

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  und es sei  $T \subseteq V$  der Ausartungsraum. Zeige, dass auf dem Restklassenraum  $V/T$  ein nichtausgeartete symmetrische Bilinearform  $\langle -, - \rangle'$  mit

$$\langle [v], [w] \rangle' = \langle v, w \rangle$$

für alle  $v, w \in V$  existiert.

**Aufgabe 47.34.** (6 (1+3+2) Punkte)

Es sei  $E$  ein affiner Raum über dem  $K$ -Vektorraum  $V$  und es sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Wir definieren auf  $E$  eine Relation  $\sim$  durch

$$P \sim Q \text{ genau dann, wenn } \exists v \in U \text{ mit } P = Q + v.$$

- (a) Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.  
 (b) Zeige, dass  $F := E/\sim$  ein affiner Raum über dem Restklassenraum  $V/U$  ist.  
 (c) Zeige, dass die kanonische Projektion

$$E \longrightarrow E/\sim$$

eine affine Abbildung ist.

## 48. VORLESUNG - ORIENTIERUNGEN

## RESTKLASSENRINGE

Auf einer Restklassengruppe zu einem Normalteiler in einer Gruppe gibt es häufig zusätzliche Strukturen, wenn die Ausgangsgruppe und der Normalteiler zusätzliche Eigenschaften besitzen. In der letzten Vorlesung haben wir Restklassenräume zu Untervektorräumen besprochen. Hier besprechen wir kurz Restklassenringe zu einem Ideal in einem kommutativen Ring. Gelegentlich sind uns schon Ringhomomorphismen begegnet, wir erinnern an die Definition.

**Definition 48.1.** Es seien  $R$  und  $S$  Ringe. Eine Abbildung

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

heißt *Ringhomomorphismus*, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- (1)  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ .
- (2)  $\varphi(1) = 1$ .
- (3)  $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ .

**Lemma 48.2.** Es seien  $R$  und  $S$  kommutative Ringe und sei

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus. Dann ist der Kern

$$\text{kern } \varphi = \{f \in R \mid \varphi(f) = 0\}$$

ein Ideal in  $R$ .

*Beweis.* Siehe Aufgabe 48.1. □

Nach Lemma 48.2 ist der Kern eines Ringhomomorphismus ein Ideal. Man kann umgekehrt zu jedem Ideal  $I \subseteq R$  in einem (kommutativen) Ring einen Ring  $R/I$  konstruieren, und zwar zusammen mit einem surjektiven Ringhomomorphismus

$$R \longrightarrow R/I,$$

dessen Kern gerade das vorgegebene Ideal  $I$  ist. Ideale und Kerne von Ringhomomorphismen sind also im Wesentlichen äquivalente Objekte, so wie das bei Gruppen für Kerne von Gruppenhomomorphismen und Normalteilern gilt. In der Tat gelten die entsprechenden Homomorphiesätze hier wieder, und können weitgehend auf die Gruppensituation zurückgeführt werden. Wir werden uns bei den Beweisen also kurz fassen können.

**Definition 48.3.** Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $I \subseteq R$  ein Ideal in  $R$ . Zu  $a \in R$  heißt die Teilmenge

$$a + I = \{a + f \mid f \in I\}$$

die *Nebenklasse* von  $a$  zum Ideal  $I$ . Jede Teilmenge von dieser Form heißt *Nebenklasse* zu  $I$ .

Diese Nebenklassen sind gerade die Nebenklassen zur (additiven) Untergruppe  $I \subseteq R$ , die wegen der Kommutativität der Addition ein Normalteiler ist. Zwei Elemente  $a, b \in R$  definieren genau dann die gleiche Nebenklasse, also  $a + I = b + I$ , wenn ihre Differenz  $a - b$  zum Ideal gehört. Man sagt dann auch, dass  $a$  und  $b$  dieselbe Nebenklasse *repräsentieren*.

**Definition 48.4.** Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $I \subseteq R$  ein Ideal in  $R$ . Dann ist der *Restklassenring*  $R/I$  (sprich „ $R$  modulo  $I$ “) ein kommutativer Ring, der durch folgende Daten festgelegt ist.

(1) Als Menge ist  $R/I$  die Menge der Nebenklassen zu  $I$ .

(2) Durch

$$(a + I) + (b + I) := (a + b + I)$$

wird eine Addition von Nebenklassen definiert.

(3) Durch

$$(a + I) \cdot (b + I) := (a \cdot b + I)$$

wird eine Multiplikation von Nebenklassen definiert.

(4)  $\bar{0} = 0 + I = I$  definiert das neutrale Element für die Addition (die Nullklasse).

(5)  $\bar{1} = 1 + I$  definiert das neutrale Element für die Multiplikation (die Einsklasse).

Man muss dabei zeigen, dass diese Abbildungen (also Addition und Multiplikation) wohldefiniert sind, d.h. unabhängig vom Repräsentanten, und dass die Ringaxiome erfüllt sind. Da  $I$  insbesondere eine Untergruppe der kommutativen Gruppe  $(R, +, 0)$  ist, liegt ein Normalteiler vor, sodass  $R/I$  eine Gruppe ist und die Restklassenabbildung

$$R \longrightarrow R/I, a \longmapsto a + I =: \bar{a},$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Das einzig Neue gegenüber der Gruppensituation ist also die Anwesenheit einer Multiplikation. Die Wohldefiniertheit der Multiplikation ergibt sich so: Seien zwei Restklassen gegeben mit unterschiedlichen Repräsentanten, also  $\bar{a} = \bar{a}'$  und  $\bar{b} = \bar{b}'$ . Dann ist  $a - a' \in I$  und  $b - b' \in I$  bzw.  $a' = a + x$  und  $b' = b + y$  mit  $x, y \in I$ . Daraus ergibt sich

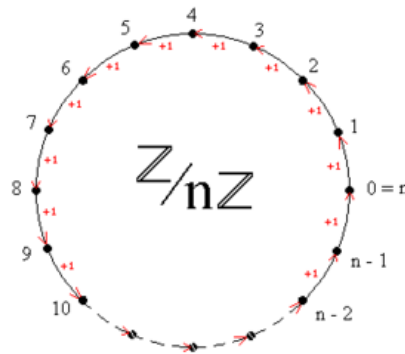
$$a'b' = (a + x)(b + y) = ab + ay + xb + xy.$$

Die drei hinteren Summanden gehören zum Ideal, sodass die Differenz  $a'b' - ab \in I$  ist.

Aus der Wohldefiniertheit folgen die anderen Eigenschaften und insbesondere, dass ein Ringhomomorphismus in den Restklassenring vorliegt. Diesen nennt man wieder die *Restklassenabbildung* oder den *Restklassenhomomorphismus*. Das Bild von  $a \in R$  in  $R/I$  wird häufig mit  $[a]$ ,  $\bar{a}$  oder einfach mit  $a$  selbst bezeichnet und heißt die *Restklasse* von  $a$ . Bei dieser Abbildung gehen genau die Elemente aus dem Ideal auf 0, d.h. der Kern dieser Restklassenabbildung ist das vorgegebene Ideal.

Das einfachste Beispiel für diesen Prozess ist die Abbildung, die einer ganzen Zahl  $a$  den Rest bei Division durch eine fixierte Zahl  $d$  zuordnet. Jeder Rest wird dann repräsentiert durch eine der Zahlen  $0, 1, 2, \dots, d-1$ . Im Allgemeinen gibt es nicht immer ein solch übersichtliches Repräsentantensystem.

### DIE RESTKLASSENRINGE VON $\mathbb{Z}$



Die Restklassengruppen  $\mathbb{Z}/(d)$  haben wir bereits kennengelernt, es handelt sich um zyklische Gruppen der Ordnung  $d$ . Diese Gruppen bekommen jetzt aber noch zusätzlich eine Ringstruktur.

**Korollar 48.5.** *Es sei  $d \geq 0$  eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Ringstruktur auf  $\mathbb{Z}/(d)$  derart, dass die Restklassenabbildung*

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(d), a \longmapsto \bar{a},$$

*ein Ringhomomorphismus ist.  $\mathbb{Z}/(d)$  ist ein kommutativer Ring mit  $d$  Elementen (bei  $d \geq 1$ ).*

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall der obigen Überlegungen. □

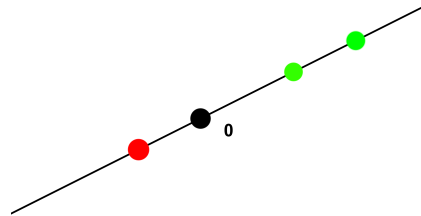
**Satz 48.6.** *Es sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl und  $\mathbb{Z}/(n)$  der zugehörige Restklassenring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  $\mathbb{Z}/(n)$  ist ein Körper.
- (2)  $\mathbb{Z}/(n)$  ist ein Integritätsbereich.
- (3)  $n$  ist eine Primzahl.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 48.7. □

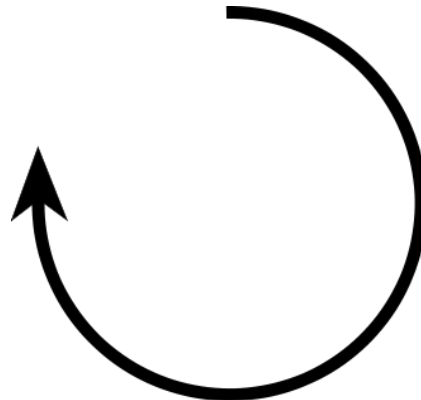
Die Restklassenringe  $S = K[X]/(P)$  sind ebenfalls gut überschaubar ( $K$  ein Körper). Wenn  $P$  den Grad  $d$  besitzt, so wird jede Restklasse in  $S$  durch ein eindeutiges Polynom von einem Grad  $< d$  repräsentiert. Dieses ist der Rest, den man erhält, wenn man durch  $P$  durchdividiert.

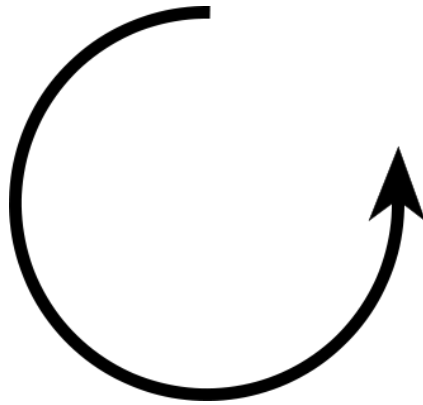
## ORIENTIERUNGEN AUF REELLEN VEKTORRÄUMEN



Jeder Punkt  $\neq 0$  auf einer Geraden definiert eine Orientierung. Die beiden grünen Punkte definieren die gleiche Orientierung, der rote Punkt die andere.

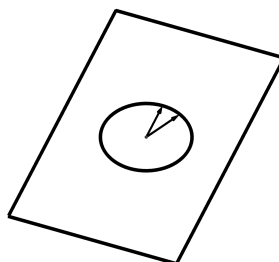
Bei einem eindimensionalen reellen Vektorraum  $V$  (einer Geraden) ist jeder von  $0$  verschiedene Vektor ein Basisvektor. Wenn man die  $0$  herausnimmt, so zerfällt die Gerade in zwei Hälften (zwei Halbgeraden, zwei Strahlen). Wenn die Gerade „horizontal vor einem liegt“, so werden die beiden Hälften als „links“ bzw. „rechts“ angesprochen. Diese Begrifflichkeit ist ziemlich problematisch, wenn man die Gerade bewegt oder wenn man sie aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet. Dagegen ist es ein einfacher Tatbestand, dass es zwei Seiten gibt und es ist auch einfach zu bestimmen, ob zwei Punkte der gleichen Seite oder verschiedenen Seiten angehören, auch wenn die einzelnen Seiten schwer zu benennen sind. Die Gleichseitigkeit von zwei Punkten  $\neq 0$  auf der Geraden kann man dadurch ausdrücken, dass ihre Übergangsmatrix (Basiswechselform), die ja nur aus einer einzigen reellen Zahl besteht, positiv ist, die Andersseitigkeit bedeutet, dass die Übergangsmatrix negativ ist.





In der Ebene gibt es ein vergleichbares Phänomen, den Drehsinn. Wenn man sich beispielsweise auf der Erdoberfläche um einen Baum bewegen möchte, so kann man das mit dem Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn tun. Der Uhrzeigersinn ist durch eine Konvention festgelegt und es wird von der Draufsicht „von oben“ ausgegangen. Für den nach oben schauenden Maulwurf im Boden ist der Drehsinn genau umgekehrt. Wenn im Raum irgendeine Ebene gegeben ist, so ist keineswegs klar, was in ihr der Uhrzeigersinn sein soll. Dennoch ist für jede Ebene klar, dass es dort zwei entgegengesetzte Drehrichtungen gibt und wann zwei Drehrichtungen übereinstimmen. Auch dieses Phänomen kann man mit Basen und ihren Übergangsmatrizen erfassen. Der Mittelpunkt der Uhr sei der Nullpunkt der Ebene, den Zeiger fassen wir zu jedem Zeitpunkt als einen Vektor auf. Zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  nimmt der Zeiger die beiden Vektorpositionen  $v_1$  und  $v_2$  ein, wobei darauf zu achten ist, dass in der Zeitdifferenz weniger als eine Halbdrehung vollzogen wird. Diese beiden Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  definieren eine Basis der Ebene (nach einer Halbdrehung wäre  $v_2 = -v_1$  und die beiden Vektoren wären linear abhängig). Wenn man zum Zeitpunkt  $t_1 = 0$  den Zeiger oben sein lässt, sie wird die Zeigerbewegung im Uhrzeigersinn durch  $\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$  parametrisiert. Die beiden Vektoren sind dann

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \text{ mit } 0 < t < \pi.$$



Wurde die Uhr von vorne oder von hinten in die schräge Ebene hineingelegt?

Die Übergangsmatrix zwischen der Standardbasis

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$M_u^v = \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}.$$

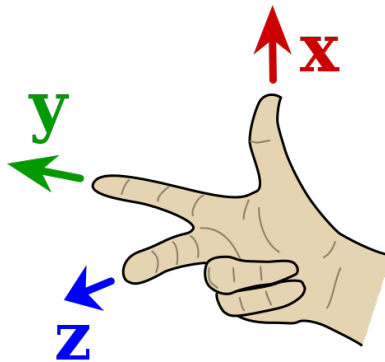
Die Determinante davon ist  $-\sin t$ , und diese ist im angegebenen Winkelbereich für  $t$  stets negativ, für  $t$  aus  $] \pi, 2\pi[$  ist sie positiv. Die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix} \text{ mit } t, s \in ]0, \pi[$$

haben eine positive Determinante. In diesem Sinne legt der Uhrzeigersinn zwar keine Basis fest, aber doch eine Klasse von Basen, die untereinander eine Übergangsmatrix mit positiver Determinante haben. Wenn man gegen den Uhrzeigersinn läuft, so gelangt man zu Basen vom Typ

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in ]0, \pi[,$$

und diese haben zur Standardbasis und untereinander Übergangsmatrizen mit positiver Determinante.



Im Raum gibt es wieder ein vergleichbares Phänomen, wobei hier die menschliche Anatomie hilft. Die rechte und die linke Hand sind spiegelbildlich aufgebaut (die rechte Hand ist diejenige, die vom Herz weiter weg ist als die linke). Wenn man eine Hand nimmt, den Handmittelpunkt als Nullpunkt des Raumes ansetzt und den Daumen, Zeige- und Mittelfinger ausspreizt, sodass Daumen und Zeigefinger eine Pistole bilden und der Mittelfinger nach innen zeigt, so ergibt sich durch diese drei Finger in dieser Reihenfolge im Raum eine Folge von drei Vektoren, die eine Basis bilden (man kann auch die

Finger einzeln vom Ansatz zur Spitze als Vektoren auffassen und auf einen gemeinsamen Ursprungspunkt verzichten, das macht keinen Unterschied). Wenn man dies mit der linken und der rechten Hand macht, so kann man zwar Daumen und Zeigefinger parallel aneinander anlegen, aber die Mittelfinger sind dann einander entgegen gesetzt. Die Übergangsmatrix zwischen den beiden Handbasen ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ihre Determinante ist negativ. Die rechte und die linke Hand repräsentieren wieder unterschiedliche Orientierungen von Raumbasen.

Wir kommen nun zur allgemeinen Definition einer Orientierung. Im Folgenden ist es wichtig, dass man unter einer Basis nicht die Menge der Basisvektoren  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , sondern das geordnete Tupel  $(v_1, \dots, v_n)$  der Basisvektoren versteht.

**Definition 48.7.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Man nennt zwei Basen  $v_1, \dots, v_n$  und  $w_1, \dots, w_n$  *orientierungsgleich*, wenn die Determinante ihrer Übergangsmatrix positiv ist.

Diese Relation zwischen Basen ist eine Äquivalenzrelation, und zwar eine, bei der es nur zwei Äquivalenzklassen (genannt *Orientierungen* oder *Orientierungsklassen*) gibt (außer beim Nullraum).

**Definition 48.8.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Eine *Orientierung* auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Basen von  $V$  unter der Äquivalenzrelation, orientierungsgleich zu sein.<sup>9</sup>

Es ist einfach, zu bestimmen, ob zwei Basen die gleiche oder die entgegengesetzte Orientierung besitzen, es macht aber keinen Sinn, die einzelnen Orientierungen zu benennen.



Viele Objekte aus Natur und Technik machen deutlich, dass es zwei verschiedene Orientierungen gibt. Es ist einfach, bei gleichartigen Objekten wie Federn die mit der gleichen und die mit der entgegengesetzten Orientierung zu erkennen.

<sup>9</sup>Bei einem 0-dimensionalen Vektorraum, also dem Nullraum, gibt es nur die leere Basis. Es ist aber dennoch sinnvoll, von zwei Orientierungen auf dem Nullraum zu sprechen, die wir durch  $+$  und  $-$  repräsentieren.



Die Benennung der beiden Orientierungen und welchen mathematischen (durch eine Basis repräsentierten) Orientierungen sie entsprechen ist eine Frage der Konvention.

**Definition 48.9.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Er heißt *orientiert*, wenn auf ihm eine Orientierung erklärt ist.

Ein Vektorraum wird dadurch orientiert, dass man beispielsweise sagt, dass  $V$  die Orientierung tragen möge, die durch die Basis  $v_1, \dots, v_n$  repräsentiert wird. Der Standardraum  $\mathbb{R}^n$  trägt, wenn nichts anderes gesagt wird, die sogenannte *Standardorientierung*, die durch die Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  repräsentiert wird. Die Standardorientierung von  $\mathbb{R}$  wird durch die 1 und jede positive Zahl repräsentiert, die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^2$  entspricht, wenn man wie üblich den ersten Standardvektor nach rechts und den zweiten Standardvektor dazu senkrecht nach oben zeichnet, der Bewegung gegen den Uhrzeigersinn. Im Raum entspricht die Standardorientierung der rechten Hand, wenn man den Raum mit der ersten Achse nach rechts, der zweiten Achse nach hinten und der dritten Achse nach oben positiv ausrichtet. Die rechte Hand liefert eine menschlich-natürliche Orientierung des Anschauungsraumes und die Standardorientierung liefert eine Orientierung auf dem  $\mathbb{R}^3$ , beides hat erstmal nichts miteinander zu tun, da es eine Vielzahl an Möglichkeiten gibt, ein Koordinatensystem aufzustellen. Das eben angesprochene Koordinatensystem beruht auf einer Konvention.

Auf einem beliebigen reellen Vektorraum gibt es keine kanonische Möglichkeit, eine Orientierung auszuzeichnen. Es gibt zwar zu jedem reellen endlichdimensionalen Vektorraum eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow V,$$

und dabei wird die Standardbasis auf eine Basis von  $V$  abgebildet, allerdings hängen diese Bildbasen und ihre Orientierungsklasse vom gewählten  $\varphi$  ab. Es ist nicht möglich, auf jedem  $V$  eine Orientierung in kanonischer Weise festzulegen.

Unter einer Orientierung auf einem reellen affinen Raum  $E$  versteht man eine Orientierung auf dem zugrunde liegenden reellen Vektorraum.

**Definition 48.10.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale orientierte reelle Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

heißt *orientierungstreu*, wenn für jede Basis  $v_1, \dots, v_n$ , die die Orientierung auf  $V$  repräsentiert, die Bildvektoren  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  die Orientierung auf  $W$  repräsentieren.

Es genügt, diese Eigenschaft für eine einzige, die Orientierung repräsentierende Basis nachzuweisen, siehe Aufgabe 48.19. Bei einem Automorphismus  $\varphi: V \rightarrow V$  kann man direkt von orientierungstreu sprechen, ohne zuvor eine Orientierung auszuzeichnen. Orientierungstreu liegt vor, wenn jede Basis  $v_1, \dots, v_n$  zu ihrer Bildbasis  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  orientierungsgleich ist. Dies kann man einfach mit der folgenden Beobachtung überprüfen.

**Lemma 48.11.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\varphi: V \rightarrow V$  eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  genau dann orientierungstreu, wenn die Determinante von  $\varphi$  positiv ist.*

*Beweis.* Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Wegen der Bijektivität von  $\varphi$  bilden auch die Bilder

$$\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$$

eine Basis von  $V$ . Es sei

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i,$$

sodass

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

die beschreibende Matrix der Abbildung bezüglich der Basis  $v_1, \dots, v_n$  ist. Diese Matrix ist auch die Basiswechsellmatrix  $M_{\mathbf{v}}^{\varphi(\mathbf{v})}$ . Die Positivität der Determinante dieser Übergangsmatrix bedeutet nach Definition, dass die beiden Basen die gleiche Orientierung repräsentieren.  $\square$

Wenn auf  $V$  ein Skalarprodukt ausgezeichnet und  $\varphi$  eine Isometrie ist, so bedeutet positive Determinante nach Lemma 33.13 einfach, dass die Determinante gleich 1 ist. In diesem Zusammenhang stimmt also orientierungsgleich und eigentlich überein.

## 48. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 48.1.** Zeige, dass der Kern eines Ringhomomorphismus

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein Ideal in  $R$  ist.

**Aufgabe 48.2.** Zeige direkt und unter Verwendung von Satz 44.3, dass jede Untergruppe von  $\mathbb{Z}$  ein Ideal ist.

**Aufgabe 48.3.** Zeige, dass  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$  eine Untergruppe, aber kein Ideal ist.

**Aufgabe 48.4.** Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

**Aufgabe 48.5.** Es seien  $k$  und  $n$  ganze Zahlen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $k$  teilt  $n$ .
- (2) Es ist  $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}k$ .
- (3) Es gibt einen Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$

- (4) Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$

**Aufgabe 48.6.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}/(n)$  der zugehörige Restklassenring. Zeige, dass  $a \in \mathbb{Z}$  eine Einheit modulo  $n$  genau dann ist, wenn  $a$  und  $n$  teilerfremd sind.

**Aufgabe 48.7.** Es sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl und  $\mathbb{Z}/(n)$  der zugehörige Restklassenring. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $\mathbb{Z}/(n)$  ist ein Körper.
- (2)  $\mathbb{Z}/(n)$  ist ein Integritätsbereich.
- (3)  $n$  ist eine Primzahl.

**Aufgabe 48.8.** Es sei  $C$  die Menge aller Cauchy-Folgen in  $\mathbb{Q}$ .

- (a) Zeige, dass  $C$  mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.
- (b) Zeige, dass die Teilmenge  $N \subseteq C$ , die aus allen Nullfolgen besteht, ein Ideal ist.
- (c) Zeige, dass  $C/N$  ein Körper ist.

**Aufgabe 48.9.** Schaue in einen Spiegel. Vertauscht die Spiegelung links und rechts, oben und unten, vorne und hinten? Durch welche lineare Abbildung wird eine Spiegelung beschrieben?

**Aufgabe 48.10.** Gibt es Gründe, für Linkshänder andere Schrauben anzufertigen als für Rechtshänder?

**Aufgabe 48.11.** Gilt die Rechte-Hand-Regel auch für Linkshänder?

**Aufgabe 48.12.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass auf der Menge der (geordneten) Basen die Orientierungsgleichheit eine Äquivalenzrelation ist, die bei  $V \neq 0$  aus genau zwei Äquivalenzklassen besteht.

**Aufgabe 48.13.** Es sei  $V \neq 0$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer Basis  $v_1, \dots, v_n$ . Zeige, dass wenn man einen Vektor  $v_i$  durch sein Negatives  $-v_i$  ersetzt, dass dann die neue Basis die entgegengesetzte Orientierung repräsentiert.

**Aufgabe 48.14.** Bestimme, ob die beiden Basen des  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

**Aufgabe 48.15.** Bestimme, ob die beiden Basen des  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

**Aufgabe 48.16.** Wir betrachten im  $\mathbb{R}^3$  die drei Vektoren

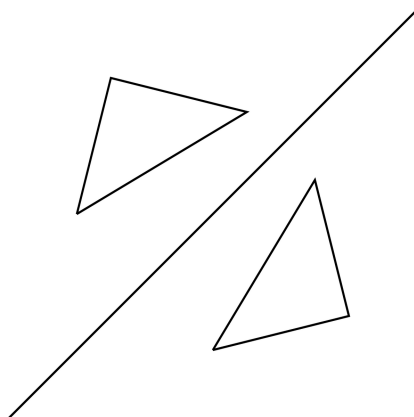
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

- Wie muss man  $x$  wählen, damit diese drei Vektoren die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^3$  repräsentieren?
- Wie muss man  $x$  wählen, damit diese drei Vektoren die der Standardorientierung entgegengesetzte Orientierung repräsentieren?

**Aufgabe 48.17.** Lucy Sonnenschein befindet sich in Position  $(-2, 3) \in \mathbb{Z}^2$  (die Koordinaten seien mit  $x$  und  $y$  bezeichnet) und schaut in die positive  $x$ -Richtung. Alle folgenden Angaben beziehen sich auf ihre jeweilige Position und ihre Ausrichtung, der Uhrzeigersinn bezieht sich auf die Draufsicht. Lucy führt hintereinander folgende Bewegungen aus. Sie macht einen Schritt nach rechts, dann zwei Schritte nach hinten, sie dreht sich um 180 Grad, macht drei Schritte nach links, macht eine Vierteldrehung im Uhrzeigersinn, macht vier Schritte nach rechts und zwei Schritte nach hinten, dreht sich um 360 Grad und macht einen Schritt nach links.

Wo befindet sie sich nach der Gesamtbewegung und in welche Richtung schaut sie?

**Aufgabe 48.18.** Diskutiere, ob es sinnvoll ist, die Ecken eines Dreiecks in der Ebene immer gleichermaßen gegen den Uhrzeigersinn mit  $A, B, C$  zu bezeichnen, insbesondere unter Berücksichtigung des Bildes unten.



**Aufgabe 48.19.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale orientierte reelle Vektorräume und sei

$$\varphi: V \rightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann orientierungstreu ist, wenn es eine die Orientierung auf  $V$  repräsentierende Basis  $v_1, \dots, v_n$  gibt, deren Bildvektoren  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  die Orientierung auf  $W$  repräsentieren.

**Aufgabe 48.20.** Es sei  $M = \{1, \dots, n\}$  und sei  $\pi$  eine Permutation auf  $M$  und  $M_\pi$  die zugehörige Permutationsmatrix. Zeige, dass  $M$  genau dann orientierungstreu ist, wenn

$$\operatorname{sgn}(\pi) = 1$$

ist

**Aufgabe 48.21.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $G = \text{GL}(V)$  die Gruppe der bijektiven linearen Abbildungen auf  $V$ . Zeige, dass die Menge der orientierungstreuen Abbildungen in  $G$  einen Normalteiler bilden. Welche Beziehung besteht zum Betrag der Determinante?

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 48.22.** (3 Punkte)

Bestimme die multiplikative Ordnung aller Einheiten im Restklassenkörper  $\mathbb{Z}/(11)$ .

**Aufgabe 48.23.** (4 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Basen des  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

**Aufgabe 48.24.** (6 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Zeige, dass es auf  $V$ , aufgefasst als reellen Vektorraum, eine natürliche Orientierung gibt.

**Aufgabe 48.25.** (4 Punkte)

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum der Dimension  $n$  und sei das Produkt  $V^n = V \times \cdots \times V$  mit der Produkttopologie versehen. Es sei  $I$  ein reelles Intervall und

$$\varphi: I \longrightarrow V^n$$

eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

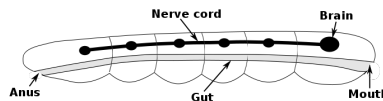
für jedes  $t \in I$  eine Basis von  $V$  ist. Zeige, dass sämtliche Basen  $\varphi(t)$ ,  $t \in I$ , die gleiche Orientierung auf  $V$  repräsentieren.

## 49. VORLESUNG - SYMMETRIEN

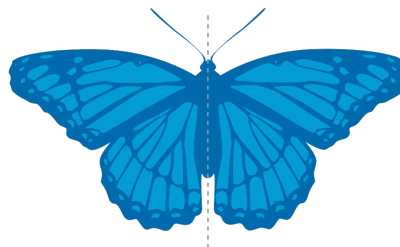
## SYMMETRIEN



Eine Qualle (Nesseltier) ist ein typisches radialsymmetrisches Tier. Es gibt ein vorne und hinten (oder ein oben und unten, jedenfalls eine Schwimmrichtung), was eine Achse fixiert, und um diese Achse kann man das Tier beliebig drehen und heraus kommt das Tier selbst. Diese Drehungen sind eigentliche Symmetrien.



Ein schematisches bilaterales Tier. Es gibt nicht nur vorne (Maul) und hinten, sondern auch oben und unten, was durch die Ausprägung eines Nervenstrangs deutlich wird.



Bei einem Zweiseitentier gibt es eine Spiegelungsebene, an der gespiegelt das Tier auf sich selbst abgebildet wird. Diese Symmetrie ist uneigentlich, lässt sich also nicht real durchführen.



Eine rechtswinkende Winkerkrabbe. Evolutionsbiologisch ein ganz normales Zweiseitentier, bei dem allerdings wegen der verschiedenen Krabbenarme die Spiegelsymmetrie beeinträchtigt ist.

Die wichtigste evolutionäre Aufspaltung im Tierreich (genauer der sogenannten Gewebetiere) betrifft ihre Symmetrie. Es gibt die radialsymmetrischen Tiere wie Quallen und die sogenannten Bilateria oder Zweiseitentiere. Erstere haben nur eine strukturierende Richtung (vorne und hinten), entlang welcher sie differenziert sind. In der zu dieser Richtung oder Achse senkrechten Ebene verfügen sie über keine Ausdifferenzierung, sodass sie um diese Achse beliebig gedreht werden können. Zweitere haben eine weitere strukturierende Richtung, also neben vorne und hinten noch oben und unten, was die Entwicklung von deutlich komplexeren Lebewesen ermöglicht. Die genetische Kodierung der Raumstruktur, die eine solche komplexe Ausdifferenzierung ermöglichte, war eine wichtige Etappe in der Evolution. Eine Folge war die kambrische Explosion.

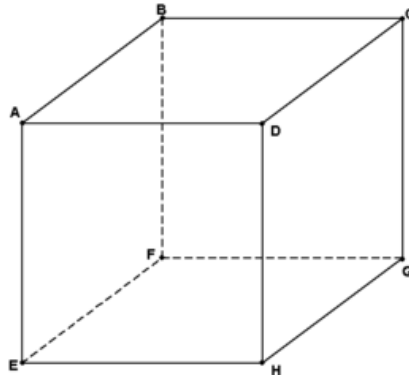
**Definition 49.1.** Es sei  $T \subseteq V$  eine Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum. Eine eigentliche Isometrie

$$f: V \longrightarrow V$$

mit  $f(T) = T$  heißt *eigentliche Symmetrie* oder *Bewegung* von  $T$ .

Die Menge aller Symmetrien an einem solchen geometrischen Objekt  $T$  bilden mit der Hintereinanderschaltung eine Gruppe, die (eigentliche) *Symmetriegruppe* von  $T$ . Es handelt sich um eine Untergruppe der Gruppe der (eigentlichen) Isometrien des euklidischen Vektorraumes. Wenn  $T$  hinreichend kompliziert ist, so wird es neben der Identität keine weitere Symmetrie geben. In den Fällen  $T = \emptyset$  und  $T = \{0\}$  ist jede Isometrie eine Symmetrie. Die Menge aller Symmetrien unter Einschluss der uneigentlichen Isometrien bilden ebenfalls eine Gruppe. Die eigentlichen sind die physikalisch an einem starren Körper durchführbaren Symmetrien und zugleich die orientierungstreuen Abbildungen.

Wir besprechen als einführendes Beispiel die Symmetrien an einem Würfel.



**Beispiel 49.2.** Wir betrachten einen Würfel  $W \subset \mathbb{R}^3$  mit der Seitenlänge 2 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Die Eckpunkte sind also

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

Wir fragen uns, welche Möglichkeiten es gibt, den Würfel in sich selbst zu überführen. Dabei soll der Würfel nicht in irgendeiner Form deformiert werden, es ist nur erlaubt, ihn als Ganzes zu bewegen, und zwar soll die Bewegung wirklich physikalisch durchführbar sein. Man spricht auch von einer (eigentlichen) *Bewegung* des Würfels. Bei einer solchen Bewegung verändert der Würfelmittelpunkt seine Lage nicht, und es werden Seiten auf Seiten, Kanten auf Kanten und Ecken auf Ecken abgebildet. Ebenso werden Seitenmittelpunkte auf Seitenmittelpunkte abgebildet, und gegenüberliegende Seitenmittelpunkte werden auf gegenüberliegende Seitenmittelpunkte abgebildet. Die Seitenmittelpunkte sind die sechs Punkte

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1).$$

Wenn der Punkt  $(1, 0, 0)$  auf den Seitenmittelpunkt  $S$  abgebildet wird, so wird  $(-1, 0, 0)$  auf den gegenüberliegenden Punkt, also  $-S$ , abgebildet. Hierbei ist jede Vorgabe von  $S$  erlaubt, doch dadurch ist die Bewegung noch nicht eindeutig bestimmt. Für den Seitenmittelpunkt  $(0, 1, 0)$  gibt es dann noch vier mögliche Bildpunkte (nur  $S$  und  $-S$  sind ausgeschlossen), da man den Würfel um die durch  $S$  gegebene Achse um ein Vielfaches von 90 Grad drehen kann. Diese Drehungen entsprechen genau den Möglichkeiten, den Punkt  $(0, 1, 0)$  auf einen der vier verbliebenen Seitenmittelpunkte abzubilden. Durch die Wahl des zweiten Seitenmittelpunktes  $T$  ist die Bewegung dann eindeutig festgelegt. Ist das völlig klar?

Um sich das klar zu machen, sind folgende Beobachtungen sinnvoll.

- (1) Bewegungen lassen sich hintereinander ausführen, d.h. wenn man zwei Würfelbewegungen  $\varphi$  und  $\psi$  hat, so ist auch die *Hintereinanderausführung*  $\psi \circ \varphi$ , die zuerst  $\varphi$  und dann  $\psi$  durchführt, sinnvoll definiert.

- (2) Die *identische Bewegung*, die nichts bewegt, ist eine Bewegung. Wenn man zu einer beliebigen Bewegung die identische Bewegung davor oder danach durchführt, so ändert das die Bewegung nicht.
- (3) Zu einer Bewegung  $\varphi$  gibt es die *entgegengesetzte Bewegung* (oder „Rückwärtsbewegung“)  $\varphi^{-1}$ , die die Eigenschaft besitzt, dass die Hintereinanderausführungen  $\varphi^{-1} \circ \varphi$  und  $\varphi \circ \varphi^{-1}$  einfach die Identität sind.

Mit diesen Beobachtungen kann man sich das oben erwähnte Prinzip folgendermaßen klar machen: angenommen, es gibt zwei Bewegungen  $\varphi$  und  $\psi$ , die beide  $(1, 0, 0)$  auf  $S$  und  $(0, 1, 0)$  auf  $T$  abbilden. Es sei  $\psi^{-1}$  die umgekehrte Bewegung zu  $\psi$ . Dann betrachtet man die Gesamtbewegung

$$\theta = \psi^{-1} \circ \varphi.$$

Diese Bewegung hat die Eigenschaft, dass  $(1, 0, 0)$  auf  $(1, 0, 0)$  und dass  $(0, 1, 0)$  auf  $(0, 1, 0)$  abgebildet wird, da ja  $\varphi$  den Punkt  $(1, 0, 0)$  auf  $S$  schickt und  $\psi^{-1}$  den Punkt  $S$  auf  $(1, 0, 0)$  zurückschickt (und entsprechend für  $(0, 1, 0)$ ).  $\theta$  hat also die Eigenschaft, dass sowohl  $(1, 0, 0)$  als auch  $(0, 1, 0)$  auf sich selbst abgebildet werden, d.h., es handelt sich um *Fixpunkte* der Bewegung. Dann ist aber bereits die gesamte  $x, y$ -Ebene fix. Die einzige physikalisch durchführbare Bewegung des Würfels, die diese Ebene unbewegt lässt, ist aber die identische Bewegung. Daher ist  $\psi^{-1} \circ \varphi = \text{Id}$  und damit  $\varphi = \psi$ . Man beachte, dass die *Spiegelung* an der  $x, y$ -Ebene die Punkte  $(0, 0, 1)$  und  $(0, 0, -1)$  vertauscht, doch ist dies eine sogenannte *uneigentliche Bewegung*, da sie nicht physikalisch durchführbar ist.

Damit ergibt sich, dass es für den Basisvektor  $(1, 0, 0)$  sechs mögliche Bildvektoren gibt, für den zweiten Basisvektor  $(0, 1, 0)$  noch jeweils vier und dass dadurch die Abbildung eindeutig festgelegt ist. Insgesamt gibt es also 24 Transformationen des Würfels. Am einfachsten beschreibt man die Bewegungen durch eine  $3 \times 3$ -Matrix, wobei in den Spalten die Bildvektoren der Basisvektoren stehen. Wenn der erste Basisvektor festgehalten wird, so sind die vier möglichen Bewegungen durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dies sieht man so: wenn eine Seitenmitte auf sich selbst abgebildet wird, so gilt das auch für die gegenüberliegende Seitenmitte und dann wird die dadurch definierte Achse nicht bewegt. Eine Bewegung, die eine solche *Seitenmittelpunktachse* fest hält, muss eine Drehung um diese Achse sein, und zwar eine um ein Vielfaches von 90 Grad. Eine solche Drehung ist eine Bewegung in der Ebene (nämlich in der zur festen Achse senkrechten Ebene), und diese Beobachtung führt zu den angegebenen Matrizen.

Eine wichtige Eigenschaft dieser Bewegungen ist, dass es sich um Drehungen des Raumes um eine fixierte Achse handelt. Diese Eigenschaft zeichnet

Raubewegungen nach Satz 34.8 generell aus. Da die eben besprochenen Drehungen Vielfache einer Vierteldrehung sind, folgt, dass wenn man sie jeweils viermal hintereinander durchführt, dann wieder die Identität vorliegt. Bei der Halbdrehung führt natürlich schon die zweifache Ausführung zur Identität. Die Ordnungen dieser Bewegungen im Sinne der Gruppentheorie sind also 4 bzw. 2.

Wir betrachten nun im Würfelbeispiel die Raumdiagonale  $D$ , die durch  $(1, 1, 1)$  und durch  $(-1, -1, -1)$  geht. Auch um diese Achse kann man den Würfel drehen, und zwar um Vielfache von 120 Grad. Man mache sich hierzu klar, wie der Würfel aussieht, wenn diese Achse zu einem Punkt im Gesichtsfeld wird. Die Dritteldrehung, die  $(1, 0, 0)$  auf  $(0, 0, 1)$  schickt, muss  $(0, 0, 1)$  auf  $(0, 1, 0)$  schicken. Die beiden Dritteldrehungen um diese Raumdiagonale sind daher in Matrixdarstellung durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben (die natürlich invers zueinander sind). Als letzte Drehmöglichkeit gibt es die Halbdrehung um eine Kantenmittelpunktsachse, also eine Achse, die durch die Kantenmittelpunkte von zwei gegenüber liegenden Kanten gegeben ist.

Die Bewegungen am Würfel kann man dadurch verstehen, indem man untersucht, was eine Bewegung mit den Seitenmittelpunkten macht, wie sie also diese sechs Punkte ineinander überführt, welche sie fest lässt, etc. Eine Bewegung bestimmt dabei stets eine Bijektion dieser Punktmenge in sich selbst, also eine Permutation. Es gibt aber auch andere charakteristische Punkte bzw. allgemeiner geometrische Teilobjekte des Würfels, die bei einer Würfelbewegung ineinander überführt werden, z.B. die Menge der Eckpunkte, die Menge der Kantenmittelpunkte, die Menge der Kanten, die Menge der Seiten, die Menge aller Raumdiagonalen, etc. Jede Bewegung hat auf diesen Objekten eine für sie charakteristische (Aus-)wirkung. Die mathematische Präzisierung dieser Beobachtung führt zum Begriff der *Gruppenwirkung* und des *Gruppenhomomorphismus*. Wenn man die Bezeichnung der Ecken vom obigen Bild übernimmt, so haben die oben an zweiter Stelle angeführte Vierteldrehung und die erste Dritteldrehung folgende Wirkung auf den Eckpunkten.

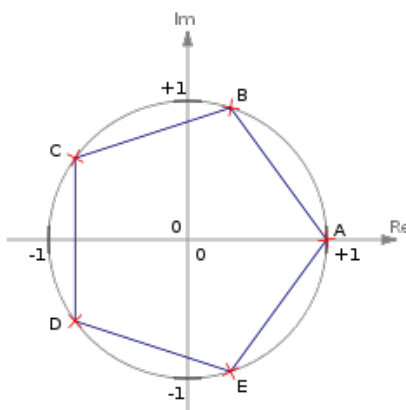
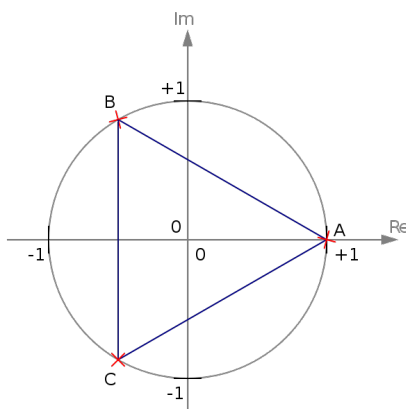
Vierteldrehung um Seitenmittelachse.

Punkt	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
Bildpunkt	$E$	$A$	$D$	$H$	$F$	$B$	$C$	$G$

Dritteldrehung um Raumdiagonale

Punkt	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
Bildpunkt	$H$	$D$	$C$	$G$	$E$	$A$	$B$	$F$

Wenn man eine Drehachse für eine Raumbewegung gefunden hat, so ist die Bewegung dadurch charakterisiert, wie sie auf der zur Achse senkrechten Ebene wirkt. Von daher ist es zuerst wichtig, die Bewegungen der Ebene mit einem fixierten Punkt zu verstehen.



**Beispiel 49.3.** Wir betrachten den Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dieser wird bekanntlich durch die trigonometrischen Funktionen parametrisiert. Diese ordnen einem Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$  (bezüglich der  $x$ -Achse, gegen den Uhrzeigersinn) den zugehörigen Punkt

$$(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

auf dem Kreisbogen zu. Eine gleichmäßige Unterteilung des Intervalls  $[0, 2\pi]$  in  $n$  gleichgroße Stücke, die durch die Grenzen

$$0, \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, 3\frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{n}, n\frac{2\pi}{n} = 2\pi$$

gegeben sind, führt zu einer gleichmäßigen Unterteilung des Kreises mit den Eckpunkten

$$(1, 0), \left( \cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \right), \left( \cos 2\frac{2\pi}{n}, \sin 2\frac{2\pi}{n} \right), \left( \cos 3\frac{2\pi}{n}, \sin 3\frac{2\pi}{n} \right), \dots, \\ \left( \cos(n-1)\frac{2\pi}{n}, \sin(n-1)\frac{2\pi}{n} \right).$$

Diese Punkte sind die Eckpunkte eines *regelmäßigen  $n$ -Ecks*. Das regelmäßige „Zweieck“ besitzt die Ecken  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$ , das regelmäßige (*gleichseitige*) Dreieck besitzt die Ecken

$$(1, 0), \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left( -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

das regelmäßige Viereck (Quadrat) besitzt die Ecken

$$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1),$$

usw. Wir fassen ein solches reguläres  $n$ -Eck als ein in sich starres Gebilde auf und interessieren uns dafür, wie man es in sich selbst überführen kann. Der Nullpunkt ist der Mittelpunkt (Schwerpunkt) des  $n$ -Eckes, und bleibt bei einer Bewegung des  $n$ -Eckes auf sich selbst unverändert. Da eine solche Bewegung die Längen nicht ändert, muss der Punkt  $(1, 0)$  auf einen der Eckpunkte abgebildet werden, da nur diese Punkte des  $n$ -Eckes vom Nullpunkt den Abstand eins besitzen. Da eine Bewegung auch die Winkel nicht verändert, muss der Nachbarpunkt  $(\sin \frac{2\pi}{n}, \cos \frac{2\pi}{n})$  auf einen Nachbarpunkt des Bildpunktes von  $(1, 0)$  abgebildet werden. Bei einer eigentlichen (physikalisch in der Ebene!) durchführbaren Bewegung bleibt auch die Reihenfolge (die „Orientierung“) der Ecken erhalten, sodass die einzigen eigentlichen Bewegungen eines regulären  $n$ -Eckes die Drehungen um ein Vielfaches von  $2\pi/n$  sind.

Wenn man auch noch uneigentliche Bewegungen zulässt, so gibt es noch die Spiegelungen an einer Achse, und zwar geht bei  $n$  gerade die Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte oder zwei gegenüberliegende Seitenmittelpunkte, und bei  $n$  ungerade durch einen Eckpunkt und einen gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt.

Es sei  $n$  fixiert, und setze  $\alpha = 2\pi/n$  und sei  $\varphi$  die Drehung des  $n$ -Eckes um  $\alpha$  gegen den Uhrzeigersinn. Dann kann man jede Drehung am  $n$ -Eck schreiben als  $\varphi^k$  mit einem eindeutig bestimmten  $k$  zwischen 0 und  $n-1$ . Dabei ist  $\varphi^0 = \text{Id}$  die Nulldrehung (die identische Bewegung), bei der nichts bewegt wird. Wenn man  $\varphi$   $n$ -mal ausführt, so hat man physikalisch

gesehen eine volle Umdrehung durchgeführt. Vom Ergebnis her stimmt das aber mit der Nulldrehung überein. Allgemeiner gilt, dass wenn man  $\varphi$   $m$ -mal ausführt, dass dann das Endergebnis (also die effektive Bewegung) nur vom *Rest*  $m \bmod n$  abhängt. Die inverse Bewegung zu  $\varphi^k$  ist  $\varphi^{-k}$ , also  $k$ -mal wieder zurück, oder gleichbedeutend  $\varphi^{(n-k)}$ . Alle Drehungen an einem regelmäßigen  $n$ -Eck bilden eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ .

#### 49. ARBEITSBLATT

#### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 49.1.** Die Puzzleteile für ein Puzzle haben eine grob rechteckige Form, wobei die eine Seite erkennbar länger als die andere ist, und auf jeder Seite gibt es entweder eine Einbuchtung oder eine Ausbuchtung. Wie viele Typen von Puzzelteilen gibt es?



**Aufgabe 49.2.** Bestimme die Ordnung der ebenen Drehung um 291 Grad.

**Aufgabe 49.3.** Wie viele Elemente besitzt die von der Drehung um 45 Grad, von der Drehung um 99 Grad und von der Zwölfteldrehung erzeugte Untergruppe der Drehgruppe  $SO_2$ ?

**Aufgabe 49.4.** Betrachte die Gruppe der Drehungen am Kreis um Vielfache des Winkels  $\alpha = 360/12 = 30$  Grad. Welche Drehungen sind Erzeuger dieser Gruppe?

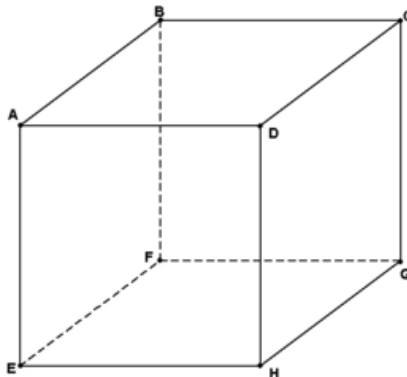
**Aufgabe 49.5.** Betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit  $(1, 0)$  als einem Eckpunkt. Bestimme die (eigentlichen und uneigentlichen) Matrizen, die den Symmetrien an diesem Dreieck entsprechen.

**Aufgabe 49.6.** Es sei  $Q$  das Quadrat im  $\mathbb{R}^2$  mit den Eckpunkten  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ .

- Bestimme zu jeder eigentlichen Symmetrie dieses Quadrates die Matrix bezüglich der Standardbasis.
- Bestimme zu jeder uneigentlichen Symmetrie dieses Quadrates die Matrix bezüglich der Standardbasis.
- Ist die Gruppe der eigentlichen und uneigentlichen Symmetrien an diesem Quadrat kommutativ?

**Aufgabe 49.7.** Bestimme sämtliche Matrizen, die den Symmetrien eines Quadrates mit den Eckpunkten  $(\pm 1, \pm 1)$  entsprechen. Sehen diese Matrizen für jedes Quadrat (mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt) gleich aus?

**Aufgabe 49.8.** Betrachte ein Rechteck in der Ebene, das kein Quadrat sei, und dessen Mittelpunkt der Nullpunkt sei und dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen mögen. Bestimme die Matrizen, die die (eigentlichen und uneigentlichen) Symmetrien des Rechteckes beschreiben. Erstelle eine Verknüpfungstafel für diese Symmetriegruppe.



**Aufgabe 49.9.** Welche Zahlen treten als Ordnungen von eigentlichen Würfelsymmetrien auf? Beschreibe die Wirkungsweise der Symmetrie auf den Eckpunkten, den Kanten und den Seiten des Würfels sowie auf den Raumdiagonalachsen, den Seitenmittelpunktsachsen und den Kantenmittelpunktsachsen.

**Aufgabe 49.10.** Bestimme die vier Bewegungen an einem Würfel mit den Eckpunkten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  in Matrixschreibweise, die  $(1, 0, 0)$  auf  $(0, 0, -1)$  abbilden.

**Aufgabe 49.11.** Wie viele (wesentlich verschiedene) Möglichkeiten gibt es, die Seiten eines Würfels von 1 bis 6 derart zu nummerieren, dass die Summe der Zahlen auf gegenüberliegender Seiten stets 7 ergibt?

Wie viele Möglichkeiten gibt es überhaupt?

**Aufgabe 49.12.** Die Ecken  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  eines Würfels seien mit  $1, 2, 3, \dots, 8$  (oder ähnlich) bezeichnet (Skizze!). Beschreibe durch Wertetabellen, wie die folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Würfelsymmetrien die Eckpunkte permutieren:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{(b)} \quad & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{(c)} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Was passiert mit den Kantenmittelpunkten unter diesen Bewegungen?

**Aufgabe 49.13.** Es sei  $W$  der Würfel mit den Eckpunkten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Fixiere eine Kantenmittelpunktachse (durch den Nullpunkt). Welche Bewegungen des Würfels lassen sich als Drehung um diese Achse beschreiben? Wie sehen diese Bewegungen in Matrixschreibweise aus, und was passiert dabei mit den Eckpunkten des Würfels?

**Aufgabe 49.14.** Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte eines Tetraeders, bei dem der Nullpunkt der Mittelpunkt ist, die vier Eckpunkte des Tetraeders vom Nullpunkt den Abstand eins besitzen, der Punkt  $(0, 0, 1)$  ein Eckpunkt ist und ein weiterer Eckpunkt Koordinaten der Form  $(u, 0, v)$  besitzt.

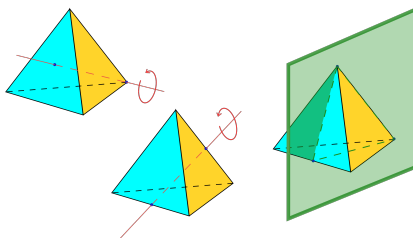
## AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 49.15.** (2 Punkte)

Wie viele Elemente besitzt die von der Drehung um 51 Grad, von der Drehung um 99 Grad und von der Siebeldrehung erzeugte Untergruppe der Drehgruppe  $SO_2$ ?

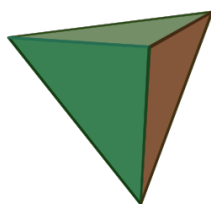
**Aufgabe 49.16.** (2 Punkte)

Es sei  $W$  der Würfel mit den Eckpunkten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Es sei  $\varphi$  eine Drittdrehung um die Raumdiagonale durch  $(1, 1, 1)$  und  $(-1, -1, -1)$ . Bestimme Ebenengleichungen für diejenigen Ebenen, auf denen je drei Eckpunkte liegen, die durch diese Drehung ineinander überführt werden.

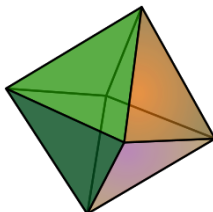
**Aufgabe 49.17.** (5 Punkte)

Man gebe für die in den obigen Skizzen angedeuteten Symmetrien des Tetraeders eine geeignete Matrixdarstellung.

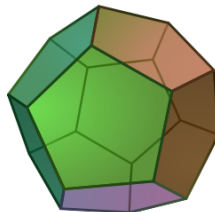
## 50. VORLESUNG - ENDLICHE SYMMETRIEGRUPPEN I



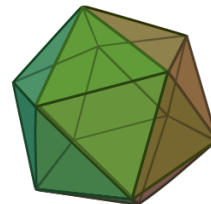
Ein Tetraeder (eine Pyramide mit gleichseitigen Dreiecken als Seiten).



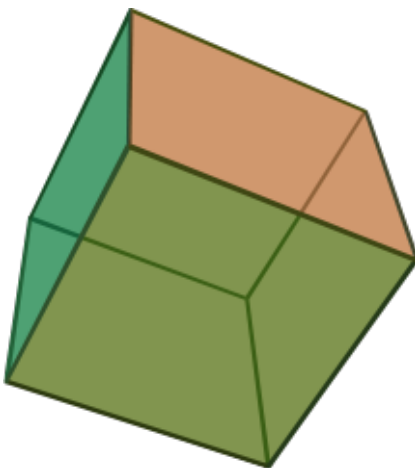
Ein Oktaeder (ein Achtflächner).



Ein Dodekaeder, der hat zwölf Seiten.

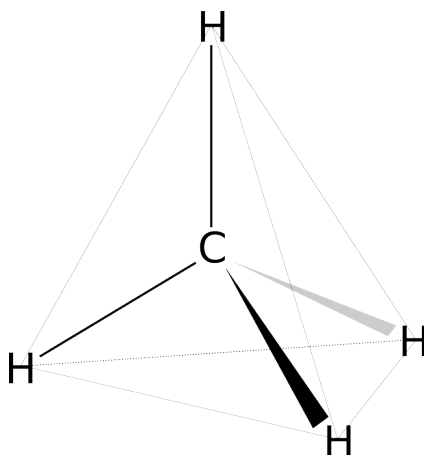


Ein Icosaeder, mit 20 Seiten ...



... und ein Würfel. Das sind die platonischen Körper.

Jede Symmetrie an einen Körper im Raum (beispielsweise einem Würfel) ist insbesondere eine abstandserhaltende, affin-lineare Abbildung des umgebenden Raumes. Die Gesamtmenge der abstandserhaltenden, linearen (eigentlichen) Abbildungen des Raumes bildet die sogenannte *orthogonale Gruppe*  $O_3$  (bzw.  $SO_3$ , wenn die Determinante 1 ist). Dies ist natürlich eine sehr große, unendliche Gruppe. Interessant ist aber, dass die endlichen Untergruppen darin übersichtlich beschrieben werden können. Diese endlichen Untergruppen lassen sich stets als Symmetriegruppe zu einem geeigneten geometrischen Objekt auffassen. Dass eine einfache Klassifikation dieser endlichen Bewegungsgruppen möglich ist, beruht auf intrinsischen Struktureigenschaften des Raumes und liefert unter Anderem eine präzise Version dafür, dass es nur fünf reguläre Polyeder (die *platonischen Körper*) gibt. Den Würfel haben wir in Beispiel 49.2 behandelt, er besitzt 24 eigentliche Symmetrien. Ein weiteres wichtiges Beispiel ist der Tetraeder.



Tetraeder treten auch in der Chemie auf, hier ein Methanmolekül.

**Beispiel 50.1.** Wir betrachten einen *Tetraeder*, also eine Pyramide mit vier gleichseitigen Dreiecken als Flächen. Das einfachste Modell dafür ergibt sich, wenn man bei einem Würfel jeden „zweiten“ Punkt nimmt, also beispielsweise die Eckpunkte

$$(1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1).$$

Der Abstand der Eckpunkte zum Nullpunkt ist dann  $\sqrt{3}$  und die Kantenlängen sind  $\sqrt{2}$ . Eine eigentliche Bewegung des Tetraeders ist auch eine eigentliche Bewegung des zugehörigen Würfels (in den der Tetraeder eingeschrieben werden kann).<sup>10</sup>

Die Symmetrien des Tetraeders kann man unterschiedlich beschreiben. Bei einer solchen Symmetrie müssen die Eckpunkte aufeinander abgebildet werden. Dabei müssen die zu den Eckpunkten zugehörigen Geraden, die bei der erwähnten Beziehung zum Würfel dessen Raumdiagonalen sind, aufeinander abgebildet werden und somit müssen dabei auch die Würfeckpunkte aufeinander abgebildet werden. Deshalb ist die Symmetriegruppe des Tetraeders eine Untergruppe der Symmetriegruppe des Würfels. Es gibt Drehungen um Achsen durch einen Eckpunkt und die gegenüber liegende Seite und Drehungen um Achsen durch Kantenmittelpunkte, siehe auch Aufgabe 49.17.

**Definition 50.2.** Zu  $n \in \mathbb{N}$  heißt die Untergruppe

$$A_n := \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}$$

der geraden Permutationen die *alternierende Gruppe*.

Die alternierende Gruppe besitzt (bei  $n \geq 2$ )  $\frac{n!}{2}$  Elemente. Nach Aufgabe 50.25 ist die Tetraedergruppe isomorph zu  $A_4$ .

Wir wollen im Folgenden sämtliche endlichen Untergruppen der Bewegungsgruppe des Raumes verstehen. Die Bewegungsgruppe eines affinen Raumes über einem euklidischen Vektorraum besteht aus allen affin-linearen eigentlichen Isometrien, es kommen also (im Vergleich zur eigentlichen Isometriegruppe) noch zusätzlich die Verschiebungen dazu. Für endliche Untergruppen ist dieser Unterschied unerheblich, da man mit dem folgenden Lemma die endliche Untergruppen der affinen Bewegungsgruppe als eine Gruppe von linearen Abbildungen realisieren kann.

**Lemma 50.3.** *Es sei  $G$  eine endliche Untergruppe der Bewegungsgruppe eines affinen Raumes  $E$  über einem euklidischen Vektorraum  $V$ . Dann besitzen die Bewegungen der Gruppe einen gemeinsamen Fixpunkt. Insbesondere kann man eine solche Gruppe als Untergruppe der  $SO_n$  auffassen.*

<sup>10</sup>Von einem Würfel aus gesehen erhält man einen Tetraeder, indem man jeden zweiten, in einer Seite gegenüberliegenden Eckpunkt des Würfels nimmt.

*Beweis.* Es sei  $n = \#(G)$  die Ordnung der Gruppe. Es sei  $P \in E$  ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die baryzentrische Kombination<sup>11</sup>

$$Q := \sum_{g \in G} \frac{1}{n} g(P).$$

Da jedes  $h \in G$  insbesondere eine affin-lineare Abbildung ist, gilt nach Lemma 30.10 die Gleichheit

$$h(Q) = h\left(\sum_{g \in G} \frac{1}{n} g(P)\right) = \sum_{g \in G} \frac{1}{n} h(g(P)) = \sum_{g \in G} \frac{1}{n} (h \circ g)(P).$$

Da eine Gruppe vorliegt, durchläuft die Menge  $h \circ g$ ,  $g \in G$ , einfach die gesamte Gruppe. Deshalb ist der Ausdruck rechts gleich  $Q$  selbst, und somit ist  $Q$  ein Fixpunkt für alle  $h \in G$ . Wir wählen  $Q$  als Ursprung und können dann  $E$  mit  $V$  identifizieren, wodurch wegen Lemma 30.12 die affin-linearen Abbildungen zu linearen Abbildungen werden. Dadurch erhalten wir  $G$  als Untergruppe der Isometriegruppe von  $V$ . Da  $V$  isometrisch zum  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt ist, ist  $G \subseteq \text{SO}_n$ .  $\square$

## ENDLICHE BEWEGUNGSGRUPPEN IN DER EBENE

Bevor die Symmetriegruppen des Raumes weiter untersuchen, betrachten wir zuerst die Ebene.

**Satz 50.4.** *Es sei  $G \subseteq \text{SO}_2$  eine endliche Untergruppe der linearen Bewegungsgruppe der reellen Ebene. Dann ist  $G$  eine zyklische Gruppe.*

*Beweis.* Jedes Element aus  $G$  ist nach Satz 34.4 eine Drehung der Ebene um einen bestimmten Winkel  $\theta$ . Wir betrachten den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{R} \longrightarrow \text{SO}_2, \theta \longmapsto D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

der einen Winkel auf die zugehörige Drehung abbildet. Es sei  $H \subseteq \mathbb{R}$  das Urbild von  $G$  unter dieser Abbildung, d.h.  $H$  besteht aus allen Drehwinkeln zu Drehungen, die zu  $G$  gehören. Die Gruppe  $H$  wird von einem Repräsentantensystem für die Elemente aus  $G$  zusammen mit  $2\pi$  erzeugt. Insbesondere ist also  $H$  eine endlich erzeugte Untergruppe von  $\mathbb{R}$ . Da jedes Gruppenelement aus  $G$  eine endliche Ordnung besitzt, muss jedes  $\theta \in H$  die Gestalt  $\theta = 2\pi q$  mit einer rationalen Zahl  $q \in \mathbb{Q}$  haben. Dies bedeutet, dass  $H$  eine endlich erzeugte Untergruppe von  $2\pi\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  ist. Damit ist  $H$  isomorph zu einer endlich erzeugten Untergruppe der rationalen Zahlen. Nach Aufgabe 44.5 ist  $H$  zyklisch, sagen wir  $H = \mathbb{Z}\alpha$  mit einem eindeutig bestimmten Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Dann ist die Gruppe  $G$  als Bild von  $H$  ebenfalls zyklisch.  $\square$

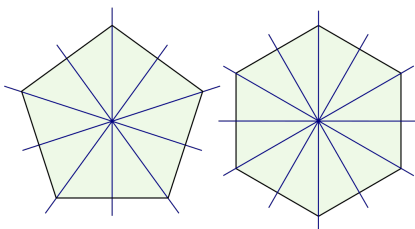
<sup>11</sup>Das ist also der Schwerpunkt der beteiligten Punkte.

Der eindeutig bestimmte Winkel ist dabei  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ , wobei  $n$  die Gruppenordnung von  $G$  ist. Die Gruppe besteht aus den Drehmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\left(2\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(2\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(2\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(2\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \dots,$$

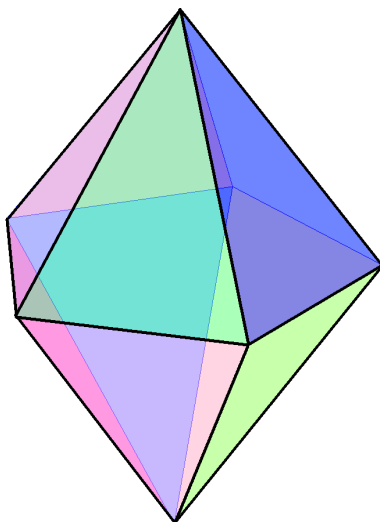
$$\begin{pmatrix} \cos\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

Wenn man auch noch uneigentliche Symmetrien zulässt, so gibt es noch eine weitere Familie von endlichen Untergruppen der  $O_2$ , nämlich die Diedergruppen.



**Definition 50.5.** Zu einem regelmäßigen  $n$ -Eck ( $n \geq 2$ ) heißt die Gruppe der (eigentlichen oder uneigentlichen) linearen Symmetrien die *Diedergruppe*  $D_n$ .

Die Diedergruppe besteht aus den Drehungen des  $n$ -Ecks und aus den Achsenspiegelungen an den folgenden Achsen durch den Nullpunkt: bei  $n$  gerade die Achsen durch gegenüberliegende Eckpunkte und gegenüberliegende Kantenmittelpunkte, bei  $n$  ungerade die Achsen durch einen Eckpunkt und einen gegenüberliegenden Kantenmittelpunkt. In beiden Fällen besteht die Diedergruppe aus  $2n$  Elementen.

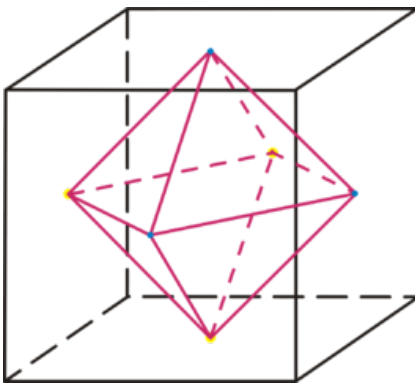


Im Raum lassen sich die Diedergruppen als eigentliche Symmetriegruppen einer Doppelpyramide über einem regelmäßigen  $n$ -Eck realisieren.

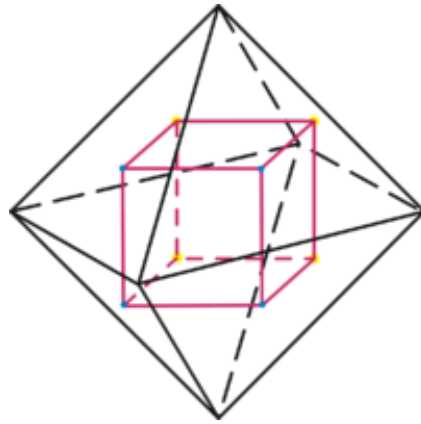
### HALBACHSENSYSTEME

Wir betrachten nun die dreidimensionale Situation.

Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien. Jedes Element  $g \in G$ ,  $g \neq \text{id}$ , ist nach Satz 34.8 eine Drehung um eine eindeutig bestimmte Drehachse  $A$ . Insbesondere sind an einer endlichen Symmetriegruppe nur endlich viele Drehachsen beteiligt. Jedes Gruppenelement bewirkt dann eine Permutation der Drehachsenmenge, und diese Bedingung schränkt die möglichen Gruppen wesentlich ein. Eine Drehachse zerfällt in zwei Halbachsen, und es ist sinnvoll, die Wirkungsweise der Gruppe auf diesen Halbachsen zu untersuchen.



Würfel und Oktaeder besitzen



isomorphe Symmetriegruppen.

Bei einem Würfel gibt es drei verschiedene Arten von Drehachsen: Es gibt drei Drehachsen, die durch die Seitenmittelpunkte gegeben sind, vier Drehachsen, die durch die Eckpunkte gegeben sind und sechs Drehachsen, die durch die Kantenmittelpunkte gegeben sind. Betrachtet man alle *Durchstoßungspunkte* dieser Achsen mit der Sphäre vom Radius 1, so ergeben sich  $6 + 8 + 12 = 26$  Punkte. Diese Punkte entsprechen den *Halbachsen*. Dabei gibt es zu je zwei Eckpunkten (bzw. den zugehörigen Durchstoßungspunkten) (mindestens) eine Würfelbewegung, die sie ineinander überführt, ebenso zu je zwei Kantenmittelpunkten und zu je zwei Seitenmittelpunkten. Jede Bewegung permutiert diese charakteristischen Punkte. Wenn man eine Achse (oder einen Durchstoßungspunkt) fixiert, so kann man die Menge der Bewegungen betrachten, die diese Achse als Drehachse haben. Es kann natürlich auch die Achse zwar auf sich selbst abgebildet werden, aber nicht fix sein. Dann werden die gegenüberliegenden Durchstoßungspunkte ineinander überführt.

**Definition 50.6.** Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien im  $\mathbb{R}^3$ . Dann nennt man jede Gerade durch den Nullpunkt, die als Drehachse eines Elementes  $g \neq \text{Id}$  auftritt, eine *Achse* von  $G$ . Die Halbgeraden dieser Drehachsen nennt man die *Halbachsen* der Gruppe und die Gesamtmenge dieser Halbachsen nennen wir das zu  $G$  gehörige *Halbachsensystem*. Es wird mit  $\mathfrak{H}(G)$  bezeichnet. Zwei Halbachsen  $H_1, H_2 \in \mathfrak{H}(G)$  heißen *äquivalent*, wenn es ein  $g \in G$  mit  $g(H_1) = H_2$  gibt. Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation nennt man *Halbachsenklassen*.

Da jede von  $\text{Id}$  verschiedene Drehung genau eine Drehachse hat, ist das Halbachsensystem zu einer endlichen Symmetriegruppe endlich (und zwar ist die Anzahl maximal gleich  $2(\text{ord}(G) - 1)$ ). Wenn  $H$  eine Halbachse ist und  $g \in G$ , so ist auch  $g(H)$  eine Halbachse: wenn nämlich  $h \in G$  die durch  $H$  definierte Achse als Drehachse besitzt, so ist

$$(ghg^{-1})(g(H)) = (gh)(g^{-1}(g(H))) = (gh)(H) = g(h(H)) = g(H).$$

Mit „äquivalenten Halbachsen“ ist also wirklich eine Äquivalenzrelation definiert.

**Beispiel 50.7.** Beim Würfel werden die Halbachsen durch die Eckpunkte, die Seitenmittelpunkte und die Kantenmittelpunkte repräsentiert. Diese drei Arten bilden dann auch die Äquivalenzklassen, also die Halbachsenklassen. Der Vergleich mit dem Oktaeder zeigt, dass die Sprechweise mit den Halbachsen für die Bewegungsgruppe als solche angemessener ist als die Sprechweise mit Ecken, Kanten, Mittelpunkten.

**Beispiel 50.8.** Bei einem Tetraeder gibt es vier Eck-Seitenmittelpunkt-Achsen und vier Kantenmittelpunktachsen. Die Kantenmittelpunkthalbachsen sind dabei alle untereinander äquivalent, während die zuerst genannten Achsen in zwei Halbachsenklassen zerfallen, nämlich die Eckhalbachsen und die Seitenhalbachsen.

An diesem Beispiel sieht man auch, dass die beiden durch eine Drehachse gegebenen Halbachsen nicht zueinander äquivalent sein müssen.

#### DIE ISOTROPIEGRUPPE

**Lemma 50.9.** *Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$ . Zu einer Halbachse  $H$  von  $G$  sei*

$$G_H = \{g \in G \mid g(H) = H\}.$$

*Dann sind für zwei äquivalente Halbachsen  $H_1$  und  $H_2$  die Gruppen  $G_{H_1}$  und  $G_{H_2}$  isomorph. Insbesondere besitzen sie die gleiche Ordnung.*

*Beweis.* Es sei  $g(H_1) = H_2$ , was es gibt, da die beiden Halbachsen nach Voraussetzung äquivalent sind. Dann hat man aber sofort den Gruppenisomorphismus

$$G_{H_1} \longrightarrow G_{H_2}, f \longmapsto g \circ f \circ g^{-1}.$$

Wegen

$$(gfg^{-1})(H_2) = gf(g^{-1}(H_2)) = gf(H_1) = g(H_1) = H_2$$

führt dieser innere Automorphismus von  $G$  in der Tat die beiden Gruppen ineinander über.  $\square$

Bei  $G_H$  handelt es sich trivialerweise um eine Untergruppe von  $G$ . Man nennt sie die *Isotropiegruppe* zur Halbachse  $H$ . Das Lemma besagt also, dass äquivalente Halbachsen isomorphe Isotropiegruppen besitzen. Wenn  $n = \#(G)$  ist und  $H$  eine Halbachse in der Halbachsenklasse  $K$ , und die Untergruppe  $G_H$   $k$  Elemente besitzt, so gibt es in  $K$  genau  $n/k$  verschiedene Halbachsen. Die fixierte Halbachse  $H$  definiert nämlich eine surjektive Abbildung

$$G \longrightarrow K, f \longmapsto f(H).$$

Dabei geht  $f \in G_H$  auf  $H$ , und ebenso gibt es für jede Halbachse  $H' \in K$  genau  $k$  Urbilder.

## 50. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 50.1.** Bestimme die Symmetriegruppe und die eigentliche Symmetriegruppe der Standardvektoren  $\{e_1, e_2, e_3\}$  im  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 50.2.** Zeige, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Konfiguration  $T$  aus  $n$  Punkten im  $\mathbb{R}^3$  derart gibt, dass die eigentliche Symmetriegruppe von  $T$  unendlich ist.

**Aufgabe 50.3.** Es sei  $T$  eine Konfiguration aus endlich vielen Punkten im  $\mathbb{R}^3$ , die nicht alle kollinear sind. Zeige, dass die eigentliche Symmetriegruppe von  $T$  endlich ist.

**Aufgabe 50.4.** Man gebe ein Beispiel für eine zweielementige Menge  $T \subseteq \mathbb{R}^3$ , deren eigentliche Symmetriegruppe trivial ist.

**Aufgabe 50.5.** Bestimme die Symmetriegruppe und die eigentliche Symmetriegruppe zu einer Geraden  $G \subset \mathbb{R}^3$  durch den Nullpunkt.

**Aufgabe 50.6.** Bestimme die Symmetriegruppe und die eigentliche Symmetriegruppe zu einer Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  durch den Nullpunkt.

**Aufgabe 50.7.** Es seien

$$S \subseteq T \subseteq \mathbb{R}^3$$

Teilmengen mit den zugehörigen eigentlichen Symmetriegruppen  $H$  und  $G$ . Zeige, dass es im Allgemeinen keine Inklusionsbeziehung zwischen diesen Gruppen gibt.

**Aufgabe 50.8.** Es sei  $A_n$  eine alternierende Gruppe mit  $n \geq 4$ . Zeige, dass  $A_n$  nicht kommutativ ist.

**Aufgabe 50.9.** Es sei  $E$  ein regelmäßiges  $n$ -Eck im  $\mathbb{R}^2$  mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit  $(1, 0)$  als einem Eckpunkt. Bestimme die Matrizen, die die uneigentlichen Symmetrien von  $E$  bezüglich der Standardbasis beschreiben.

**Aufgabe 50.10.** Es sei  $G \subseteq O_3(\mathbb{R})$  eine endliche Gruppe und  $H = G \cap SO_3(\mathbb{R})$ . Zeige, dass  $H = G$  oder aber die Anzahl von  $H$  die Hälfte der Anzahl von  $G$  ist.

**Aufgabe 50.11.** Es sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Definiere einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_{n+1}(\mathbb{R})$$

von der Gruppe der Isometrien auf dem  $\mathbb{R}^n$  in die Gruppe der eigentlichen Isometrien auf dem  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Die nächsten Aufgaben verwenden die sogenannte *Kleinsche Vierergruppe*. Dies ist einfach die Produktgruppe  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ .

**Aufgabe 50.12.** Zeige, dass die Kleinsche Vierergruppe zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe  $S_4$  isomorph ist. Wie sieht eine Realisierung als Untergruppe der Würfelgruppe aus?

**Aufgabe 50.13.** Zeige, dass die Diedergruppe  $D_2$  isomorph zur Kleinschen Vierergruppe ist.

**Aufgabe 50.14.** Zeige, dass die Diedergruppe  $D_3$  isomorph zur Permutationsgruppe  $S_3$  ist.

**Aufgabe 50.15.** Betrachte die Doppelpyramide der Höhe 5 über dem Quadrat mit den Eckpunkten  $(\pm 1, \pm 1)$ . Wie nennt man die eigentliche Symmetriegruppe dieses Objektes? Bestimme die Matrizen bezüglich der Standardbasis, die die eigentlichen Symmetrien der Doppelpyramide beschreiben.

**Aufgabe 50.16.** Zeige, dass die Diedergruppen  $D_n$ ,  $n \geq 3$ , nicht kommutativ sind.

**Aufgabe 50.17.** Es sei  $W$  die Gruppe der eigentlichen Bewegungen an einem Würfel. Man gebe eine möglichst lange Kette von sukzessiven Untergruppen

$$\{\text{id}\} \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = W$$

an derart, dass zwischen  $G_i$  und  $G_{i+1}$  keine weitere Untergruppe liegen kann.

**Aufgabe 50.18.** Bestimme die eigentliche Symmetriegruppe des Achsenkreuzes im  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 50.19.** Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe. Zeige, dass die Isotropiegruppe zu einer Halbachse aus dem Halbachsensystem zu  $G$  zyklisch ist.

**Aufgabe 50.20.** Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  die eigentliche Symmetriegruppe des achsenparallelen Würfels. Man gebe explizite (in Matrixbeschreibung) innere Automorphismen der Würfelgruppe an, die die folgenden Isotropiegruppen zu Achsen ineinander überführen. Welche Matrizen entsprechen dabei welchen Matrizen?

(a) Die Isotropiegruppe zur  $x$ -Achse und zur  $z$ -Achse.

(b) Die Isotropiegruppe zur Raumdiagonalen  $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und zur Raumdiagonalen  $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(c) Die Isotropiegruppe zur Kantenmittelpunktsachse  $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und zur Kantenmittelpunktsachse  $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 50.21.** Es sei  $\mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper (mit  $q$  Elementen). Bestimme die Anzahl der Elemente in

$$\text{GL}_n(\mathbb{F}_q).$$

Die folgenden Aufgaben verwenden das Zentrum einer Gruppe.

Es sei  $G$  eine Gruppe. Das *Zentrum*  $Z = Z(G)$  von  $G$  ist die Teilmenge

$$Z = \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

**Aufgabe 50.22.** Es sei  $G$  eine Gruppe. Zeige, dass das Zentrum  $Z(G)$  eine Untergruppe von  $G$  ist.

**Aufgabe 50.23.** Es sei  $G$  eine Gruppe. Zeige, dass das Zentrum  $Z \subseteq G$  ein Normalteiler in  $G$  ist. Man bringe das Zentrum in Zusammenhang mit dem Gruppenhomomorphismus

$$\kappa: G \longrightarrow \text{Aut}(G), g \longmapsto \kappa_g.$$

Was ist das Bild von diesem Homomorphismus, und was besagen die Homomorphiesätze in dieser Situation?

**Aufgabe 50.24.** Führe folgendes Gedankenexperiment durch: Gegeben sei eine Kugeloberfläche aus Metall und  $n$  gleiche Teilchen mit der gleichen positiven Ladung. Die Teilchen stoßen sich also ab. Diese Teilchen werden auf die Kugeloberfläche gebracht, wobei sie sich nach wie vor gegenseitig abstoßen, aber auf der Kugel bleiben. Welche Konfiguration nehmen die Teilchen ein? Müsste sich nicht „aus physikalischen Gründen“ eine „gleichverteilte“ Konfiguration ergeben, in der alle Teilchen gleichberechtigt sind? Müsste es nicht zu je zwei Teilchen  $P, Q$  eine Kugelbewegung geben, die eine Symmetrie der Konfiguration ist und die  $P$  in  $Q$  überführt?

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 50.25.** (2 Punkte)

Betrachte die Wirkung der Tetraedergruppe auf den vier Eckpunkten eines Tetraeders. Zeige, dass dies eine Isomorphie zwischen der Tetraedergruppe und der alternierenden Gruppe  $A_4$  ergibt.

**Aufgabe 50.26.** (3 Punkte)

Betrachte ein regelmäßiges  $n$ -Eck und die zugehörige Gruppe der (eigentlichen und uneigentlichen) Symmetrien, also die Diedergruppe  $D_n$ . Beschreibe  $D_n$  als Untergruppe der Permutationsgruppe  $S_n$ . Durch welche Permutationen wird sie erzeugt? Für welche  $n$  handelt es sich um eine Untergruppe der alternierenden Gruppe?

**Aufgabe 50.27.** (2 Punkte)

Es sei  $G \subseteq O_2$  eine endliche Untergruppe der (uneigentlichen) Bewegungsgruppe der reellen Ebene, und sei  $G \not\subseteq SO_2$ . Zeige, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathbb{Z}/(2)$$

gibt, dessen Kern eine zyklische Gruppe ist. Schließe, dass die Ordnung von  $G$  gerade ist.

**Aufgabe 50.28.** (3 Punkte)

Es sei  $G$  eine Gruppe mit Zentrum  $Z(G)$ . Zeige:

- (a)  $G$  ist genau dann abelsch, wenn  $G/Z(G)$  zyklisch ist.
- (b) Der Index von  $Z(G)$  in  $G$  ist keine Primzahl.
- (c) Ist  $G$  von der Ordnung  $pq$  für zwei Primzahlen  $p$  und  $q$ , so ist  $G$  abelsch oder  $Z(G)$  trivial.

## AUFGABE ZUM HOCHLADEN

Für die folgende Aufgabe gibt es keinen festen Abgabetermin. Sie gilt so lange, bis eine befriedigende Lösung auf Commons hochgeladen wurde.

**Aufgabe 50.29.** (10 Punkte)

Man schreibe eine Computeranimation, die zeigt, wie sich fünf auf einer Kugeloberfläche platzierte Teilchen mit der gleichen positiven Ladung aufgrund ihrer gegenseitigen Abstoßung bewegen (wobei sie aber auf der Kugeloberfläche bleiben), und welche Endposition (?) sie einnehmen.

## 51. VORLESUNG - ENDLICHE SYMMETRIEGRUPPEN II

## NUMERISCHE BEDINGUNGEN FÜR ENDLICHE SYMMETRIEGRUPPEN IM RAUM

**Lemma 51.1.** *Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Ordnung  $n$  in der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$ . Es seien  $K_1, \dots, K_m$  die verschiedenen Halbachsenklassen zu  $G$ , und zu jeder dieser Klassen sei  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , die Ordnung der Gruppe  $G_H$ ,  $H \in K_i$ , die nach Lemma 50.9 unabhängig von  $H \in K_i$  ist. Dann ist*

$$2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_i}\right).$$

*Beweis.* Für zwei gegenüberliegende Halbachsen  $H$  und  $-H$  gilt  $G_H = G_{-H}$ . Dagegen gilt für zwei Halbachsen  $H_1$  und  $H_2$ , die nicht zur gleichen Achse gehören (also insbesondere verschieden sind), die Beziehung  $G_{H_1} \cap G_{H_2} = \text{Id}$ , da eine Isometrie mit zwei Fixachsen die Identität sein muss. Da  $G$  die Vereinigung aller  $G_H$ ,  $H \in \mathfrak{H}(G)$ , ist, liegt eine Vereinigung

$$G \setminus \{\text{Id}\} = \bigcup_{H \in \mathfrak{H}(G)} (G_H \setminus \{\text{Id}\})$$

vor, wobei rechts jedes Gruppenelement  $g \neq \text{Id}$  genau zweimal vorkommt. Daher ist

$$2(n-1) = \sum_{H \in \mathfrak{H}(G)} (\text{ord}(G_H) - 1).$$

Die Halbachsenklasse  $K_i$  enthält  $n/n_i$  Elemente. Daher ist

$$2(n-1) = \sum_{H \in \mathfrak{H}(G)} (\text{ord}(G_H) - 1) = \sum_{i=1}^m \sum_{H \in K_i} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^m \frac{n}{n_i} (n_i - 1).$$

Mittels Division durch  $n$  ergibt sich die Behauptung.  $\square$

**Lemma 51.2.** *Die numerische Gleichung*

$$2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

mit  $n \geq 2$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und mit  $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m \leq n$  besitzt folgende ganzzahlige Lösungen.

- (1)  $m = 2$  und  $n = n_1 = n_2$ .
- (2) Bei  $m = 3$  gibt es die Möglichkeiten
  - (a)  $n_1 = n_2 = 2$  und  $n = 2n_3$ ,
  - (b)  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = n_3 = 3$  und  $n = 12$ ,
  - (c)  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 4$ , und  $n = 24$ ,
  - (d)  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 5$ , und  $n = 60$ .

*Beweis.* Bei  $m = 0$  ist die rechte Seite 0 und daher folgt  $n = 1 < 2$  aus der linken Seite. Bei  $m = 1$  muss  $n_1 = \frac{n}{-n+2}$  gelten, was bei  $n \geq 2$  keine Lösung besitzt. Bei  $m = 2$  erhält man die Bedingung  $\frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$ , woraus sich wegen  $n_1, n_2 \leq n$  nach Aufgabe 51.4  $n_1 = n_2 = n$  ergibt. Bei  $m = 3$  schreibt sich die Bedingung als

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

mit  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ . Die linke Seite ist  $> 1$ . Daher muss wegen  $n_i \geq 2$  mindestens eines der  $n_i = 2$  sein. Es sei also  $n_1 = 2$ . Bei  $n_2 = 2$  gibt es genau die Lösung  $n = 2n_3$  mit beliebigem  $n_3 \geq 2$ . Es sei also  $n_2 \geq 3$ . Bei  $n_2 = 4$  wäre die rechte Seite wieder  $\leq 1$ , sodass  $n_2 = 3$  gelten muss. Der Wert  $n_3 = 3$  führt zur Lösung  $n = 12$ , der Wert  $n_3 = 4$  führt zur Lösung  $n = 24$  und der Wert  $n_3 = 5$  führt zur Lösung  $n = 60$ . Bei  $n_3 \geq 6$  wird die rechte Seite wieder  $\leq 1$ , sodass es keine weitere Lösung gibt. Bei  $m \geq 4$  hat man eine Bedingung der Form

$$m - 2 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \dots + \frac{1}{n_m},$$

die keine Lösung besitzt, da die rechte Seite  $\leq m - 2$  ist, da die ersten vier Summanden maximal 2 ergeben und die weiteren durch  $m - 4$  abgeschätzt werden können.  $\square$



Plato (427-347 v. C.) sagte: „die Bedeutung der Geometrie beruht nicht auf ihrem praktischen Nutzen, sondern darauf, daß sie ewige und unwandelbare Gegenstände untersucht und danach strebt, die Seele zur Wahrheit zu erheben“.

Das letzte Lemma enthält die entscheidenden numerischen Bedingungen, wie eine endliche Symmetriegruppe im  $\mathbb{R}^3$  aussehen kann. Wenn man von der trivialen Gruppe absieht, bei der  $m = 0$  gilt, so erfasst dieses Lemma alle endlichen Gruppen. Das Tupel bestehend aus den zwei bzw. drei Ordnungen der Isotropiegruppen nennt man auch den numerischen *Typ* der Symmetriegruppe. Jede der angegebenen Bedingungen lässt sich im Wesentlichen eindeutig durch eine endliche Symmetriegruppe realisieren. Das geometrische Objekt ist aber nicht eindeutig bestimmt, wie schon das „duale Paar“ Würfel und Oktaeder zeigt.

**Lemma 51.3.** *Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Ordnung  $n$  der Gruppe der eigentlichen linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  mit zwei verschiedenen Halbachsenklassen zu  $G$ . Dann ist  $G$  die zyklische Gruppe der Drehungen zu den Vielfachen des Winkels  $2\pi/n$  um eine einzige fixierte Drehachse.*

*Beweis.* Aufgrund von Lemma 51.1 und Lemma 51.2 muss  $n = n_1 = n_2$  sein und jede Halbachsenklasse enthält nur eine Halbachse. Daher gibt es überhaupt nur eine Drehachse und diese Bewegungsgruppe ist nach Lemma 34.1 isomorph zu einer Bewegungsgruppe in der senkrechten Ebene, also nach Satz 50.4 isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung  $n$ .  $\square$

In diesem Fall gibt es also zwei Halbachsenklassen, die jeweils aus nur einer Halbachse bestehen.

**Lemma 51.4.** *Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  vom Typ  $(2, 2, k)$ . Dann ist  $G$  isomorph zur Diedergruppe  $D_k$ .*

*Beweis.* Es gibt drei Halbachsenklassen  $K_1, K_2, K_3$ , und zwar zwei mit der Ordnung 2 (und je  $k$  Halbachsen in der Klasse) und eine mit der Ordnung  $k$  und zwei Halbachsen (die Anzahlen der Halbachsen folgen mit  $n_1 = n_2 = 2$  aus Lemma 51.2). Bei  $k \geq 3$  müssen die beiden Halbachsen aus der dritten Klasse eine Gerade bilden, da ja die gegenüberliegende Halbachse die gleiche Ordnung besitzt, und bei  $k = 2$  muss jede Halbachse zu ihrem Gegenüber äquivalent sein. Wir bezeichnen die Achse zu  $K_3$  mit  $A_3$ . Jedes Gruppenelement mit einer anderen Drehachse muss die beiden Halbachsen aus  $K_3$  ineinander überführen, sodass alle anderen Achsen senkrecht zu  $A_3$  stehen. Es sei  $g$  eine erzeugende Drehung um  $A_3$ . Zu einer Halbachse  $H_1$  aus  $K_1$  sind die

$$g^i(H_1), i = 0, \dots, k-1,$$

genau alle Halbachsen aus  $K_1$ . Diese (bzw. die Punkte darauf mit der Norm 1) bilden ein regelmäßiges  $k$ -Eck in der zu  $A_3$  senkrechten Ebene. Entsprechendes gilt für  $g^i(H_2)$  mit  $H_2 \in K_2$ . Jede Halbdrehung um eine der Achsen aus  $K_1$  überführt die Halbachsen aus  $K_2$  in ebensolche. Daher liefern die Halbachsen aus  $K_2$  eine „Halbierung“ des  $k$ -Ecks. Somit handelt es sich insgesamt um die (uneigentliche) Symmetriegruppe eines regelmäßigen  $k$ -Ecks oder um die eigentliche Symmetriegruppe der Doppelpyramide über einem regelmäßigen  $k$ -Eck, d.h. um eine Diedergruppe  $D_k$ .  $\square$

In diesem Fall bestehen die beiden Halbachsenklassen der Ordnung zwei einerseits aus den Eckpunkten (oder Eckhalbachsen) und andererseits aus den Seitenmittelpunkten (oder Seitenmittelhalbachsen) des zugrundeliegenden regelmäßigen  $n/2$ -Ecks. Bei  $n/2$  gerade sind gegenüberliegende Halbachsen äquivalent, bei  $n/2$  ungerade nicht. Bei  $n = 4$  ist die Diedergruppe (also  $D_2$ ) kommutativ und isomorph zur Kleinschen Vierergruppe.

**Lemma 51.5.** *Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  mit einer fixierten Halbachsenklasse  $K$ . Dann ist die Abbildung*

$$G \longrightarrow \text{Perm}(K), g \longmapsto \sigma_g : H \mapsto g(H),$$

*ein Gruppenhomomorphismus.*

*Beweis.* Nach der Definition von Halbachsenklasse ist mit  $H \in K$  auch  $g(H) \in K$  für alle  $g \in G$ . Daher ist die Abbildung  $\sigma$  wohldefiniert. Seien  $f, g \in G$ . Dann ist sofort

$$\sigma_{g \circ f}(H) = (g \circ f)(H) = g(f(H)) = g(\sigma_f(H)) = \sigma_g(\sigma_f(H)) = (\sigma_g \circ \sigma_f)(H).$$

$\square$

**Lemma 51.6.** *Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  vom Typ  $(2, 3, 3)$ . Dann ist  $G$  die Tetraedergruppe und damit isomorph zur alternierenden Gruppe  $A_4$ .*

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es drei Halbachsenklassen der Ordnung 2, 3 und 3, ihre Elementanzahl ist daher 6, 4 und 4. Betrachten wir eine Halbachsenklasse  $K$  der Ordnung 3 mit ihren vier äquivalenten Halbachsen und den zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \text{Perm}(K), g \longmapsto \sigma_g.$$

Sei  $g \in G$  eine Dritteldrehung um eine Halbachse  $H \in K$ . Sie lässt  $H$  fest und bewirkt eine Permutation der drei anderen Halbachsen in der Klasse. Diese Permutation kann nicht die Identität sein, da sonst  $g$  mindestens zwei Achsen fest ließe und damit  $g$  die (Raum)-Identität wäre. Da  $g$  die Ordnung 3 besitzt, muss diese Permutation ein Dreierzykel sein. Insbesondere gehören die vier Halbachsen zu verschiedenen Achsen, und die Doppeldrehung  $g^2$  bewirkt den anderen Dreierzykel. Da man diese Überlegung mit jeder der vier Halbachsen aus  $K$  anstellen kann, sieht man, dass  $G$  sämtliche Dreierzykel der Permutationsgruppe der vier Halbachsen bewirkt. Das Bild des Gruppenhomomorphismus ist daher genau die alternierende Gruppe  $A_4$  und damit ist  $G \cong A_4$ . Diese ist nach Aufgabe 50.25 isomorph zur Tetraedergruppe.  $\square$

In der vorstehenden Aussage kann man auch direkt erkennen, dass es sich um eine Tetraedergruppe handeln muss. Dazu markieren wir auf jeder der vier Halbachsen den Punkt mit dem Abstand 1 zum Nullpunkt. Aus dem Beweis des Lemmas folgt, dass je zwei solche Punkte den gleichen Abstand voneinander haben (und dass die Winkel der Halbachsen zueinander alle gleich sind). Daher bilden diese vier Punkte die Eckpunkte eines Tetraeders. Die gegenüberliegenden Halbachsen entsprechen den Seitenmittelpunkten der Tetraederflächen. Die Halbachsen der Ordnung zwei entsprechen den Kantenmittelpunkten.

**Lemma 51.7.** *Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  vom Typ  $(2, 3, 4)$ . Dann ist  $G$  isomorph zur Permutationsgruppe  $S_4$  und zur Würfelgruppe.*

*Beweis.* Wir betrachten die Halbachsenklasse  $K_2$  der Ordnung 3, die also 8 zueinander äquivalente Halbachsen besitzt. Zu einer solchen Halbachse  $H$  muss die entgegengesetzte Halbachse ebenfalls in einer der Halbachsenklassen liegen, und zwar in einer mit der gleichen Ordnung. Daher gehört auch  $-H$  zu  $K_2$ , sodass an  $K_2$  insgesamt vier Achsen beteiligt sind. Die Menge dieser Achsen nennen wir  $\mathfrak{A}$ . Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \text{Perm}(\mathfrak{A}), g \longmapsto (\sigma_g : A \mapsto g(A)).$$

Hier wird also nur geschaut, was mit den Achsen passiert, nicht, was mit den Halbachsen passiert. Es können nicht drei dieser vier Achsen in einer Ebene

liegen. Wären nämlich  $A_1, A_2, A_3 \subseteq E$ , so würde eine Drittdrehung  $f$  um  $A_1$  die äquivalenten Achsen  $f(A_2)$  und  $f(A_3)$  hervorbringen, die aber nicht in der Ebene  $E$  liegen können und die nicht beide gleich  $A_4$  sein können. Das Element  $g \in G$  habe die Eigenschaft, dass  $\sigma_g$  die Identität ist, dass also alle Geraden  $A \in \mathfrak{A}$  auf sich abgebildet werden. Nach Aufgabe 51.15 muss  $g$  die Identität sein. Der Gruppenhomomorphismus ist also nach dem Kernkriterium injektiv und daher muss eine Isomorphie vorliegen. Da man diese Überlegung insbesondere für die Würfelgruppe durchführen kann, ergibt sich auch die Isomorphie zwischen der Würfelgruppe und der Permutationsgruppe  $S_4$ .  $\square$

Mit einem ähnlichen, aber aufwändigeren Argument kann man zeigen, dass die verbleibende numerische Möglichkeit, also eine Gruppe mit 60 Elementen und mit den Drehordnungen 2, 3 und 5 wieder nur von einem Isomorphietyp realisiert wird, nämlich von der alternierenden Gruppe  $A_5$ , die zugleich isomorph zur Dodekaedergruppe und zur Ikosaedergruppe ist.

Insgesamt haben wir (bis auf den Ikosaederfall) den folgenden Hauptsatz über endliche (eigentliche) Symmetriegruppen im Raum bewiesen.

**Satz 51.8.** *Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist  $G$  eine der folgenden Gruppen.*

- (1) Eine zyklische Gruppe  $\mathbb{Z}/(n)$ ,  $n \geq 1$ ,
- (2) Eine Diedergruppe  $D_k$ ,  $k \geq 2$ ,
- (3) Die Tetraedergruppe  $A_4$ ,
- (4) Die Würfelgruppe  $S_4$ ,
- (5) Die Ikosaedergruppe  $A_5$ .

## 51. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 51.1.** Betrachte den Beweis zu Lemma 51.1 mit der dortigen Notation. Begründe die folgenden Aussagen.

- (a) Eine eigentliche Isometrie mit zwei Fixachsen ist die Identität.
- (b)  $G$  ist die Vereinigung aller  $G_H$ .
- (c) Es sei  $g \neq \text{Id}$ . Das Element  $g$  kommt in genau zwei der  $G_H$  vor. In welchen?
- (d) Die Halbachsenklasse  $K_i$  enthält  $n/n_i$  Elemente.

**Aufgabe 51.2.** Überprüfe die Formel

$$2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

von Lemma 51.1 für den Oktaeder, den Dodekaeder und den Ikosaeder.

**Aufgabe 51.3.** Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$ , die nur eine Halbachsenklasse  $K$  besitze. Welche numerische Beziehung würde zwischen  $\#(G)$ ,  $\#(K)$  und  $\#(G_H)$  ( $H \in K$ ) bestehen? Folgere, dass es eine solche Symmetriegruppe nicht geben kann.

**Aufgabe 51.4.** Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

in  $\mathbb{N}$  bei  $a, b \leq n$  nur die Lösungen  $n = a = b$  besitzt.

**Aufgabe 51.5.** Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

in  $\mathbb{N}$  auch Lösungen  $a \neq b$  besitzt.

**Aufgabe 51.6.** Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  mit einer fixierten Halbachsenklasse  $K$ . Bestimme den Kern des Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \text{Perm}(K), g \longmapsto \sigma_g : H \mapsto g(H).$$

**Aufgabe 51.7.** Es sei  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  mit drei Halbachsenklassen und es sei  $K$  eine davon. Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \text{Perm}(K), g \longmapsto \sigma_g : H \mapsto g(H),$$

injektiv ist. Zeige, dass dies nicht stimmt, wenn es nur zwei Halbachsenklassen gibt.

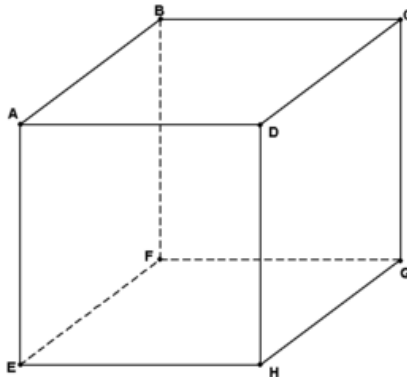
**Aufgabe 51.8.** Bestimme die Winkel zwischen den Halbachsen (der Symmetriegruppen) der platonischen Körper.

**Aufgabe 51.9.** Es seien zwei Halbachsen  $H_1$  und  $H_2$  im  $\mathbb{R}^3$  gegeben. Bestimme die Menge der Drehachsen und der Drehwinkel, die  $H_1$  in  $H_2$  überführen.

**Aufgabe 51.10.** Betrachte ein gleichseitiges Dreieck in der  $x, y$ -Ebene mit  $(0, 0)$  als Mittelpunkt und mit  $(1, 0)$  als einem der Eckpunkte. Betrachte darüber die Doppelpyramide  $D$  mit oberer Spitze  $(0, 0, 2)$  und unterer Spitze  $(0, 0, -2)$ .

- Bestimme die Matrizen und die Drehachsen der (eigentlichen) Bewegungen, die  $D$  in sich überführen
- Erstelle eine Verknüpfungstabelle für diese Bewegungen.
- Beschreibe, was unter diesen Bewegungen mit den drei Eckpunkten des zugrundeliegenden Dreiecks geschieht.

**Aufgabe 51.11.** Wir betrachten den Würfel.



Es sei  $\alpha$  diejenige Drehung am Würfel um die Achse durch die Eckpunkte  $A$  und  $G$ , die den Eckpunkt  $B$  auf  $D$  schickt, und es sei  $\beta$  die Halbdrehung um die vertikale Achse (also die Gerade, die durch den Mittelpunkt der Seitenfläche  $A, B, C, D$  und den Mittelpunkt der Seitenfläche  $E, F, G, H$  läuft).

- Man gebe die Wertetabellen für die Permutationen auf der Eckpunktmenge  $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ , die durch  $\alpha, \beta, \alpha\beta$  und  $\beta\alpha$  bewirkt werden.
- Bestimme die Drehachse von  $\alpha\beta$  und von  $\beta\alpha$  sowie die Ordnung dieser Drehungen.
- Man gebe die Zykeldarstellung der von  $\alpha^2$  bewirkten Permutation auf der Eckpunktmenge an. Was ist  $\alpha^{1001}$ ?
- Man betrachte die Permutation  $\sigma$ , die auf der Eckpunktmenge durch die Wertetabelle

$x$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
$\sigma(x)$	$B$	$C$	$D$	$A$	$G$	$H$	$E$	$F$

gegeben ist. Gibt es eine Drehung des Würfels, die diese Permutation bewirkt? Berechne das Signum von  $\sigma$ .

**Aufgabe 51.12.** Es sei  $G$  eine Gruppe,  $M$  eine Menge und

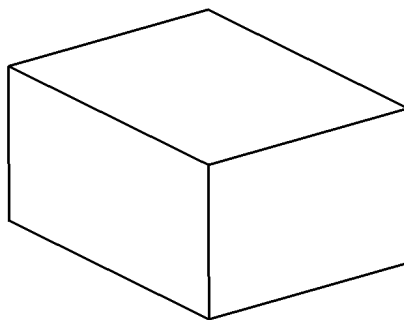
$$G \longrightarrow \text{Perm}(M), g \longmapsto \sigma_g,$$

ein Gruppenhomomorphismus in die Permutationsgruppe von  $M$ . Zeige, dass dies in natürlicher Weise einen Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \text{Perm}(\mathfrak{P}(M)), g \longmapsto (N \mapsto g(N)),$$

in die Permutationsgruppe der Potenzmenge induziert.

- Aufgabe 51.13.**
- (a) Zeige, dass die Gruppe  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$  nicht die eigentliche Symmetriegruppe einer Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^3$  ist.
  - (b) Zeige, dass man die Gruppe  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$  als Untergruppe der vollen Isometriegruppe  $O_3(\mathbb{R})$  realisieren kann.
  - (c) Betrachte die eigentliche Symmetriegruppe eines Quaders mit drei verschiedenen Seitenlängen. Bei ihm ist zu jeder Geraden durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte die Halbdrehung um diese Achse eine Symmetrie. Widerspricht dies nicht Teil (a)?



**Aufgabe 51.14.** Zeige, dass sich jede endliche Gruppe als Untergruppe der  $SO_n(\mathbb{R})$  realisieren lässt.

## AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 51.15.** (4 Punkte)

Es seien  $A_1, A_2, A_3$  und  $A_4$  vier Geraden im  $\mathbb{R}^3$  durch den Nullpunkt mit der Eigenschaft, dass keine drei davon in einer Ebene liegen. Es sei

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare, eigentliche Isometrie mit  $f(A_i) = A_i$  für  $i = 1, 2, 3, 4$ . Zeige, dass  $f$  die Identität ist. Man gebe ein Beispiel an, dass diese Aussage ohne die Ebenenbedingung nicht gilt.

**Aufgabe 51.16.** (6 Punkte)

Es seien  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  Drehungen um die  $x$ -Achse, die  $y$ -Achse und die  $z$ -Achse mit den Ordnungen  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  ( $\varphi_1$  ist also eine Drehung um den Winkel  $360/\ell_1$  Grad um die  $x$ -Achse, etc.). Es sei  $1 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3$ . Für welche Tupel  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$  ist die von diesen drei Drehungen erzeugte Gruppe endlich?

Tipp: Aufgabe 51.8.

**Aufgabe 51.17.** (3 Punkte)

Zeige: Keine der alternierenden Gruppen  $A_n$  besitzt eine Untergruppe vom Index zwei.

Tipp: Aufgabe 18.18.

**Aufgabe 51.18.** (4 Punkte)

Zeige, dass die Gruppe  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(4)$  nicht die eigentliche Symmetriegruppe einer Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^3$  ist.

## 52. VORLESUNG - ÄQUIVALENTE NORMEN

Auf dem  $\mathbb{R}^n$  gibt es sehr viele verschiedene Normen, allerdings hängen sehr viele wichtige Begriffe wie die Konvergenz einer Folge, die Kompaktheit einer Teilmenge, die Stetigkeit einer Abbildung gar nicht von der Norm ab, sondern nur von der Topologie. Daher kann man sich häufig eine für das Problem besonders angemessene Norm frei wählen und sich dadurch viel Arbeit sparen. In dieser Vorlesung besprechen wir die topologischen Grundlagen für diesen Zugang, wobei wir weitgehend auf Beweise verzichten, die sich in einem Anhang finden. In den nächsten beiden Vorlesungen werden wir diese Methoden insbesondere auf das Konvergenzverhalten von Potenzen einer Matrix anwenden.

## TEILMENGEN IN EINEM METRISCHEN RAUM

**Definition 52.1.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $x \in M$  und  $\epsilon > 0$  eine positive reelle Zahl. Es ist

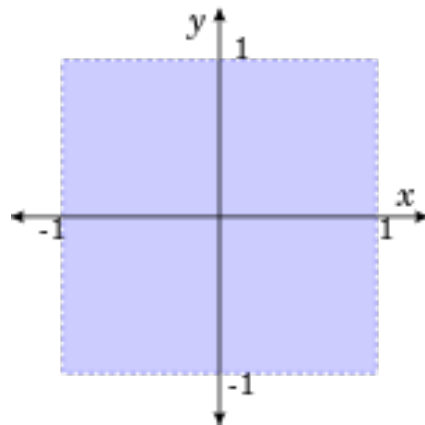
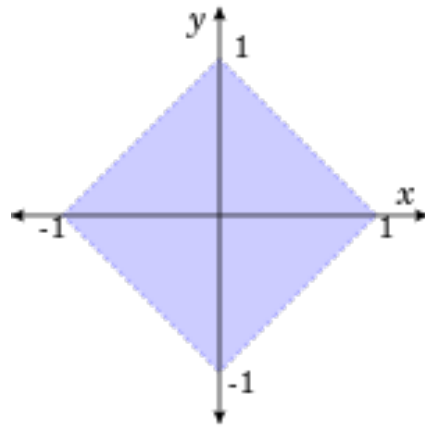
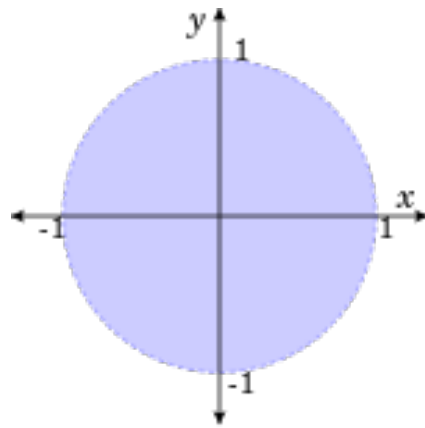
$$U(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

die *offene* und

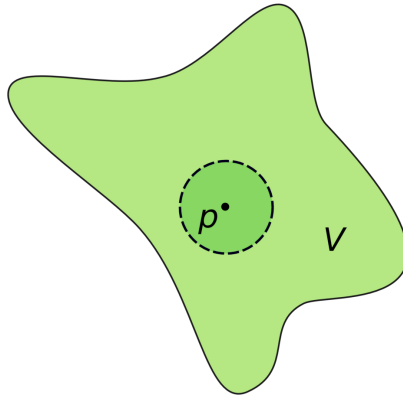
$$B(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$$

die *abgeschlossene*  $\epsilon$ -Kugel um  $x$ .

Natürlich müssen Kugeln nicht unbedingt kugelförmig aussehen, aber sie tun es in der euklidischen Norm. Für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $U(x, \epsilon)$  einfach das beidseitig offene Intervall  $]x - \epsilon, x + \epsilon[$  und  $B(x, \epsilon)$  ist einfach das beidseitig abgeschlossene Intervall  $[x - \epsilon, x + \epsilon]$ .



Die Gestalt der Kugelumgebungen hängt von der Norm bzw. Metrik ab.



Eine Teilmenge ist offen, wenn jeder Punkt darin gleich mit einer vollen Kugelumgebung drin liegt. Bei einer solchen Menge ist es entscheidend, ob die *Randpunkte* dazu gehören oder nicht.

**Definition 52.2.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subseteq M$  heißt *offen* (in  $(M, d)$ ), wenn für jedes  $x \in U$  ein  $\epsilon > 0$  mit

$$U(x, \epsilon) \subseteq U$$

existiert.

**Definition 52.3.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subseteq M$  heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement  $M \setminus A$  offen ist.

Achtung! Abgeschlossen ist nicht das „Gegenteil“ von offen. Die „allermeisten“ Teilmengen eines metrischen Raumes sind weder offen noch abgeschlossen, es gibt aber auch Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z.B. die leere Teilmenge und die Gesamtmenge. Offene Bälle sind in der Tat offen und abgeschlossene Bälle sind abgeschlossen, siehe Aufgabe 52.1 und Aufgabe 52.2.

**Lemma 52.4.** *Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und die Gesamtmenge  $M$  sind offen.
- (2) Es sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

- (3) Es sei  $I$  eine endliche Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 52.4. □

Die offenen Mengen in einem metrischen Raum bilden somit eine Topologie im Sinne der folgenden Definition.

**Definition 52.5.** Ein *topologischer Raum*  $(X, \mathcal{T})$  besteht aus einer Menge  $X$  zusammen mit einer Teilmenge  $\mathcal{T}$  der Potenzmenge von  $X$ , die folgende strukturelle Bedingungen erfüllt (die Teilmengen  $U \subseteq X$ , die zu  $\mathcal{T}$  gehören, nennt man *offene Mengen*).

- (1) Die leere Menge und die ganze Menge  $X$  sind offen (d.h. gehören zu  $\mathcal{T}$ ).
- (2) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist wieder offen, d.h. mit  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$  ist auch  $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$ .
- (3) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist wieder offen, d.h. mit  $U_i \in \mathcal{T}$  für jedes  $i \in I$  (zu einer beliebigen Indexmenge  $I$ ) ist auch  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

### ÄQUIVALENTE NORMEN

**Definition 52.6.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Zwei Normen  $\|-\|_1$  und  $\|-\|_2$  heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Topologie, also die gleichen offenen Mengen definieren.

**Beispiel 52.7.** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  sind die euklidische Norm, die Summennorm und die Maximumsnorm äquivalent. Es sei dazu  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor, wobei ohne Einschränkung  $x_1$  betragsmäßig der größte Eintrag sei. Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{\max} &= |x_1| \\
 &= \sqrt{x_1^2} \\
 &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\
 &\leq \sqrt{nx_1^2} \\
 &= \sqrt{n} |x_1| \\
 &= \sqrt{n} \|x\|_{\max}
 \end{aligned}$$

und diese ergeben im Wesentlichen die Äquivalenz von euklidischer Norm und Maximumsnorm.

Wir werden in Satz 52.16 sehen, dass auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum zwei Normen stets äquivalent sind. Dies bedarf einiger Vorbereitungen, die insbesondere den Begriff der Kompaktheit betreffen.

## KOMPAKTHEIT

**Definition 52.8.** Eine Teilmenge  $T \subseteq M$  eines metrischen Raumes  $M$  heißt *beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl  $b$  mit

$$d(x, y) \leq b \text{ für alle } x, y \in T$$

gibt.

**Definition 52.9.** Eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^m$  heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Die Beschränktheit und damit nach der vorstehenden Definition auch die Kompaktheit hängt wesentlich von der gewählten Metrik ab. Es ist wichtig, auch einen Kompaktheitsbegriff zu besitzen, der rein topologisch ist.

**Definition 52.10.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn es zu jeder offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ mit } U_i \text{ offen und einer beliebigen Indexmenge } I$$

eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$  derart gibt, dass

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

ist.

Der folgende Satz heißt *Satz von Heine-Borel*.

**Satz 52.11.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge, wobei der  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik versehen sei. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  *$T$  ist überdeckungskompakt.*
- (2) *Jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $T$  besitzt einen Häufungspunkt in  $T$ .*
- (3) *Jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $T$  besitzt eine in  $T$  konvergente Teilfolge.*
- (4)  *$T$  ist abgeschlossen und beschränkt.*

## STETIGE ABBILDUNGEN ZWISCHEN METRISCHEN RÄUMEN

Ein metrischer Raum ist dadurch ausgezeichnet, dass es in ihm eine Abstandsfunktion gibt, und dass dadurch zwei Punkte „näher“ zueinander liegen können als zwei andere Punkte. Bei einer Abbildung

$$f: L \longrightarrow M$$

zwischen zwei metrischen Räumen kann man sich fragen, inwiefern der Abstand im Werteraum  $M$  durch den Abstand im Definitionsraum  $L$  kontrollierbar ist. Sei  $x \in L$  und  $y = f(x)$  der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte  $x' \in L$ , die „nahe“ an  $x$  sind, auch die Bildpunkte  $f(x')$  nahe an  $f(x)$  sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben.

Dieses  $\epsilon$  repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“. Die Frage ist dann, ob man ein  $\delta > 0$  finden kann (eine „Startgenauigkeit“) mit der Eigenschaft, dass für alle  $x'$  mit  $d(x, x') \leq \delta$  die Beziehung  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

**Definition 52.12.** Es seien  $(L, d_1)$  und  $(M, d_2)$  metrische Räume,

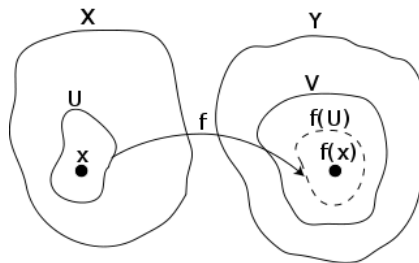
$$f: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung und  $x \in L$ . Die Abbildung  $f$  heißt *stetig in  $x$* , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart existiert, dass

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$$

gilt. Die Abbildung  $f$  heißt *stetig*, wenn sie stetig in  $x$  für jedes  $x \in L$  ist.

Statt mit den abgeschlossenen Ballumgebungen könnte man hier genauso gut mit den offenen Ballumgebungen arbeiten. Die einfachsten Beispiele für stetige Abbildungen sind konstante Abbildungen, die Identität eines metrischen Raumes und die Inklusion  $T \subseteq M$  einer mit der induzierten Metrik versehenen Teilmenge eines metrischen Raumes. Siehe dazu die Aufgaben.



**Satz 52.13.** *Es sei*

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1)  $f$  ist stetig in jedem Punkt  $x \in L$ .
- (2) Für jeden Punkt  $x \in L$  und jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass aus  $d(x, x') \leq \delta$  folgt, dass  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  ist.
- (3) Für jeden Punkt  $x \in L$  und jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ist auch die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit dem Grenzwert  $f(x)$ .
- (4) Für jede offene Menge  $V \subseteq M$  ist auch das Urbild  $f^{-1}(V)$  offen.

Die Eigenschaft (4) zeigt, dass es sich bei der Stetigkeit um eine rein topologische Eigenschaft handelt.

## LINEARE STETIGE ABBILDUNGEN

Eine lineare Abbildung ist im Allgemeinen nicht stetig. Allerdings gibt es eine relativ einfache Charakterisierung der Stetigkeit einer linearen Abbildung, man muss nämlich nur die Stetigkeit im Nullpunkt überprüfen. In Satz 52.17 ergibt sich, dass diese Eigenschaft bei endlichdimensionalen Vektorräumen stets erfüllt ist.

**Satz 52.14.** *Es seien  $V$  und  $W$  normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

- (1)  $\varphi$  ist stetig.
- (2)  $\varphi$  ist stetig im Nullpunkt.
- (3) Die Menge

$$\{\varphi(v) \mid v \in V, \|v\| = 1\}$$

*ist beschränkt.*

*Beweis.* Von (1) nach (2) ist klar. Von (2) nach (3). Es gibt insbesondere für  $\epsilon = 1$  ein  $\delta > 0$  derart, dass aus

$$\|v\| \leq \delta$$

die Abschätzung

$$\|\varphi(v)\| \leq 1$$

folgt. Aus

$$\|v\| \leq 1$$

folgt dann wegen der skalaren Verträglichkeit

$$\|\varphi(v)\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Von (3) nach (1). Es sei  $C$  eine obere Schranke für die Norm der Werte auf der Einssphäre. Sei  $v \in V$  gegeben. Es ist

$$\begin{aligned} d(\varphi(v), \varphi(w)) &= \|\varphi(v) - \varphi(w)\| \\ &= \|\varphi(v - w)\| \\ &= \|v - w\| \cdot \left\| \varphi\left(\frac{v - w}{\|v - w\|}\right) \right\| \\ &\leq \|v - w\| \cdot C. \end{aligned}$$

Zu  $\epsilon > 0$  kann man also

$$\delta := \epsilon/C$$

wählen. □

## ÄQUIVALENZ VON NORMEN

**Lemma 52.15.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und es seien  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  Normen auf  $V$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) *Die beiden Normen sind äquivalent.*
- (2) *Die Identität*

$$V \longrightarrow V$$

*ist stetig, unabhängig davon, ob man  $V$  links mit der ersten und rechts mit der zweiten Norm versieht oder umgekehrt.*

- (3) *Die  $\|\cdot\|_1$ -Einheitskugel ist beschränkt in der  $\|\cdot\|_2$ -Norm und umgekehrt.*
- (4) *Es gibt reelle Zahlen  $a, b$  mit*

$$\|v\|_2 \leq a\|v\|_1$$

*und*

$$\|v\|_1 \leq b\|v\|_2$$

*für alle  $v \in V$ .*

*Beweis.* Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich aus Satz 52.13, die Äquivalenz von (2) und (3) aus Satz 52.14. Die Eigenschaften (3) und (4) sind aufgrund der skalaren Verträglichkeit der Normen äquivalent.  $\square$

**Satz 52.16.** *Auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  sind je zwei Normen äquivalent.*

*Beweis.* Wir verwenden Lemma 52.15. Die Norm und die Topologie hängen nur von dem zugrunde liegenden reellen Vektorraum ab, wir können also

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$

annehmen. Zu einer Basis  $v_1, \dots, v_n \in V$  gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

mit  $e_i \mapsto v_i$ . Da unter dem Isomorphismus  $\varphi$  durch

$$\|u\|' := \|\varphi(u)\|$$

eine Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  definiert wird, können wir direkt  $V = \mathbb{R}^n$  annehmen. Wir vergleichen nun eine beliebige Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  mit der Maximumsnorm bzw. der euklidischen Norm, von denen wir nach Beispiel 52.7 schon wissen, dass sie untereinander äquivalent sind. Es sei  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ . Wegen

$$\begin{aligned} \|v\| &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|a_i e_i\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot \|e_i\| \\
&\leq n \cdot \max(\|e_i\|, i = 1, \dots, n) \|v\|_{\max}
\end{aligned}$$

sind hinreichend kleine  $\|-\|_{\max}$ -offene Bälle in  $\|-\|$ -offenen Bällen enthalten. Die Topologie zur Maximumsnorm ist also mindestens so fein wie die Topologie zu jeder anderen Norm. Zum Beweis der Umkehrung betrachten wir die Identität

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei die Topologie links durch die euklidische (bzw. Maximumsnorm) und rechts durch die Norm gegeben sei. Diese Abbildung ist nach der bisherigen Überlegung stetig. Die euklidische Einheitskugel  $S$  links ist kompakt nach dem Satz von Heine-Borel, und nach Satz Anhang. ist  $S$  bezüglich der Norm  $\|-\|$  ebenfalls überdeckungskompakt. Diese nennen wir  $S'$ . Da  $\mathbb{R}^n$  mit jeder Norm ein Hausdorff-Raum ist, ist  $S'$  wegen Aufgabe 52.5 insbesondere abgeschlossen. Da der Nullpunkt nicht zu  $S'$  gehört, gibt es ein

$$\delta > 0$$

mit

$$U(0, \delta) \cap S' = \emptyset$$

(der offene Ball bezüglich  $\|-\|$ ). Für  $v \neq 0$  ist wegen  $\frac{v}{\|v\|_{\text{euk}}} \in S = S'$  also

$$\left\| \frac{v}{\|v\|_{\text{euk}}} \right\| \geq \delta$$

und somit

$$\|v\|_{\text{euk}} \leq \frac{1}{\delta} \|v\|.$$

□

**Satz 52.17.** *Es seien  $V$  und  $W$  normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung. Es sei  $V$  endlichdimensional. Dann ist  $\varphi$  stetig.*

*Beweis.* Da das Bild der Abbildung ebenfalls ein endlichdimensionaler Vektorraum ist, können wir annehmen, dass beide Räume endlichdimensional sind. Ferner können wir annehmen, dass  $V = \mathbb{R}^n$  und  $W = \mathbb{R}^m$  ist und nach Satz 52.16 können wir annehmen, dass beidseitig die Maximumsnorm vorliegt. Es sei  $a$  der maximale Betrag der Einträge in der beschreibenden Matrix

$M = (a_{ij})_{ij}$  von  $\varphi$  bezüglich der Standardbasen. Für  $v \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\|v\|_{\max} \leq 1$$

ist dann

$$\|\varphi(v)\|_{\max} = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}v_j \end{pmatrix} \right\|_{\max} = \max \left( \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j \right|, i = 1, \dots, m \right) \leq na.$$

Daher folgt die Stetigkeit aus Satz 52.14.  $\square$

## 52. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 52.1.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass die offenen Kugeln  $U(x, \epsilon)$  offen sind.

**Aufgabe 52.2.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln  $B(x, \epsilon)$  abgeschlossen sind.

**Aufgabe 52.3.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $P \in M$  ein Punkt. Zeige, dass  $\{P\}$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe 52.4.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und die Gesamtmenge  $M$  sind offen.
- (2) Es sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

- (3) Es sei  $I$  eine endliche Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

**Aufgabe 52.5.** Es sei  $X$  ein Hausdorffraum und es sei  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei  $Y$  kompakt. Zeige, dass  $Y$  abgeschlossen in  $X$  ist.

**Aufgabe 52.6.** Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und  $m \in M$ . Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto m,$$

stetig ist.

**Aufgabe 52.7.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$M \longrightarrow M, x \longmapsto x,$$

stetig ist.

**Aufgabe 52.8.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion  $T \subseteq M$  stetig ist.

**Aufgabe 52.9.** Es sei  $V$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und

$$\varphi_w: V \longrightarrow V, v \longmapsto v + w,$$

die Verschiebung um den Vektor  $w \in V$ . Zeige, dass  $\varphi_w$  stetig ist.

**Aufgabe 52.10.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei  $x \in M$  ein Punkt mit  $f(x) > 0$ . Zeige, dass dann auch  $f(y) > 0$  für alle  $y$  aus einer offenen Ballumgebung von  $x$  gilt.

**Aufgabe 52.11.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und seien  $a < b < c$  reelle Zahlen. Es seien

$$f: [a, b] \longrightarrow M$$

und

$$g: [b, c] \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen mit  $f(b) = g(b)$ . Zeige, dass dann die Abbildung

$$h: [a, c] \longrightarrow M$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

**Aufgabe 52.12.** Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

**Aufgabe 52.13.** Zeige, dass eine polynomiale Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n),$$

stetig ist.

**Aufgabe 52.14.** Zeige, dass eine reelle Quadrik, also eine durch ein reelles Polynom vom Grad zwei gegebene Nullstellenmenge (siehe die 43. Vorlesung), eine abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist.

Wie sieht das für polynomiale Nullstellengebilde von höherem Grad aus?

**Aufgabe 52.15.** Es seien  $L, M, N$  metrische Räume und seien

$$f: L \longrightarrow M \text{ und } g: M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei  $f$  stetig in  $x \in L$  und es sei  $g$  stetig in  $f(x) \in M$ . Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in  $x$  ist.

**Aufgabe 52.16.** Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto |z|,$$

stetig ist.

**Aufgabe 52.17.** Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

stetig ist.

**Aufgabe 52.18.** Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ 0, & \text{falls } y \leq 0, \\ y/x, & \text{falls } x \geq y > 0, \\ x/y, & \text{falls } y > x > 0, \end{cases}$$

definiert ist. Zeige, dass die Einschränkung von  $f$  auf jeder zur  $x$ -Achse oder zur  $y$ -Achse parallelen Geraden stetig ist, dass aber  $f$  selbst nicht stetig ist.

**Aufgabe 52.19.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine nicht-leere Teilmenge. Zeige, dass durch

$$d_T(x) := \inf (d(x, y), y \in T)$$

eine wohldefinierte, stetige Funktion  $M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist.

**Aufgabe 52.20.** Es sei  $V$  ein unendlichdimensionaler normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Zeige, dass es eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, die nicht stetig ist.

**Aufgabe 52.21.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ . Zeige, dass die Folge in  $M$  genau dann im Sinne der Metrik konvergiert, wenn sie im Sinne der Topologie konvergiert.

**Aufgabe 52.22.** Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und es sei

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei  $X$  kompakt. Zeige, dass das Bild  $\varphi(X) \subseteq Y$  ebenfalls kompakt ist.

**Aufgabe 52.23.** Zeige, dass das offene Einheitsintervall  $]0, 1[$  und das abgeschlossene Einheitsintervall  $[0, 1]$  nicht homöomorph sind.

**Aufgabe 52.24.** Zeige, dass die Abbildung

$$[0, 2\pi[ \longrightarrow S^1, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

zwischen dem halboffenen Intervall  $[0, 2\pi[$  und dem Einheitskreis

$$S^1 = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P\| = 1\}$$

stetig und bijektiv ist, dass die Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

Zu einer beliebigen Menge  $M$  kann man durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik definieren, die die *diskrete Metrik* heißt.

**Aufgabe 52.25.** Es sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik und  $Y = \mathbb{R}^n$  mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f: Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass  $f$  stetig ist, die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  aber nicht.

**Aufgabe 52.26.** Es sei  $X$  eine nichtleere Menge versehen mit der diskreten Metrik. Zeige, dass eine stetige Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow X$$

konstant ist.

**Aufgabe 52.27.** Es sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $= \mathbb{C}$ . Es sei  $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$  ein  $n$ -dimensionaler affiner Unterraum, der den Nullpunkt nicht enthält, und es sei  $\tilde{H}$  der dazu parallele Unterraum durch den Nullpunkt. Es sei  $U \subseteq H$  eine in  $H \cong \mathbb{K}^n$  offene Menge (in der metrischen Topologie) und es sei  $V$  die Vereinigung aller Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt von  $U$ . Zeige, dass der Durchschnitt von  $V$  mit  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \tilde{H}$  offen ist.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 52.28.** (2 Punkte)

Es sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Untervektorraum im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass  $V$  abgeschlossen im  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Aufgabe 52.29.** (4 Punkte)

Es sei  $V$  ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

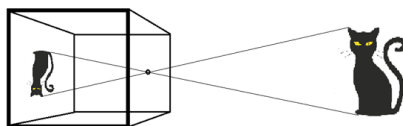
eine stetige Abbildung ist.

**Aufgabe 52.30.** (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

stetig und additiv, d.h. es gelte  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Zeige, dass  $\varphi$  dann  $\mathbb{R}$ -linear ist.

**Aufgabe 52.31.** (5 Punkte)

Im Nullpunkt  $0 \in \mathbb{R}^3$  befinde sich die Pupille eines Auges (oder einfach ein kleines Loch) und die durch  $x = -1$  bestimmte Ebene sei die Netzhaut  $N \cong \mathbb{R}^2$  (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?

## 53. VORLESUNG - KONVERGENZ VON MATRIXPOTENZEN

## NORM VON ENDOMORPHISMEN UND MATRIZEN

**Definition 53.1.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $\varphi: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\|\varphi\| := \sup (\|\varphi(v)\|, \|v\| = 1)$$

die *Norm* von  $\varphi$ .

Genauer spricht man von der *Supremumsnorm* oder der *Maximumsnorm*. Dies ist in der Tat eine Norm auf dem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ . Sie ist ein Spezialfall der Supremumsnorm von Arbeitsblatt 31, wenn man die Inklusion  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \subseteq C^0(\{v \in V \mid \|v\| = 1\}, W)$  heranzieht. In dieser Situation kann man statt des Supremums auch das Maximum nehmen, da das Supremum aufgrund der Kompaktheit der Sphäre (bezüglich der gegebenen Norm)  $S = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$  angenommen wird. Diese Norm hängt von den gewählten Normen auf  $V$  und  $W$  ab, aufgrund

von Satz 52.16 ist allerdings die Topologie auf dem Homomorphismenraum für jede Norm gleich. Eine wichtige Abschätzung ist

$$\|\varphi(v)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|v\|$$

für alle  $v \in V$ , siehe Aufgabe 53.27.

Bei  $V = \mathbb{K}^n$  und  $W = \mathbb{K}^m$  erhält man bei fixierten Normen auf diesen Räumen ausgewählte Normen auf dem Matrizenraum

$$\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m).$$

Wegen

$$\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{nm}$$

kann man den Matrizenraum auch mit der euklidischen Norm, der Maximumsnorm (bezogen auf die einzelnen Matrixeinträge) und der Summennorm versehen. Es gibt darüber hinaus noch weitere Normen, die Bezug auf die Matrixstruktur nehmen. Es sei die Matrix  $A = (a_{ij})_{ij}$  gegeben. Man nennt

$$\max \left( \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, j = 1, \dots, n \right)$$

die *Spaltensummennorm* und

$$\max \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, i = 1, \dots, m \right)$$

die *Zeilensummennorm*. Die Spaltensummennorm ist die Maximumsnorm im Sinne von Definition 53.1, wenn man die beiden Räume mit der Summennorm versieht, siehe Aufgabe 53.4.

## KONVERGENZ VON MATRIXPOTENZEN

Zu einer komplexen Zahl  $z$  hängt das Konvergenzverhalten der Potenzen  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wesentlich vom Betrag der Zahl ab. Bei  $|z| < 1$  konvergiert die Folge  $z^n$  gegen 0, bei  $|z| = 1$  ist die Folge zwar beschränkt, konvergiert aber nur bei  $z = 1$ , und bei  $|z| > 1$  ist die Folge divergent. Die entsprechende Fragestellung ergibt auch für Potenzen von quadratischen Matrizen mit Einträgen über  $\mathbb{C}$  Sinn. All diese Potenzen liegen in  $\text{Mat}_d(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{d^2}$ . Da dies ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum ist, hängt die Konvergenz in ihm nach Satz 52.16 nicht von einer gewählten Norm ab. Für eine Diagonalmatrix

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{d-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_d \end{pmatrix}$$

hängt das Konvergenzverhalten der Potenzen

$$M^n = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{d-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} z_1^n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{d-1}^n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_d^n \end{pmatrix}$$

direkt von den Einträgen in der Diagonalen ab. Beispielsweise konvergieren die Potenzen der Matrix genau dann gegen die Nullmatrix, wenn der Betrag eines jeden Diagonaleintrags kleiner als 1 ist.

**Beispiel 53.2.** Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann ist nach Aufgabe 28.14

$$M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Für

$$|\lambda| < 1$$

konvergiert diese Matrixfolge gegen die Nullmatrix, da jeder Eintrag gegen 0 konvergiert, für

$$\lambda = 1$$

konvergiert die Folge nicht, da der Eintrag rechts oben nicht konvergiert und noch nicht einmal beschränkt ist. Dies ist generell bei  $|\lambda| \geq 1$  der Fall.

Die Konvergenz von Matrixpotenzen hat viel mit den Eigenvektoren der Matrix zu tun.

**Lemma 53.3.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Es sei  $v \in V$  derart, dass die Folge  $\varphi^n(v)$  konvergiert. Dann ist der Grenzvektor*

$$w := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(v)$$

*der Nullvektor oder ein Eigenvektor von  $\varphi$  zum Eigenwert 1.*

*Beweis.* Es sei  $w$  der Grenzvektor. Es ist

$$\varphi^{n+1}(v) = \varphi(\varphi^n(v))$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aufgrund der Stetigkeit (nach Satz 52.17) von  $\varphi$  sind die Limiten (nach Satz 52.13) vertauschbar, also

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{n+1}(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\varphi^n(v)) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(v)\right) = \varphi(w).$$

Daher ist  $w$  ein Fixpunkt von  $\varphi$ , also der Nullvektor oder ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.  $\square$

**Lemma 53.4.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein trigonalisierbarer Endomorphismus mit der Zerlegung (im Sinne von Satz 28.1)*

$$\varphi = \varphi_{\text{diag}} + \varphi_{\text{nil}}$$

*mit einer (untereinander vertauschbaren) diagonalisierbaren und einer nilpotenten Abbildung mit*

$$\varphi_{\text{nil}}^k = 0.$$

*Dann besitzen die Potenzen von  $\varphi$  die Darstellung*

$$\begin{aligned} & \varphi^n \\ = & \varphi_{\text{diag}}^n + n\varphi_{\text{diag}}^{n-1} \circ \varphi_{\text{nil}} + \binom{n}{2} \varphi_{\text{diag}}^{n-2} \circ \varphi_{\text{nil}}^2 + \binom{n}{3} \varphi_{\text{diag}}^{n-3} \circ \varphi_{\text{nil}}^3 + \cdots + \\ & \binom{n}{k-1} \varphi_{\text{diag}}^{n-k+1} \circ \varphi_{\text{nil}}^{k-1}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus

$$\varphi^n = (\varphi_{\text{diag}} + \varphi_{\text{nil}})^n,$$

der Vertauschbarkeit und der allgemeinen binomischen Formel.  $\square$

### ASYMPTOTISCHE STABILITÄT UND STABILITÄT

**Definition 53.5.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann heißt  $\varphi$  asymptotisch stabil, wenn die Folge  $\varphi^n$  in  $\text{End}(V)$  gegen die Nullabbildung konvergiert.*

Im Folgenden werden in der reellen Situation auch die komplexen Eigenwerte eine Rolle spielen. Diese sind die komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms bzw. die Eigenwerte der Matrix, wenn man sie über  $\mathbb{C}$  auffasst. Sie sind nicht Eigenwerte der reellen Matrix im Sinne der Definition. Auch die jordanische Normalform, die ja im Allgemeinen nur komplex existiert, wird ebenfalls in der reellen Situation verwendet.

**Satz 53.6.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

- (1)  $\varphi$  ist asymptotisch stabil.
- (2) Zu jedem  $v \in V$  konvergiert die Folge  $\varphi^n(v)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gegen  $0 \in V$ .
- (3) Es gibt ein Erzeugendensystem  $v_1, \dots, v_m \in V$  derart, dass  $\varphi^n(v_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , gegen  $0$  konvergiert.
- (4) Der Betrag eines jeden komplexen Eigenwerts von  $\varphi$  ist kleiner als 1.

*Beweis.* Aus (1) folgt (2). Es sei  $v \in V$ . Wir können mit einer beliebigen Norm auf  $V$  und auf dem Endomorphismenraum arbeiten, beispielsweise mit der Maximumsnorm. Dann konvergiert wegen

$$\|\varphi^n(v)\| \leq \|\varphi^n\|_{\max} \cdot \|v\|$$

die Folge  $\varphi^n(v)$  gegen 0. Von (2) nach (3) ist klar. Wenn umgekehrt (3) erfüllt ist, und

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$$

eine Linearkombination ist, so ist

$$\varphi^n(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = a_1 \varphi^n(v_1) + \cdots + a_m \varphi^n(v_m)$$

und aus der Konvergenz der beteiligten Folgen  $\varphi^n(v_j)$  gegen 0 folgt die Konvergenz dieser Summenfolge gegen 0. Von (2) bzw. (3) nach (4). Wir können  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  annehmen: Im reellen Fall kann man von  $V = \mathbb{R}^d$  ausgehen und die Abbildung durch eine reelle Matrix ausdrücken und diese als komplexe Matrix auffassen. Das gegebene reelle Erzeugendensystem ist dann auch ein komplexes Erzeugendensystem für den  $\mathbb{C}^d$ . Es sei  $\lambda$  ein Eigenwert und  $v \in V$  ein Eigenvektor zu  $\lambda$ . Da nach Voraussetzung

$$\varphi^n(v) = \lambda^n v$$

gegen 0 konvergiert, muss  $\lambda^n$  gegen 0 konvergieren und daher ist

$$|\lambda| < 1.$$

Für den Schluss von (4) auf (1) verwenden wir Lemma 53.4, es ist also

$$\begin{aligned} & \varphi^n \\ = & \varphi_{\text{diag}}^n + n \varphi_{\text{diag}}^{n-1} \circ \varphi_{\text{nil}} + \binom{n}{2} \varphi_{\text{diag}}^{n-2} \circ \varphi_{\text{nil}}^2 + \binom{n}{3} \varphi_{\text{diag}}^{n-3} \circ \varphi_{\text{nil}}^3 + \cdots + \\ & \binom{n}{k-1} \varphi_{\text{diag}}^{n-k+1} \circ \varphi_{\text{nil}}^{k-1}, \end{aligned}$$

wobei  $k$  die Nilpotenzordnung des nilpotenten Anteils  $\varphi_{\text{nil}}$  ist. Die Eigenwerte von  $\varphi$  sind nach Aufgabe 28.13 die Eigenwerte des diagonalisierbaren Anteils  $\varphi_{\text{diag}}$ , sie seien mit  $z_j$  bezeichnet. Die Summanden sind von der Form

$$p(n) \varphi_{\text{diag}}^{n-s} \circ \varphi_{\text{nil}}^s$$

zu einem festen  $s < k$  und einem Polynom  $p(n)$ . Die Diagonaleinträge von  $p(n) \varphi_{\text{diag}}^{n-s}$  sind (nach Diagonalisieren) von der Form

$$p(n) z_j^{n-s}$$

und wegen  $|z_j| < 1$  konvergiert dies für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0. Daher konvergiert  $p(n) \varphi_{\text{diag}}^{n-s}$  gegen die Nullabbildung und das gilt nach Aufgabe 53.7 auch für das Produkt mit der festen Abbildung  $\varphi_{\text{nil}}^s$ . Daher konvergiert auch die Summe gegen die Nullabbildung.  $\square$

**Definition 53.7.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Der *Spektralradius* von  $\varphi$  ist

$$\rho(\varphi) = \max(|\lambda|, \lambda \text{ ist ein komplexer Eigenwert von } \varphi).$$

Da es im endlichdimensionalen Fall nur endlich viele (komplexe) Eigenwerte gibt, ist der Spektralradius wohldefiniert. Gemäß Satz 53.6 ist der Endomorphismus genau dann asymptotisch stabil, wenn der Spektralradius  $< 1$  ist. Wir betonen, dass im Reellen der Spektralradius unter Bezug auf die Komplexifizierung berechnet wird.

**Lemma 53.8.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Es sei eine Norm auf  $V$  gegeben und  $\|-\|_{\max}$  die entsprechende Norm auf dem Endomorphismenraum. Dann gilt für den Spektralradius die Abschätzung*

$$\rho(\varphi) \leq \|\varphi\|_{\max}.$$

*Beweis.* Es sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $\varphi$  mit

$$|\lambda| = \rho(\varphi).$$

Es sei  $v \in V$  ein Eigenvektor zu  $\lambda$ . Dann ist

$$|\lambda| \cdot \|v\| = \|\lambda v\| = \|\varphi(v)\| \leq \|\varphi\|_{\max} \cdot \|v\|$$

und Division durch  $\|v\|$  liefert die Behauptung.  $\square$

**Definition 53.9.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann heißt  $\varphi$  *stabil*, wenn die Folge  $\varphi^n$  in  $\text{End}(V)$  beschränkt ist.

Beispielsweise ergibt sich aus dem folgenden Satz, dass eine Isometrie auf einem euklidischen Raum  $V$  stabil ist, da für jeden Vektor  $v \in V$  ja  $\|\varphi^n(v)\|$  sogar konstant ist.

**Satz 53.10.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

- (1)  $\varphi$  ist stabil.
- (2) Zu jedem  $v \in V$  ist die Folge  $\varphi^n(v)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , beschränkt.
- (3) Es gibt ein Erzeugendensystem  $v_1, \dots, v_m \in V$  derart, dass  $\varphi^n(v_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , beschränkt ist.

- (4) Der Betrag eines jeden komplexen Eigenwerts von  $\varphi$  ist kleiner oder gleich 1 und die Eigenwerte mit Betrag 1 sind diagonalisierbar, d.h. ihre algebraische Vielfachheit ist gleich ihrer geometrischen Vielfachheit.
- (5) Für eine beschreibende Matrix  $M$  von  $\varphi$ , aufgefasst über  $\mathbb{C}$ , sind die Jordan-Blöcke der jordanischen Normalform gleich

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit  $|\lambda| < 1$  oder gleich  $(\lambda)$  mit  $|\lambda| = 1$ .

*Beweis.* Aus (1) folgt (2). Es sei  $v \in V$ . Wir können mit einer beliebigen Norm auf  $V$  und dem Endomorphismenraum arbeiten, beispielsweise mit der Maximumsnorm. Dann ist wegen

$$\|\varphi^n(v)\| \leq \|\varphi^n\|_{\max} \cdot \|v\|$$

auch  $\varphi^n(v)$  beschränkt. Von (2) nach (3) ist klar. Wenn umgekehrt (3) erfüllt ist, und

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$$

eine Linearkombination ist, so ist

$$\varphi^n(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = a_1 \varphi^n(v_1) + \cdots + a_m \varphi^n(v_m)$$

und aus der Beschränktheit der beteiligten Folgen  $\varphi^n(v_j)$  folgt die Beschränktheit dieser Summenfolge. Die Äquivalenz von (4) und (5) ist klar, da über  $\mathbb{C}$  die jordanische Normalform existiert und man die Eigenwerte und die Vielfachheiten aus den Jordan-Blöcken ablesen kann. Von (2) nach (5). Wir können  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  annehmen. Es sei

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Block der jordanischen Normalform. Bei

$$|\lambda| > 1$$

ergibt sich für einen zugehörigen Eigenvektor  $v$  wegen

$$\|\varphi^n(v)\| = |\lambda|^n \|v\|$$

direkt ein Widerspruch zur Beschränktheit. Sei also

$$|\lambda| = 1$$

und sei angenommen, dass der Jordan-Block mindestens die Länge zwei besitzt. Nach Aufgabe 53.21 ist

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n + n\lambda^{n-1} \\ \lambda^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist aber die erste Komponente

$$\lambda^n + n\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda + n)$$

nicht beschränkt im Widerspruch zur Voraussetzung.

Für den Schluss von (5) auf (1) können wir die einzelnen Jordan-Blöcke getrennt voneinander analysieren, da die Stabilität nach Aufgabe 53.19 mit einer Zerlegung in direkte Summanden verträglich ist. Für den ersten Typ folgt die Aussage aus Satz 53.6, für den Typ  $\lambda$  mit  $\lambda = 1$  ist es klar, da die Norm der Potenzen konstant gleich 1 ist.  $\square$

Für die Konvergenz der Matrixpotenzen gibt es die folgende Charakterisierung.

**Satz 53.11.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

- (1) *Die Folge  $\varphi^n$  konvergiert in  $\text{End}(V)$ .*
- (2) *Zu jedem  $v \in V$  konvergiert die Folge  $\varphi^n(v)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*
- (3) *Es gibt ein Erzeugendensystem  $v_1, \dots, v_m \in V$  derart, dass  $\varphi^n(v_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , konvergiert.*
- (4) *Der Betrag eines jeden komplexen Eigenwerts von  $\varphi$  ist kleiner oder gleich 1 und falls der Betrag 1 ist, so ist der Eigenwert selbst 1 und diagonalisierbar.*
- (5) *Für eine beschreibende Matrix  $M$  von  $\varphi$ , aufgefasst über  $\mathbb{C}$ , sind die Jordan-Blöcke der jordanischen Normalform gleich*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

*mit  $|\lambda| < 1$  oder gleich (1).*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 53.22.  $\square$

## 53. ARBEITSBLATT

## ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 53.1.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Zeige, dass auf dem Homomorphismenraum  $\text{Hom}(V, W)$  die Maximumsnorm in der Tat eine Norm ist.

**Aufgabe 53.2.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es einen Vektor  $v \in V$ ,  $\|v\| = 1$ , mit

$$\|\varphi(v)\| = \|\varphi\|$$

gibt.

**Aufgabe 53.3.** Berechne für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) die Maximumsnorm, die Summennorm, und die euklidische Norm,
- (b) die Maximumsnorm zu Maximumsnorm, Summennorm oder euklidischer Norm auf dem  $\mathbb{R}^2$  in allen Kombinationen,
- (c) die Spaltensummennorm und die Zeilensummennorm.

**Aufgabe 53.4.** Zeige, dass die Spaltensummennorm auf dem Matrizenraum  $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$  gleich der Maximumsnorm im Sinne von Definition 53.1 ist, wenn man die Räume  $\mathbb{K}^n$  und  $\mathbb{K}^m$  mit der Summennorm versteht.

**Aufgabe 53.5.** Betrachte die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei der  $\mathbb{R}^2$  mit der euklidischen Norm versehen sei. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Norm von  $\varphi$ .

**Aufgabe 53.6.** Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

eine lineare Abbildung  $\neq 0$ . Bestimme einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  auf der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, an dem die Funktion

$$B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto |\varphi(v)|,$$

ihr Maximum annimmt. Bestimme die Norm von  $\varphi$ .

**Aufgabe 53.7.** Zeige, dass die Matrizenmultiplikation

$$\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \times \text{Mat}_{n \times p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times p}(\mathbb{K}), (A, B) \longmapsto A \circ B,$$

stetig ist.

Es sei

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Die Abbildung heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl  $c \geq 0$  mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle  $x, y \in L$  gibt.

**Aufgabe 53.8.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  Lipschitz-stetig ist.

**Aufgabe 53.9.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\varphi: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung.

- (a) Zeige, dass für jeden Vektor  $v \in V$  die Abschätzung

$$\|\varphi(v)\| \leq \|v\|$$

genau dann gilt, wenn für die Supremumsnorm

$$\|\varphi\| \leq 1$$

gilt.

- (b) Zeige, dass  $\varphi$ , wenn es die Bedingungen aus Teil (a) erfüllt, stabil ist.  
 (c) Man gebe ein Beispiel für ein  $\varphi$ , das stabil ist, das aber nicht die Eigenschaften aus Teil (a) besitzt.

**Aufgabe 53.10.** Zeige, dass eine lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

zwischen endlichdimensionalen normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  genau dann stark kontrahierend ist, wenn  $\|\varphi\| < 1$  ist.

**Aufgabe 53.11.** Es sei

$$M = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

- (a) Erstelle eine Formel für  $M^n$ .
- (b) Ist die Folge  $M^n$  beschränkt, ist sie konvergent?

**Aufgabe 53.12.** Bestimme eine Formel für die Potenzen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n.$$

**Aufgabe 53.13.** Es sei

$$W = \text{End}(V)$$

der Endomorphismenraum zu einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ . Welche Eigenschaften einer Norm erfüllt der Spektralradius  $\varphi \mapsto \rho(\varphi)$ , welche nicht?

**Aufgabe 53.14.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $v_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Folge in  $V$ . Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert (bezüglich einer beliebigen Norm), wenn für eine (jede) Basis sämtliche Komponentenfolgen in  $\mathbb{K}$  konvergieren.

**Aufgabe 53.15.** Zeige, dass ein nilpotenter Endomorphismus

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  asymptotisch stabil ist.

**Aufgabe 53.16.** Zeige, dass ein Endomorphismus

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

mit endlicher Ordnung auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  stabil ist.

**Aufgabe 53.17.** Zeige mit jeder Charakterisierung von Satz 53.10, dass eine Isometrie  $\varphi: V \rightarrow V$  auf einem euklidischen Vektorraum  $V$  stabil ist.

**Aufgabe 53.18.** Es sei

$$V = U \oplus W$$

eine direkte Summenzerlegung eines endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes und es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus mit einer direkten Summenzerlegung

$$\varphi = \psi \oplus \theta.$$

Zeige, dass  $\varphi$  genau dann asymptotisch stabil ist, wenn sowohl  $\psi$  als auch  $\theta$  asymptotisch stabil sind.

**Aufgabe 53.19.** Es sei

$$V = U \oplus W$$

eine direkte Summenzerlegung eines endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes und es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus mit einer direkten Summenzerlegung

$$\varphi = \psi \oplus \theta.$$

Zeige, dass  $\varphi$  genau dann stabil ist, wenn sowohl  $\psi$  als auch  $\theta$  stabil sind.

**Aufgabe 53.20.** Es sei

$$V = U \oplus W$$

eine direkte Summenzerlegung eines endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes und es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus mit einer direkten Summenzerlegung

$$\varphi = \psi \oplus \theta.$$

Zeige, dass die Folge  $\varphi^n$  genau dann konvergiert, wenn sowohl  $\psi^n$  als auch  $\theta^n$  konvergieren.

**Aufgabe 53.21.** Zeige

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n + n\lambda^{n-1} \\ \lambda^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 53.22.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) Die Folge  $\varphi^n$  konvergiert in  $\text{End}(V)$ .
- (2) Zu jedem  $v \in V$  konvergiert die Folge  $\varphi^n(v)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- (3) Es gibt ein Erzeugendensystem  $v_1, \dots, v_m \in V$  derart, dass  $\varphi^n(v_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , konvergiert.
- (4) Der Betrag eines jeden komplexen Eigenwerts von  $\varphi$  ist kleiner oder gleich 1 und falls der Betrag 1 ist, so ist der Eigenwert selbst 1 und diagonalisierbar.
- (5) Für eine beschreibende Matrix  $M$  von  $\varphi$ , aufgefasst über  $\mathbb{C}$ , sind die Jordan-Blöcke der jordanischen Normalform gleich

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit  $|\lambda| < 1$  oder gleich (1).

**Aufgabe 53.23.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und

$$\psi: V \longrightarrow W$$

ein Isomorphismus. Es sei

$$f: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus und

$$g := \psi \circ f \circ \psi^{-1}$$

der entsprechende Endomorphismus auf  $W$ . Zeige, dass  $f$  genau dann stabil (asymptotisch stabil) ist, wenn dies auf  $g$  zutrifft.

**Aufgabe 53.24.** Es sei  $\varphi: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes  $V$ . Zeige die folgenden Aussagen.

- (a) Wenn  $\varphi$  asymptotisch stabil ist, dann konvergiert die Folge  $(\det \varphi)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gegen 0.
- (b) Wenn  $\varphi$  stabil ist, dann ist die Folge  $(\det \varphi)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , beschränkt.
- (c) Wenn die Folge  $\varphi^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , konvergiert, dann konvergiert die Folge  $(\det \varphi)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gegen 0 oder gegen 1.

**Aufgabe 53.25.** Man gebe ein Beispiel für eine Matrix, die nicht stabil ist, für die aber die Folge  $(\det \varphi)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gegen 0 konvergiert.

Es sei  $T$  eine Menge,  $M$  ein metrischer Raum und

$$f_n: T \longrightarrow M$$

( $n \in \mathbb{N}$ ) eine Folge von Abbildungen. Man sagt, dass die Abbildungsfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes  $x \in T$  die Folge

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert.

**Aufgabe 53.26.** Es sei  $M_k = ((a_{ij})_k)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  eine Folge von reellen  $m \times n$ -Matrizen und

$$\varphi_k: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die zugehörige Folge von linearen Abbildungen. Zeige, dass die Folgen der Einträge  $(a_{ij})_k$  für alle  $i, j$  genau dann konvergieren, wenn die Folge der Abbildungen punktweise konvergiert.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 53.27.** (2 Punkte)

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $\varphi: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Zeige die Abschätzung

$$\|\varphi(v)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|v\|$$

für alle  $v \in V$ .

**Aufgabe 53.28.** (11 (1+9+1) Punkte)

Berechne für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- die Maximumsnorm, die Summennorm, und die euklidische Norm,
- die Maximumsnorm zu Maximumsnorm, Summennorm oder euklidischer Norm auf dem  $\mathbb{R}^2$  in allen Kombinationen,
- die Spaltensummennorm und die Zeilensummennorm.

**Aufgabe 53.29.** (3 Punkte)

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung derart, dass eine Orthogonalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $\varphi$  existiert. Zeige, dass

$$\|\varphi\| = \max(|\lambda|, \lambda \text{ ist Eigenwert von } \varphi)$$

gilt.

**Aufgabe 53.30.** (6 Punkte)

Es sei  $M$  eine  $n \times n$ -Matrix über  $\mathbb{K}$ . Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (a) In der Folge  $M^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gibt es eine Wiederholung, d.h.

$$M^n = M^m$$

für ein Zahlenpaar  $n < m$ .

- (b) In der Folge  $M^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , kommen nur endlich viele verschiedene Matrizen vor.  
 (c) Die Folge  $M^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wird letztlich (also ab einer bestimmten Stelle) periodisch.  
 (d) Die Jordanblöcke zu  $M$  über  $\mathbb{C}$  haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

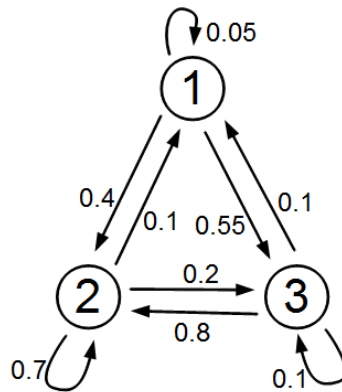
oder  $(\lambda)$  mit einer komplexen Einheitswurzel  $\lambda$ .

**Aufgabe 53.31.** (6 Punkte)

Die reelle Ebene  $\mathbb{R}^2$  sei mit der euklidischen, der Summen- oder der Maximumsmetrik versehen. Bestimme, abhängig von der gewählten Metrik, die maximale Anzahl von Punkten  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$  derart, dass die Metrik auf der Teilmenge  $T = \{P_1, \dots, P_n\}$  die diskrete Metrik induziert.

## 54. VORLESUNG - STOCHASTISCHE MATRIZEN

## STOCHASTISCHE MATRIZEN



**Definition 54.1.** Eine reelle quadratische Matrix

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

heißt *spaltenstochastisch*, wenn alle Einträge

$$a_{ij} \geq 0$$

sind und für jede Spaltensumme (also jedes  $j$ )

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$$

gilt.

Die zugrundeliegende Interpretation für eine spaltenstochastische Matrix ist folgendermaßen: Man hat eine Menge von  $n$  möglichen Plätzen, Positionen, Netzwerkknöten, Internetseiten oder ähnliches, in denen man sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (einer Verteilung, einer Gewichtung) auf-

halten kann. Eine solche Verteilung wird durch ein  $n$ -Tupel  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  mit re-

ellen nichtnegativen Zahlen  $v_i$  mit  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  beschrieben. Man spricht von einem *Verteilungsvektor*. Eine spaltenstochastische Matrix beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeiten des gegebenen Netzwerks in einem bestimmten Zeitabschnitt. Der Eintrag  $a_{ij}$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Knoten  $j$  befindliches Objekt (ein Besucher der Netzseite  $j$ ) zur Position  $i$  hinüberwechselt (sich zur Netzseite  $i$  weiterklickt). Der  $j$ -te Standardvektor entspricht der Verteilung, in der alles im  $j$ -ten Knotenpunkt konzentriert ist.

Die  $j$ -te Spalte der Matrix beschreibt das Bild dieses Standardvektors unter der Matrix. Generell wird zu einer Verteilung  $v$  durch Anwenden der Matrix die Bildverteilung  $Mv$  ausgerechnet, siehe Aufgabe 54.1. Naheliegende Fragen sind, ob es Verteilungen gibt, die stationär sind (*stationäre Verteilung* oder *Fixverteilung* oder *Eigenverteilung*), also in sich selbst überführt werden, ob es periodische Verteilungen gibt, ob es bei „unendlich vielen“ Iterationen der Matrix Grenzverteilungen gibt, und wie man diese ausrechnen kann.

**Beispiel 54.2.** Eine spaltenstochastische  $2 \times 2$ -Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 - p_1 & 1 - p_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$0 \leq p_1, p_2 \leq 1.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} & (X - p_1)(X - 1 + p_2) - (1 - p_1)p_2 \\ &= X^2 + (p_2 - p_1 - 1)X + p_1(1 - p_2) - p_2(1 - p_1) \\ &= X^2 + (p_2 - p_1 - 1)X + p_1 - p_2 \\ &= (X - 1)(X + p_2 - p_1). \end{aligned}$$

Eigenwerte sind also 1 und  $p_1 - p_2$ . Eine stationäre Verteilung ist (der Fall  $p_1 = 1$  und  $p_2 = 0$  ist für die folgende Rechnung auszuschließen) durch

$\begin{pmatrix} \frac{p_2}{1 - p_1} \\ \frac{p_2 - p_1 + 1}{p_2 - p_1 + 1} \end{pmatrix}$  gegeben, es ist ja

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 - p_1 & 1 - p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_2}{1 - p_1} \\ \frac{p_2 - p_1 + 1}{p_2 - p_1 + 1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \frac{p_2}{p_2 - p_1 + 1} + p_2 \frac{1 - p_1}{p_2 - p_1 + 1} \\ (1 - p_1) \frac{p_2}{p_2 - p_1 + 1} + (1 - p_2) \frac{1 - p_1}{p_2 - p_1 + 1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p_1 p_2 + p_2(1 - p_1)}{(1 - p_1)p_2 + (1 - p_2)(1 - p_1)} \\ \frac{p_2 - p_1 + 1}{p_2 - p_1 + 1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p_2}{1 - p_1} \\ \frac{p_2 - p_1 + 1}{p_2 - p_1 + 1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Beispiel 54.3.** Die spaltenstochastische  $2 \times 2$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

führt die Verteilung  $\begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix}$  in die Verteilung  $\begin{pmatrix} 1 - p \\ p \end{pmatrix}$  über. Die Verteilung

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  wird in sich selbst überführt, ist also eine stationäre Verteilung. Die

Verteilung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  wird in  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  überführt und umgekehrt, es handelt sich also um periodische Verteilungen der Periodenlänge 2.

**Beispiel 54.4.** Die spaltenstochastische  $n \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

führt eine jede Verteilung  $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  in die Verteilung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

über. Der erste Standardvektor ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, die weiteren Standardvektoren werden, wie jeder Verteilungsvektor, in den ersten Standardvektor überführt. Der Kern wird von den Vektoren  $e_1 - e_j$ ,  $j \geq 2$ , erzeugt und enthält keine Verteilungsvektoren.

**Beispiel 54.5.** Es sei  $N$  ein Netzwerk (oder ein „gerichteter Graph“), bestehend aus einer Menge  $K$  aus Knotenpunkten und einer Menge an gerichteten Verbindungen, die zwischen Knotenpunkten bestehen können. Beispielsweise ist  $K$  die Menge aller Seiten im Internet und von der Seite  $j \in K$  besteht ein Verbindungspfeil nach  $i \in K$ , falls es auf der Internetseite  $j$  einen Link auf die Seite  $i$  gibt. Die Verlinkungsstruktur kann man durch die *Adjazenzmatrix*

$$A = (a_{ij})$$

ausdrücken, wobei

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls es einen Link von } j \text{ auf } i \text{ gibt,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

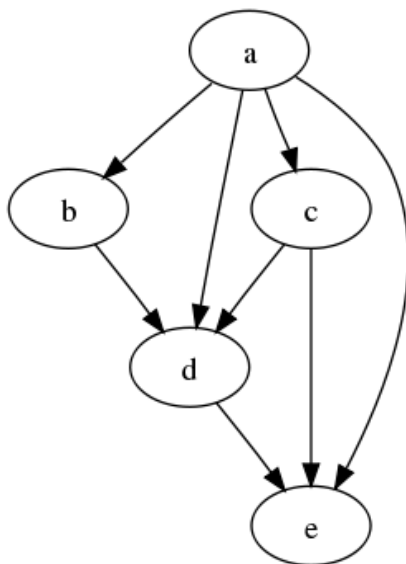
festgelegt ist (in der  $j$ -ten Spalte sind die von  $j$  ausgehenden Links ablesbar), oder aber durch die spaltenstochastische Matrix

$$B = (b_{ij}),$$

wobei

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_j}$$

und  $d_j$  die Anzahl der Links angibt, die vom  $j$ -ten Knoten überhaupt ausgehen. Diese Division sichert, dass die Spaltensummennorm gleich 1 wird (es sei vorausgesetzt, dass von jedem Knoten mindestens ein Link ausgeht).



Die Adjazenzmatrix und die spaltenstochastisch gemachte Adjazenzmatrix zum Graphen rechts (wobei wir durchgängig Selbstlinks hinzunehmen) sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

#### POTENZEN VON STOCHASTISCHEN MATRIZEN

Wir untersuchen nun die Potenzen von stochastischen Matrizen mit Hilfe der Summennorm und den Ergebnissen der letzten Vorlesung.

**Korollar 54.6.** *Eine spaltenstochastische Matrix ist stabil.*

*Beweis.* Für einen beliebigen Vektor  $v \in V$  ist

$$\begin{aligned} \|Mv\|_{\text{sum}} &= \sum_{i=1}^n |(Mv)_i| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} |v_j| \right) \\ &= \sum_{j=1}^n |v_j| \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n |v_j| \\
&= \|v\|_{\text{sum}}.
\end{aligned}$$

Iterative Anwendung dieser Beobachtung zeigt, dass Satz 53.10 (2) erfüllt ist.  $\square$

**Lemma 54.7.** *Es sei*

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

*eine reelle quadratische Matrix mit nichtnegativen Einträgen. Dann ist  $M$  genau dann spaltenstochastisch, wenn  $M$  für Vektoren mit nichtnegativen Einträgen isometrisch bezüglich der Summennorm ist, wenn also*

$$\|Mv\|_{\text{sum}} = \|v\|_{\text{sum}}$$

*für alle  $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  gilt.*

*Beweis.* Es sei  $M$  eine spaltenstochastische Matrix und

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ein Vektor mit nichtnegativen Einträgen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|Mv\|_{\text{sum}} &= \sum_{i=1}^n (Mv)_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^n v_j \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n v_j \\
&= \|v\|_{\text{sum}}.
\end{aligned}$$

Wenn umgekehrt die angegebene isometrische Eigenschaft gilt, so gilt insbesondere für die Bilder der Standardvektoren, dass ihre Summennorm gleich 1 sein muss. Diese Bilder stehen in der entsprechenden Spalte der Matrix, alle Spaltensummen haben also den Wert 1.  $\square$

**Lemma 54.8.** *Es sei  $M$  eine spaltenstochastische Matrix. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es gibt Eigenvektoren zum Eigenwert 1.*

- (2) Wenn es eine Zeile gibt, in der alle Einträge positiv sind, so gilt für jeden Vektor  $v \in V$ , der sowohl positive als auch negative Einträge besitzt, die Abschätzung

$$\|Mv\|_{\text{sum}} < \|v\|_{\text{sum}} .$$

- (3) Wenn es eine Zeile gibt, in der alle Einträge positiv sind, so ist der Eigenraum zum Eigenwert 1 eindimensional. Es gibt dann einen Eigenvektor, der nur nichtnegative Einträge hat und insbesondere eine eindeutig bestimmte stationäre Verteilung.

*Beweis.* (1) Die transponierte Matrix ist zeilenstochastisch und besitzt daher

den Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  zum Eigenwert 1. Daher besitzt nach Satz 23.2 das

charakteristische Polynom der transponierten Matrix eine Nullstelle an der Stelle 1 und dies gilt nach Aufgabe 23.19 dann auch für das charakteristische Polynom der ursprünglichen Matrix. Daher besitzt  $M$  einen Eigenvektor zum Eigenwert 1.

(2) Es seien nun zusätzlich alle Einträge der  $k$ -ten Zeile positiv und  $v \in V$  sei ein Vektor mit (mindestens) einem positiven und einem negativen Eintrag. Dann ist

$$\begin{aligned} \|Mv\|_{\text{sum}} &= \sum_{i=1}^n |(Mv)_i| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right| \\ &= \sum_{i \neq k} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j \right| \\ &< \sum_{i \neq k} \sum_{j=1}^n a_{ij} |v_j| + \sum_{j=1}^n |a_{kj} v_j| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} |v_j| \\ &= \sum_{j=1}^n |v_j| \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n |v_j| \\ &= \|v\|_{\text{sum}} . \end{aligned}$$

(3) Wie im Beweis zu (2) seien alle Einträge der  $k$ -ten Zeile positiv. Für einen jeden Eigenvektor  $v$  zum Eigenwert 1 sind nach (2) entweder alle Einträge nichtnegativ oder nichtpositiv. Somit ist für einen solchen Vektor wegen  $Mv = v$  der  $k$ -te Eintrag ungleich 0. Es seien  $v, w$  solche Eigenvektoren. Dann gehört auch  $\frac{w_k}{v_k}v - w$  zum Fixraum. Allerdings ist die  $k$ -te Komponente davon gleich 0 und daher ist es der Nullvektor. Das bedeutet, dass  $v$  und  $w$  linear abhängig sind. Somit ist dieser Eigenraum eindimensional. Wegen (2) gibt es einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 mit nichtnegativen Einträgen. Durch Normieren sieht man, dass es auch eine stationäre Verteilung gibt.  $\square$

**Beispiel 54.9.** Wir betrachten die spaltenstochastische  $3 \times 3$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

bei der alle Einträge der ersten Zeile positiv sind. Nach Lemma 54.8 gibt es eine eindeutige Eigenverteilung. Um diese zu bestimmen, berechnet man den Kern von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dieser wird von  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  erzeugt und die stationäre Verteilung ist

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 54.10.** Für die spaltenstochastische  $3 \times 3$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ist der Eigenraum zum Eigenwert 1 gleich  $\langle e_1, e_2 \rangle$ , also zweidimensional. Die Aussage Lemma 54.8 gilt also nicht, wenn es eine Spalte (aber keine Zeile) mit ausschließlich positiven Einträgen gibt.

**Satz 54.11.** *Es sei  $M$  eine spaltenstochastische Matrix mit der Eigenschaft, dass es eine Zeile gibt, in der alle Einträge positiv sind. Dann konvergiert zu jedem Verteilungsvektor  $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  mit  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  die Folge  $M^n v$  gegen die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung von  $M$ .*

*Beweis.* Es sei  $w \in \mathbb{R}^n$  die nach Lemma 54.8 (3) eindeutig bestimmte stationäre Verteilung und

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n u_i = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dies ist ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n-1$ . Nach Lemma 54.8 (2) hat  $w$  ausschließlich nichtnegative Einträge und gehört damit nicht zu  $U$ . Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (Mu)_i &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n u_j \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n u_j \end{aligned}$$

ist  $U$  invariant unter der Matrix  $M$ . Somit ist

$$V = \mathbb{R}w \oplus U$$

eine direkte Summenzerlegung in invariante Untervektorräume. Für jedes  $u \in U$  mit  $\|u\|_{\text{sum}} = 1$  ist

$$\|Mu\|_{\text{sum}} < 1$$

nach Lemma 54.8 (2). Da die Sphäre zum Radius 1 bezüglich jeder Norm kompakt ist, ist die induzierte Maximumnorm von  $M|_U$  kleiner als 1. Nach Lemma 53.8 und Satz 53.6 konvergiert daher die Folge  $M^n u$  für jedes  $u \in U$  gegen den Nullvektor.

Es sei nun  $v \in V$  ein Verteilungsvektor, den wir wegen

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1 = \sum_{i=1}^n w_i$$

als

$$v = w + u$$

mit  $u \in U$  schreiben können. Wegen

$$M^m v = M^m(w + u) = M^m w + M^m u = w + M^m u$$

und der Vorüberlegung konvergiert diese Folge gegen  $w$ .  $\square$

**Bemerkung 54.12.** In der Situation von Lemma 54.8 kann man die Eigenverteilung dadurch finden, dass man ein lineares Gleichungssystem löst. Wenn es sich um eine sehr große Matrix (man denke an  $\geq 10^9$  Knoten) handelt, ist eine solche Rechnung sehr aufwändig. Häufig muss man die Eigenverteilung aber gar nicht genau kennen, sondern es reicht eine gute Approximation aus.

Dann kann man zu einer beliebigen Startverteilung endlich viele Iterationen ausrechnen und weiß aufgrund von Satz 54.11, dass dieses Verfahren die Eigenverteilung beliebig gut approximiert. Eine Suchmaschine im Internet erstellt beispielsweise zu einem Suchbegriff eine Reihenfolge von Seiten, die diesen Begriff enthalten. Wie kommt diese Reihenfolge zustande? Die wahre Antwort ist, zumindest für die ersten Einträge, dass dies davon abhängt, wer am meisten dafür zahlt. Ansonsten ist ein natürlicher Ansatz, der auch Grundlage des Page ranks ist, die numerische Ordnung in der Eigenverteilung als ausschlaggebend anzusehen. Der oberste Eintrag ist derjenige, bei dem die meisten Leute „schließlich“ landen, wenn sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit allen möglichen Links folgen. Diese Wanderungsbewegung wird eben durch die stochastische Matrix, die man im Sinne von Beispiel 54.5 erhält, modelliert.<sup>12</sup>

Den numerischen Unterschied zwischen dem exakten Lösen eines linearen Gleichungssystems zur Bestimmung eines Eigenvektors und der *Potenzmethode* kann man folgendermaßen erfassen. Sei eine  $n \times n$ -Matrix gegeben. Das Gaussche Eliminationsverfahren braucht, um die erste Variable in  $n - 1$  Gleichungen zu eliminieren,  $n(n - 1) \sim n^2$  Multiplikationen (Additionen sind vom Rechenaufwand her einfacher und werden hier nicht berücksichtigt), die Größenordnung der Multiplikationen der Gesamtelimination ist somit

$$n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \cdots + 1 \sim \frac{1}{6}n^3.$$

Dagegen sind für die Auswertung der Matrix auf einen Vektor  $n^2$  Multiplikationen nötig. Wenn man  $k$  Iterationen berechnen möchte, braucht man also  $kn^2$  Operationen. Wenn also  $k$  deutlich kleiner als  $n$  gewählt werden kann, so ist der Gesamtrechenaufwand deutlich kleiner.

## 54. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 54.1.** Es sei  $M$  eine spaltenstochastische Matrix. Zeige, dass das Bild eines jeden Verteilungsvektors wieder ein Verteilungsvektor ist.

**Aufgabe 54.2.** Diskutiere in der Situation von Beispiel 54.2 die Spezialfälle

---

12

Unter *Modellierung* versteht man in der (insbesondere angewandten) Mathematik den Vorgang, realweltliche Phänomene mathematisch zu erfassen, zu verstehen und zu beeinflussen. Mathematisch modelliert werden physikalische Prozesse, Wetterphänomene, Finanzaktionen, etc.

- (1)  $p_1 = 1$  und  $p_2 = 1$ ,
- (2)  $p_1 = 1$  und  $p_2 = 0$ ,
- (3)  $p_1 = 0$  und  $p_2 = 1$ ,
- (4)  $p_1 = 0$  und  $p_2 = 0$ ,
- (5)  $p_1 = p_2$ ,
- (6)  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ .

**Aufgabe 54.3.** Finde einen Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 - p_1 & 1 - p_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$0 \leq p_1, p_2 \leq 1$$

zum Eigenwert  $p_1 - p_2$ . Handelt es sich um eine Eigenverteilung?

**Aufgabe 54.4.** Wir betrachten die spaltenstochastische Matrix

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 1 - r \\ 1 - p & q & 0 \\ 0 & 1 - q & r \end{pmatrix}$$

mit  $0 \leq p, q, r \leq 1$ .

- (a) Berechne die Eigenwerte der Matrix.
- (b) Berechne eine Eigenverteilung.

**Aufgabe 54.5.** Wir betrachten eine stochastische Matrix, bei der jede Spalte

gleich  $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$  ist. Bestimme die Eigenverteilung und eine Basis des Kerns zu dieser Matrix.

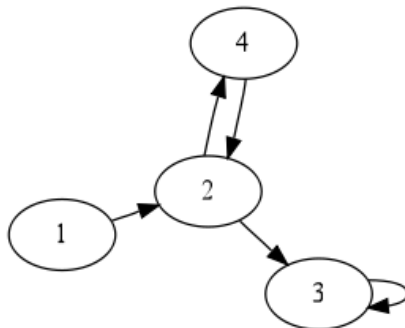
**Aufgabe 54.6.** Man interpretiere eine Permutationsmatrix als eine stochastische Matrix. Was sind die Eigenverteilungen?

**Aufgabe 54.7.** Was bedeutet es für eine spaltenstochastische Matrix, dass in einer Zeile alle Einträge positiv sind, und was bedeutet es, dass in einer Spalte alle Einträge positiv sind?

**Aufgabe 54.8.** Zeige, dass die Menge der spaltenstochastischen Matrizen in der Sphäre zum Radius 1 bezüglich der Spaltensummennorm enthalten ist. Gilt hierbei Gleichheit?

**Aufgabe 54.9.** Man mache sich klar, dass die Konzepte Relation auf einer Menge  $M$  (im Sinne von Definition 45.1, wobei die beiden beteiligten Mengen gleich sein mögen) und gerichteter Graph (im Sinne eines Pfeildiagrammes, wobei es von einem Punkt zu einem weiteren Punkt maximal einen Pfeil geben darf) mathematisch äquivalent sind.

**Aufgabe 54.10.** Erstelle die Adjazenzmatrix zum gerichteten Graphen unten.



**Aufgabe 54.11.** Welche Besonderheiten zeichnet eine Adjazenzmatrix zu einer Äquivalenzrelation aus?

**Aufgabe 54.12.** Drücke für die Gruppe  $C$  der Fußball-Europameisterschaft 2016 die Gewinnstruktur als eine Relation, durch ein Pfeildiagramm (einen gerichteten Graphen) und durch eine Adjazenzmatrix aus.

**Aufgabe 54.13.** Erstelle für die Gruppe  $C$  der Fußball-Europameisterschaft 2016 die stochastische Matrix, die sich aus der erweiterten Adjazenzmatrix zur Gewinnstruktur ergibt, bei der in der Diagonalen überall Einsen (Selbstsieg) stehen (damit keine Nullspalte auftritt). Wie lautet die zugehörige Eigenverteilung?

**Aufgabe 54.14.** In einer Fußballgruppe mit  $n$  Mannschaften (beispielsweise einer EM-Gruppe oder einer Bundesligahinrunde) spielt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft, bei einem Sieg gibt es 3 Punkte, bei einem Unentschieden 1 Punkt und bei einer Niederlage keinen Punkt. Die Ergebnisse werden in einer  $n \times n$ -Matrix derart verbucht, dass der Eintrag an der Stelle  $(M, N)$  angibt, wie viele Punkte die Mannschaft  $M$  im Spiel gegen  $N$  erzielt hat (an der Stelle  $(M, M)$  steht 0). Welcher Vektor kommt heraus,

wenn man diese Matrix auf den Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  anwendet? Erstelle diese Matrix

für die Gruppe  $C$  der Fußball-Europameisterschaft 2016.

**Aufgabe 54.15.** Bei Studierenden verschiedener Fächer wurden von einem Semester zum nächsten folgende Wanderungsbewegungen statistisch festgestellt:

- (a) Wer Mathematik studiert, bleibt zu 60% bei der Mathematik, wechselt zu 10% zur Philosophie, zu 10% zur Physik und nimmt sich zu 20% ein Freisemester.
  - (b) Wer Philosophie studiert, bleibt zu 40% bei der Philosophie, wechselt zu 10% zur Mathematik, zu 20% zur Physik und nimmt sich zu 30% ein Freisemester.
  - (c) Wer Physik studiert, bleibt zu 50% bei der Physik, wechselt zu 30% zur Mathematik und nimmt sich zu 20% ein Freisemester.
  - (d) Wer ein Freisemester eingelegt hat, bleibt zu 40% beim Freisemester und wechselt jeweils zu 20% zur Mathematik, zur Philosophie oder zur Physik.
- (1) Erstelle eine stochastische Matrix, die diese Wanderungsbewegungen darstellt.
  - (2) Durch welche Matrix wird die Wanderungsbewegung vom dritten zum sechsten Semester beschrieben?
  - (3) Die Erstsemester fangen zu einem Drittel mit den Studienfächern Mathematik, Philosophie oder Physik an. Wie groß ist der Anteil der Studierenden, die in ihrem vierten Semester ein Freisemester einlegen?

**Aufgabe 54.16.** Berechne die ersten fünf Iterationen zur spaltenstochastischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

zu den Startverteilungen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 54.17.** Berechne die ersten vier Iterationen zur spaltenstochastischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

zur Startverteilung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 54.18.** Berechne die Eigenverteilung zur spaltenstochastischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 54.19.** Wir betrachten die spaltenstochastische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Bestimme das minimale  $n$  derart, dass in der  $n$ -ten Potenz  $M^n$  die Differenz der ersten zur zweiten Spalte  $\leq \frac{1}{1000}$  bezüglich der Maximumnorm des  $\mathbb{R}^2$  ist.

**Aufgabe 54.20.** Es sei ein Kreis mit sechs (äquidistanten) Knoten gegeben, die mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet seien. Bei einem Bewegungsprozess seien die Wahrscheinlichkeiten, stehen zu bleiben oder zu dem linken oder rechten Nachbarn zu wechseln, konstant gleich  $\frac{1}{3}$ . Erstelle die zugehörige stochastische Matrix und berechne die Eigenverteilung(en).

**Aufgabe 54.21.** Es sei  $M$  eine spaltenstochastische  $n \times n$ -Matrix. Zeige direkt, dass 1 ein Eigenwert von  $M$  ist.

**Aufgabe 54.22.** Unter welchen Bedingungen gilt für reelle Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Gleichheit

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = \sum_{i=1}^n |a_i|?$$

**Aufgabe 54.23.** Es sei  $M$  eine  $n \times n$ -spaltenstochastische Matrix und sei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n u_i = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass  $U$  invariant unter  $M$  ist und dass  $M|_U$  asymptotisch stabil ist.

**Aufgabe 54.24.** Es sei  $M$  eine spaltenstochastische Matrix, bei der eine Zeile ausschließlich aus positiven Einträgen bestehe. Zeige, dass die Folge  $M^n$  gegen eine Matrix  $N$  konvergiert, bei der jede Spalte gleich ist.

**Aufgabe 54.25.** Wir wollen Aussagen über die Determinante einer spaltenstochastischen  $d \times d$ -Matrix machen.

- (a) Zeige, dass für die Determinante einer spaltenstochastischen Matrix  $M$  die Beziehung

$$|\det M| \leq 1$$

gilt.

- (b) Man gebe ein Beispiel für eine spaltenstochastische Matrix, die nicht die Einheitsmatrix sei, mit

$$\det M = 1$$

- (c) Es sei  $d \geq 2$  und  $M$  besitze zusätzlich die Eigenschaft, dass es eine Zeile mit ausschließlich positiven Einträgen gebe. Zeige

$$|\det M| < 1$$

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 54.26.** (3 Punkte)

Zeige, dass die Menge der spaltenstochastischen Matrizen eine abgeschlossene Teilmenge im Matrizenraum  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  ist.

**Aufgabe 54.27.** (4 Punkte)

Berechne die ersten vier Iterationen zur spaltenstochastischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{8}{21} \end{pmatrix}$$

zur Startverteilung

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 54.28.** (3 Punkte)

Berechne die Eigenverteilung zur spaltenstochastischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{8}{21} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 54.29.** (3 Punkte)

Zeige, dass das Produkt von zwei spaltenstochastischen Matrizen wieder spaltenstochastisch ist. Ist die inverse Matrix zu einer invertierbaren spaltenstochastischen Matrix wieder spaltenstochastisch?

**Aufgabe 54.30.** (8 Punkte)

Eine (Fußball-)Spielgruppe bei einer Europa- oder Weltmeisterschaft besteht aus vier Mannschaften, und jede spielt gegen jede. Ein Spiel kann unentschieden oder mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften enden. Wir interessieren uns für die diskrete Struktur einer Spielgruppe, die man durch einen gerichteten Graphen beschreiben kann, wobei man einen Sieg von  $A$  über  $B$  durch einen Pfeil von  $A$  nach  $B$  (und ein Unentschieden durch keine Verbindung) ausdrücken kann.

Definiere einen Isomorphiebegriff für Spielgruppen und klassifiziere die Spielgruppen entlang geeigneter numerischer Invarianten. Wie viele Spielgruppen gibt es? Aus welchen Isomorphietypen lässt sich die Tabellenordnung ableiten, aus welchen nicht?

## 55. VORLESUNG - TENSORPRODUKT I

**Beispiel 55.1.** Es sei  $K$  ein Körper. Wir betrachten zu zwei endlichen Indexmengen  $I$  und  $J$  die Abbildungsräume  $\text{Abb}(I, K)$  und  $\text{Abb}(J, K)$ , die beide endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume sind. In welcher Beziehung stehen sie zur Abbildungsmenge

$$\text{Abb}(I \times J, K) ?$$

Zu Abbildungen  $f \in \text{Abb}(I, K)$  und  $g \in \text{Abb}(J, K)$  kann man einfach eine Abbildung auf  $I \times J$  erhalten, die man  $f \otimes g$  nennt (sprich  $f$  tensor  $g$ ) und die durch

$$(f \otimes g)(i, j) := f(i) \cdot g(j)$$

festgelegt ist. Für die Standardvektoren gilt dabei

$$e_i \otimes e_j = e_{(i,j)}.$$

Jedes Element  $h \in \text{Abb}(I \times J, K)$  kann man insbesondere als eine Linearkombination zu Elementen  $f \otimes g$  schreiben, aber nicht jedes  $h$  hat diese einfache Gestalt. Es gilt

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2) \otimes g = a_1(f_1 \otimes g) + a_2(f_2 \otimes g)$$

und entsprechend in der zweiten Komponente.

In dieser Vorlesung führen wir eine wichtige Konstruktion für Vektorräume ein, das sogenannte *Tensorprodukt*, das im soeben betrachteten Spezialfall den Abbildungsraum auf der Produktmenge ergibt; es ist also

$$\text{Abb}(I, K) \otimes_K \text{Abb}(I, K) \cong \text{Abb}(I \times J, K).$$

Die Eigenschaften des konstruierten Objektes sind dabei wichtiger als die Konstruktion selbst. Die Konstruktion ist sehr abstrakt und beruht auf der Konstruktion von Restklassenräumen und folgender Konstruktion.

Zu einer beliebigen Symbolmenge  $S$  und einem Körper  $K$  kann man den Vektorraum  $K^{(S)}$  konstruieren, der aus allen Abbildungen

$$S \longrightarrow K$$

besteht, die überall bis an endlich vielen Stellen den Wert 0 besitzen. Wenn man mit  $e_s$  diejenige Abbildung bezeichnet, die an der Stelle  $s$  den Wert 1 und sonst überall den Wert 0 besitzt, so besteht  $K^{(S)}$  aus allen endlichen Summen

$$\sum_{s \in S} a_s e_s.$$

Die  $e_s$  bilden also eine Basis dieses Raumes.

Diese Konstruktion ist wiederum ein Spezialfall der direkten Summe von (im Allgemeinen) unendlich vielen  $K$ -Vektorräumen, und zwar wird hier die direkte Summe des Vektorraums  $K$  mit sich selbst so oft genommen, wie es  $S$  vorgibt.

## DAS TENSORPRODUKT VON VEKTORRÄUMEN

Es sei  $K$  ein Körper und  $V_1, \dots, V_n$  seien  $K$ -Vektorräume. Wir erinnern daran, dass eine multilineare Abbildung in einen weiteren  $K$ -Vektorraum  $W$  eine Abbildung

$$\psi: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

ist, die in jeder Komponente  $K$ -linear ist, wenn man alle anderen Komponenten festlässt. Wir wollen einen Vektorraum  $U$  konstruieren zusammen mit einer multilinearen Abbildung

$$\varphi: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow U$$

derart, dass es zu jeder multilinearen Abbildung  $\psi$  wie oben eine lineare Abbildung

$$L: U \longrightarrow W$$

mit  $\psi = L \circ \varphi$  gibt. Dadurch werden multilineare Abbildungen auf lineare Abbildungen auf einem neuen Vektorraum zurückgeführt.

**Definition 55.2.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V_1, \dots, V_n$  seien  $K$ -Vektorräume. Es sei  $F$  der von sämtlichen Symbolen  $(v_1, \dots, v_n)$  (mit  $v_i \in V_i$ ) erzeugte  $K$ -Vektorraum (wir schreiben die Basiselemente als  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$ ). Es sei  $U \subseteq F$  der von allen Elementen der Form

- (1)  $re_{(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)} - e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, rv_i, v_{i+1}, \dots, v_n)}$ ,
- (2)  $e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, u+w, v_{i+1}, \dots, v_n)} - e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n)} - e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}$ ,

erzeugte  $K$ -Untervektorraum von  $F$ . Dann nennt man den Restklassenraum  $F/U$  das *Tensorprodukt* der  $V_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Es wird mit

$$V_1 \otimes_K V_2 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$$

bezeichnet.

Häufig schreibt man einfach  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ . Die Bilder von  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$  in  $V_1 \otimes_K V_2 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$  bezeichnet man mit

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n.$$

Dies ist also die Äquivalenzklasse von  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$  zu der durch den Untervektorraum  $U$  gegebenen Äquivalenzrelation. Jedes Element aus  $V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$  besitzt eine (nicht eindeutige) Darstellung als

$$a_1 v_{1,1} \otimes \cdots \otimes v_{1,n} + \cdots + a_m v_{m,1} \otimes \cdots \otimes v_{m,n}$$

(mit  $a_i \in K$  und  $v_{i,j} \in V_j$ ). Insbesondere bilden die *zerlegbaren Tensoren*  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  ein  $K$ -Erzeugendensystem des Tensorprodukts. Die definierenden Erzeuger des Untervektorraums  $U \subseteq F$  werden zu Gleichungen im Tensorprodukt, sie drücken die Multilinearität aus. Insbesondere gilt

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes rv_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n = r(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n)$$

für beliebige  $i$  und

$$\begin{aligned} & v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes (u+w) \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes u \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n + v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes w \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n. \end{aligned}$$

**Beispiel 55.3.** Zu  $K = \mathbb{R}$  und  $V_1 = \mathbb{R}^2$  und  $V_2 = \mathbb{R}^3$  sind die Elemente aus  $F$  (im Sinne der Definition 55.2) Linearkombinationen wie

$$4e_{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)} - 5e_{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)} + 6e_{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}\right)}.$$

Mit den Standardvektoren des  $\mathbb{R}^2$  bzw. des  $\mathbb{R}^3$  ist dies

$$4e_{(3e_1+2e_2, 6e_1-e_2+5e_3)} - 5e_{(e_1+7e_2, 3e_1+3e_2+4e_3)} + 6e_{(2e_1+4e_2, -4e_1+7e_2+8e_3)}.$$

Da die Tupel untereinander verschieden sind, kann man diesen Ausdruck in  $F$  nicht vereinfachen. Das Bild dieses Elementes in  $F/U = \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$  ist

$$4(3e_1+2e_2) \otimes (6e_1-e_2+5e_3) - 5(e_1+7e_2) \otimes (3e_1+3e_2+4e_3) + 6(2e_1+4e_2) \otimes (-4e_1+7e_2+8e_3).$$

Diesen Ausdruck kann man wesentlich vereinfachen, und als eine Linearkombination der Familie  $e_i \otimes e_j$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3$ , darstellen.

Wichtiger als die Konstruktion des Tensorprodukts ist die folgende *universelle Eigenschaft*.

**Satz 55.4.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume über  $K$ .*

(1) *Die Abbildung*

$$\pi: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n, (v_1, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n,$$

*ist  $K$ -multilinear.*

(2) *Es sei  $W$  ein weiterer  $K$ -Vektorraum und*

$$\psi: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

*eine multilineare Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte  $K$ -lineare Abbildung*

$$\bar{\psi}: V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \longrightarrow W$$

*mit  $\psi = \bar{\psi} \circ \pi$ .*

*Beweis.* (1) folgt unmittelbar aus der Definition des Tensorprodukts. (2). Da die  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  ein  $K$ -Erzeugendensystem von  $V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$  sind und

$$\bar{\psi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \psi(v_1, \dots, v_n)$$

gelten muss, kann es maximal eine solche lineare Abbildung geben. Zur Existenz betrachten wir den  $K$ -Vektorraum  $F$  aus der Konstruktion des Tensorproduktes. Die  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$  bilden eine Basis von  $F$ , daher legt die Vorschrift

$$\tilde{\psi}(e_{(v_1, \dots, v_n)}) := \psi(v_1, \dots, v_n)$$

eine lineare Abbildung

$$\tilde{\psi}: F \longrightarrow W$$

fest. Wegen der Multilinearität von  $\psi$  wird der Untervektorraum  $U$  unter  $\tilde{\psi}$  auf 0 abgebildet. Daher induziert diese Abbildung nach dem Faktorisierungssatz eine  $K$ -lineare Abbildung

$$\bar{\psi}: F/U \cong V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \longrightarrow W.$$

□

**Korollar 55.5.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ . Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\text{Hom}_K(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W) \longrightarrow \text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W), \varphi \longmapsto \varphi \circ \pi.$$

*Beweis.* Aus Satz 55.4 (2) folgt unmittelbar, dass eine Bijektion vorliegt. □

**Korollar 55.6.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume über  $K$ . Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* \longrightarrow \text{Mult}_K(V_1, \dots, V_n; K), \varphi \longmapsto \varphi \circ \pi.$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Korollar 55.5, angewendet auf  $W = K$ .  $\square$

**Bemerkung 55.7.** Bei  $V = V_1 = V_2$  und  $W = K$  sind die multilinearen Abbildungen von  $V_1 \times V_2$  nach  $W$  einfach die Bilinearformen auf  $V$ . Korollar 55.6 besagt in dieser Situation, dass der Dualraum zu  $V \otimes V$  alle Bilinearformen repräsentiert. Bei  $V = K^n$  entspricht das Standardskalarprodukt (diese Bezeichnung ist nur bei  $K = \mathbb{R}$  korrekt) der Linearform  $\varphi: V \otimes V \rightarrow K$ , die durch

$$\varphi(e_i \otimes e_j) = \delta_{ij}$$

festgelegt ist.

Das Tensorprodukt ist durch die universelle Eigenschaft bis auf (eindeutige) Isomorphie festgelegt, damit ist folgendes gemeint.

**Satz 55.8.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume über  $K$ . Es sei  $Z$  ein  $K$ -Vektorraum zusammen mit einer multilinearen Abbildung*

$$\rho: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow Z,$$

*die zusammen die universelle Eigenschaft aus Satz 55.4 (2) erfüllen. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus*

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow Z.$$

*Beweis.* Da  $V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow Z$  multilinear ist, gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow Z.$$

Wegen der vorausgesetzten universellen Eigenschaft von  $Z$  und der Multilinearität von  $\pi: V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  gibt es auch eine lineare Abbildung

$$Z \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n.$$

Wegen der universellen Eigenschaft müssen diese invers zueinander sein.  $\square$

Daher ist diese universelle Eigenschaft wichtiger als die oben durchgeführte Konstruktion des Tensorproduktes.

**Lemma 55.9.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume über  $K$ . Dann gelten die folgenden Rechengesetze.*

(1) Für Vektoren  $v_j \in V_j$  und  $c \in K$  ist

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes cv_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n = c(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n).$$

(2) Für Vektoren  $v_j \in V_j$  ist

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes 0 \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n = 0.$$

(3) Es seien  $v_{i1}, \dots, v_{im_i} \in V_i$  und  $a_{ij} \in K$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=1}^{m_1} a_{1j} v_{1j} \right) \otimes \cdots \otimes \left( \sum_{j=1}^{m_n} a_{nj} v_{nj} \right) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, m_1\} \times \cdots \times \{1, \dots, m_n\}} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n}. \end{aligned}$$

*Beweis.* (1) ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion. (2) folgt aus (1). (3) folgt aus dem Distributivgesetz für multilineare Abbildungen.  $\square$

**Beispiel 55.10.** Im  $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$  gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} &= (5e_1 - 7e_2) \otimes (-3e_1 + 4e_2) \\ &= -15e_1 \otimes e_1 + 20e_1 \otimes e_2 + 21e_2 \otimes e_1 - 28e_2 \otimes e_2. \end{aligned}$$

**Lemma 55.11.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) Es ist

$$V \otimes_K 0 = 0.$$

(2) Es ist

$$V \otimes_K K = V,$$

wobei  $v \otimes s$  dem Vektor  $sv$  entspricht.

*Beweis.* (1) folgt aus Lemma 55.9 (2).

(2). Die Skalarmultiplikation

$$V \times K \longrightarrow V, (v, s) \longmapsto sv,$$

ist multilinear, daher gibt es nach Satz 55.4 eine lineare Abbildung

$$V \otimes K \longrightarrow V, v \otimes s \longmapsto sv.$$

Diese ist surjektiv, da  $v \otimes 1$  auf  $v$  abgebildet wird. Ein Element im Tensorprodukt hat die Gestalt

$$\sum_{i=1}^n a_i (v_i \otimes s_i) = \sum_{i=1}^n (a_i s_i) (v_i \otimes 1) = \left( \sum_{i=1}^n a_i s_i v_i \right) \otimes 1.$$

Wenn dieses auf 0 abgebildet wird, so ist also

$$\sum_{i=1}^n a_i s_i v_i = 0$$

und damit ist das Tensorelement auch 0, die Abbildung ist also auch injektiv.  $\square$

**Satz 55.12.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume über  $K$ . Es seien  $J_1, \dots, J_n$  Indexmengen und*

$$v_{ij}, j \in J_i,$$

*Vektoren in  $V_i$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Wenn die Familien jeweils ein Erzeugendensystem von  $V_i$  bilden, so ist die Familie*

$$v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n} \text{ mit } (j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$$

*ein Erzeugendensystem von  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ .*

- (2) *Wenn die Familien jeweils linear unabhängig in  $V_i$  sind, so ist die Familie*

$$v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n} \text{ mit } (j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$$

*linear unabhängig in  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ .*

- (3) *Wenn die Familien jeweils eine Basis von  $V_i$  bilden, so ist die Familie*

$$v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n} \text{ mit } (j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$$

*eine Basis von  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ .*

*Beweis.* (1). Nach Konstruktion bilden die zerlegbaren Tensoren  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  ein Erzeugendensystem des Tensorproduktes. Somit muss man nur von diesen nachweisen, dass sie als Linearkombination der gegebenen Familie darstellbar sind. Dies ergibt sich aber aus Lemma 55.9 (3).

(2). Zum Beweis können wir uns auf endliche Familien beschränken. Wir wollen Lemma 14.8 anwenden. Es sei  $(r_1, \dots, r_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$  fixiert. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Familien  $v_{ij}$ ,  $j \in J_i$ , in  $V_i$  und dem Basisergänzungssatz gibt es Linearformen

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow K$$

mit  $\varphi_i(v_{ir_i}) \neq 0$  und  $\varphi_i(v_{ij}) = 0$  für  $j \neq r_i$ . Somit ist

$$V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow K, (w_1, \dots, w_n) \longmapsto \varphi_1(w_1) \cdots \varphi_n(w_n),$$

nach Aufgabe 16.39 eine multilineare Abbildung. Die gemäß Korollar 55.6 zugehörige lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow K$$

schickt  $v_{1r_1} \otimes \cdots \otimes v_{nr_n}$  auf

$$\varphi_1(v_{1r_1}) \cdots \varphi_n(v_{nr_n}) \neq 0$$

und alle anderen Elemente  $v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n}$  der Familie auf 0.

(3) folgt aus (1) und (2). □

**Korollar 55.13.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  endlichdimensionale Vektorräume über  $K$ . Dann ist die Dimension des Tensorproduktes gleich*

$$\dim_K (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = \dim_K (V_1) \cdots \dim_K (V_n).$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 55.12 (3). □

**Bemerkung 55.14.** Wir verbinden das motivierende Beispiel 55.1 mit der allgemeinen Konstruktion des Tensorproduktes. Die Abbildung (mit der direkten Bedeutung von  $f \otimes g$  aus dem Beispiel)

$$\text{Abb} (I, K) \times \text{Abb} (J, K) \longrightarrow \text{Abb} (I \times J, K), (f, g) \longmapsto f \otimes g,$$

ist nach Aufgabe 55.5 multilinear. Nach Satz 55.4 (2) gibt es daher eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\text{Abb} (I, K) \otimes_K \text{Abb} (J, K) \longrightarrow \text{Abb} (I \times J, K),$$

wobei sich die Tensorprodukte entsprechen. Die Surjektivität ergibt sich daraus, dass die Basiselemente  $e_{(i,j)}$  im Bild liegen. Die Injektivität ergibt sich aus Korollar 55.13.

## 55. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

Wir erinnern an die folgenden fünf Aufgaben, das Tensorprodukt erlaubt eine neue Sichtweise.

**Aufgabe 55.1.** Es sei  $K$  ein Körper und  $I$  eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I := \text{Abb} (I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein  $K$ -Vektorraum ist.

**Aufgabe 55.2.** Es sei  $K$  ein Körper, sei  $I$  eine Indexmenge, und  $K^I = \text{Abb} (I, K)$  der zugehörige Vektorraum.

(a) Zeige, dass

$$E = \{f \in K^I \mid f(i) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen}\}$$

ein Untervektorraum von  $K^I$  ist.

(b) Zu jedem  $i \in I$  sei  $e_i \in K^I$  durch

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben. Man zeige, dass sich jedes Element  $f \in E$  eindeutig als Linearkombination der Familie  $e_i, i \in I$ , darstellen lässt.

**Aufgabe 55.3.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $S$  und  $T$  Mengen. Zeige, dass durch eine Abbildung

$$\psi: S \longrightarrow T$$

eine lineare Abbildung

$$\text{Abb}(T, K) \longrightarrow \text{Abb}(S, K), \varphi \longmapsto \varphi \circ \psi,$$

festgelegt ist.

**Aufgabe 55.4.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $S$  und  $T$  Mengen. Es sei

$$\psi: S \longrightarrow T$$

eine Abbildung.

(a) Zeige, dass durch  $e_s \mapsto e_{\psi(s)}$  eine lineare Abbildung

$$K^{(S)} \longrightarrow K^{(T)}$$

festgelegt ist.

(b) Es habe nun  $\psi$  zusätzlich die Eigenschaft, dass sämtliche Fasern endlich seien. Zeige, dass dadurch eine lineare Abbildung

$$K^{(T)} \longrightarrow K^{(S)}, \varphi \longmapsto \varphi \circ \psi,$$

festgelegt ist.

**Aufgabe 55.5.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $I$  und  $J$  endliche Indexmengen. Zeige, dass die Abbildung

$$\text{Abb}(I, K) \times \text{Abb}(J, K) \longrightarrow \text{Abb}(I \times J, K), (f, g) \longmapsto f \otimes g,$$

mit

$$(f \otimes g)(i, j) := f(i) \cdot g(j)$$

multilinear ist.

**Aufgabe 55.6.** Zeige, dass im Allgemeinen in einem Tensorprodukt  $V \otimes_K W$  nicht jeder Vektor von der Form  $v \otimes w$  ist.

Mit berechnen ist in den folgenden Aufgaben gemeint, die Tensorprodukte als Linearkombinationen von Tensorprodukten zu den Standardvektoren auszudrücken.

**Aufgabe 55.7.** Berechne in  $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$  das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 55.8.** Berechne in  $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$  das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 55.9.** Berechne in  $\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$  das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 55.10.** Berechne in  $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$  das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 55.11.** Berechne in  $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$  das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -7 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 55.12.** Berechne in  $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3$  das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 - 5i \\ 4 + i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 6 \\ 1 - i \\ 2 + 3i \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 55.13.** Berechne in  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  das Tensorprodukt

$$(4 - 5i) \otimes (3 - 7i) \otimes (-2 - 6i).$$

**Aufgabe 55.14.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit dem Dualraum  $V^*$ . Zeige, dass es eine Linearform

$$V^* \otimes V \longrightarrow K$$

gibt, die  $f \otimes v$  auf  $f(v)$  abbildet.

**Aufgabe 55.15.** Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ . Es sei  $V^*$  der Dualraum zu  $V$ . Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Es gibt eine multilineare Abbildung

$$V^* \times W \longrightarrow \text{Hom}_K(V, W), (f, w) \longmapsto (v \mapsto f(v)w).$$

(b) Es gibt eine lineare Abbildung

$$\psi: V^* \otimes W \longrightarrow \text{Hom}_K(V, W),$$

die  $f \otimes w$  auf die lineare Abbildung  $v \mapsto f(v)w$  abbildet.

(c) Wenn  $V$  und  $W$  endlichdimensional sind, so ist  $\psi$  aus Teil (b) ein Isomorphismus.

**Aufgabe 55.16.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $(V_1, \langle -, - \rangle_1), \dots, (V_n, \langle -, - \rangle_n)$  Vektorräume über  $K$ , auf denen jeweils eine Bilinearform  $\langle -, - \rangle_i$  fixiert sei. Zeige, dass auf den Tensorprodukt  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  eine Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  gegeben ist, für die

$$\langle v_1 \otimes \dots \otimes v_n, w_1 \otimes \dots \otimes w_n \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle_1 \cdots \langle v_n, w_n \rangle_n$$

gilt.

**Aufgabe 55.17.** Der  $\mathbb{R}^4$  sei mit der Minkowski-Standard-Form versehen. Bestimme die zugehörige Linearform auf  $\mathbb{R}^4 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ .

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 55.18.** (2 Punkte)

Berechne in  $\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$  das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 55.19.** (3 Punkte)

Berechne in  $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$  das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-i \\ -i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 3+2i \\ 4-3i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1+i \\ 2+i \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 55.20.** (3 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ , die bezüglich der Basis  $v_1, \dots, v_d$  von  $V$  durch die Gramsche Matrix

$$M = (a_{ij})$$

beschrieben werde. Beschreibe die zugehörige Linearform auf  $V \otimes_K V$  bezüglich der zugehörigen Basis.

**Aufgabe 55.21.** (4 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper und seien  $U, V, W$  Vektorräume über  $K$ . Stifte eine lineare Abbildung

$$\text{Hom}_K(U, V) \otimes \text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_K(U, W),$$

die  $\psi \otimes \varphi$  auf  $\varphi \circ \psi$  abbildet.

## 56. VORLESUNG - TENSORPRODUKT II

## BASISWECHSEL BEI TENSORPRODUKTEN

**Lemma 56.1.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  endlichdimensionale Vektorräume über  $K$ . Es seien  $v_{1j}, j \in J_1, \dots, v_{nj}, j \in J_n$ , und  $w_{1j}, j \in J_1, \dots, w_{nj}, j \in J_n$ , Basen von  $V_1, \dots, V_n$  mit den Basiswechselmatrizen*

$$B_i = M_{\mathbf{w}_i}^{\mathbf{v}_i} = (a_{irs})_{1 \leq r, s \leq \dim_K(V_i)}.$$

*Dann ist die Basiswechselmatrix (mit  $J = J_1 \times \dots \times J_n$ ) zwischen den Basen*

$$v_{1j_1} \otimes \dots \otimes v_{nj_n}, (j_1, \dots, j_n) \in J \text{ und } w_{1j_1} \otimes \dots \otimes w_{nj_n}, (j_1, \dots, j_n) \in J$$

*des Tensorproduktes durch die  $J \times J$ -Matrix mit den Einträgen*

$$c_{(j_1, \dots, j_n), (k_1, \dots, k_n)} = a_{1j_1 k_1} \dots a_{nj_n k_n}$$

*beschrieben.*

*Beweis.* Nach der Definition 9.2 der Basiswechselmatrix ist

$$v_{is} = \sum_{r \in J_i} a_{irs} w_{ir}.$$

Somit ist unter Verwendung von Lemma 55.9 (3)

$$\begin{aligned} v_{1k_1} \otimes \cdots \otimes v_{nk_n} &= \left( \sum_{j_1 \in J_1} a_{1j_1k_1} w_{1j_1} \right) \otimes \cdots \otimes \left( \sum_{j_n \in J_n} a_{nj_nk_n} w_{nj_n} \right) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in J} a_{1j_1k_1} \cdots a_{nj_nk_n} w_{1j_1} \otimes \cdots \otimes w_{nj_n}, \end{aligned}$$

und diese Koeffizienten bilden die Basiswechselmatrix.  $\square$

**Beispiel 56.2.** Wir betrachten den  $\mathbb{R}^2$  mit den Basen  $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$  und der Standardbasis  $\mathfrak{w}$  und  $\mathbb{C}$  als reellen Vektorraum mit den Basen  $\mathfrak{x} = 3 - 2i, 4 + 5i$  und  $\mathfrak{y} = 1, i$ . Damit sind die Basiswechselmatrizen, wie sie in Lemma 56.1 auftreten, gleich

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

und

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir folgen der Anordnung  $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$  und erhalten die Basiswechselmatrix

$$\begin{pmatrix} 15 & 20 & -9 & -12 \\ -10 & 25 & 6 & -15 \\ 18 & 24 & 24 & 32 \\ -12 & 30 & -16 & 40 \end{pmatrix}.$$

In der zweiten Spalte steht beispielsweise, wie man  $v_1 \otimes x_2$  als Linearkombination der  $w_1 \otimes y_1, w_1 \otimes y_2, w_2 \otimes y_1, w_2 \otimes y_2$  ausdrückt.

## TENSORPRODUKT UND DUALRAUM

**Satz 56.3.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  endlichdimensionale Vektorräume über  $K$ . Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\begin{aligned} V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* &\longrightarrow (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^*, \\ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n &\longmapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f_1(v_1) \cdots f_n(v_n)). \end{aligned}$$

*Beweis.* Für fixierte Linearformen  $f_1 \in V_1^*, \dots, f_n \in V_n^*$  ist die Abbildung

$$V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow K, (v_1, \dots, v_n) \longmapsto f_1(v_1) \cdots f_n(v_n),$$

nach Aufgabe 16.39 multilinear und definiert daher eine Linearform auf  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ . Dies ergibt die Abbildung

$$\Psi: V_1^* \times \cdots \times V_n^* \longrightarrow (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^*,$$

$$(f_1, \dots, f_n) \mapsto ((v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \mapsto f_1(v_1) \cdots f_n(v_n)).$$

Diese Gesamtzuordnung  $\Psi$  ist ebenfalls multilinear und ergibt somit eine lineare Abbildung

$$V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^* \longrightarrow (V_1 \otimes \dots \otimes V_n)^*.$$

Nach Korollar 55.13 und Korollar 13.12 haben die Räume die gleiche Dimension. Es seien  $v_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq \dim_K(V_i)$ , Basen der  $V_i$ . Dann bilden die  $v_{1j_1} \otimes \dots \otimes v_{nj_n}$  nach Satz 55.12 (3) eine Basis von  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  und die Dualbasis dazu eine Basis des Dualraumes. Wir behaupten die Gleichheit der linearen Abbildungen

$$\Psi(v_{1j_1}^* \otimes \dots \otimes v_{nj_n}^*) = (v_{1j_1} \otimes \dots \otimes v_{nj_n})^*.$$

Diese ergibt sich, da beide Abbildungen, angewendet auf die Basiselemente  $v_{1k_1} \otimes \dots \otimes v_{nk_n}$ , bei  $(k_1, \dots, k_n) = (j_1, \dots, j_n)$  den Wert 1 und andernfalls den Wert 0 ergeben. Daher ist  $\Psi$  surjektiv und damit auch injektiv.  $\square$

**Lemma 56.4.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $U, V, W$  seien  $K$ -Vektorräume. Dann gelten folgende Aussagen (im Sinne einer kanonischen Isomorphie).*

(1) *Es ist*

$$U \otimes_K V \cong V \otimes_K U.$$

(2) *Es ist*

$$U \otimes_K (V \otimes_K W) \cong (U \otimes_K V) \otimes_K W.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 56.2.  $\square$

## TENSORPRODUKTE VON LINEAREN ABBILDUNGEN

**Lemma 56.5.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n$  Vektorräume über  $K$ . Es seien*

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow W_i$$

*$K$ -lineare Abbildungen. Dann gibt es eine wohldefinierte lineare Abbildung*

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \longrightarrow W_1 \otimes \dots \otimes W_n$$

*mit*

$$\psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) := \varphi_1(v_1) \otimes \dots \otimes \varphi_n(v_n).$$

*Beweis.* Die Gesamtabbildung

$$V_1 \times \dots \times V_n \xrightarrow{\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n} W_1 \times \dots \times W_n \xrightarrow{\pi} W_1 \otimes \dots \otimes W_n$$

ist nach Aufgabe 16.30 multilinear. Dies induziert nach Satz 55.4 eine lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \longrightarrow W_1 \otimes \dots \otimes W_n, v_1 \otimes \dots \otimes v_n \longmapsto \varphi_1(v_1) \otimes \dots \otimes \varphi_n(v_n).$$

$\square$

**Definition 56.6.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n$  Vektorräume über  $K$ . Zu  $K$ -linearen Abbildungen

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow W_i$$

heißt die lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow W_1 \otimes \cdots \otimes W_n, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto \varphi_1(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(v_n),$$

das *Tensorprodukt* der  $\varphi_i$ . Es wird mit  $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$  bezeichnet.

**Proposition 56.7.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $U, V, Z$  Vektorräume über  $K$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Zu einer  $K$ -linearen Abbildung  $\varphi: U \rightarrow V$  gibt es eine natürliche  $K$ -lineare Abbildung  $\varphi \otimes_K \text{Id}_Z: U \otimes_K Z \rightarrow V \otimes_K Z$ .*
- (2) *Wenn  $\varphi$  surjektiv ist, ist auch  $\varphi \otimes_K \text{Id}_Z$  surjektiv.*
- (3) *Wenn  $\varphi$  injektiv ist, so ist auch  $\varphi \otimes_K \text{Id}_Z$  injektiv.*

*Beweis.* (1). Dies ist ein Spezialfall von Lemma 56.5.

(2). Die Surjektivität der Abbildung

$$U \otimes_K Z \longrightarrow V \otimes_K Z$$

ist klar, da die  $v \otimes z$  ein  $K$ -Erzeugendensystem von  $V \otimes_K Z$  bilden und diese im Bild der Abbildung liegen.

(3). Wegen der Injektivität können wir

$$U \subseteq V$$

als Untervektorraum auffassen. Eine Basis  $u_i, i \in I$ , von  $U$  können wir zu einer Basis  $u_i, i \in J$ , mit  $I \subseteq J$  von  $V$  ergänzen. Sei  $z_\ell, \ell \in L$ , eine Basis von  $Z$ . Dann ist nach Satz 55.12 (3) die Familie  $v_j \otimes z_\ell, (j, \ell) \in J \times L$ , eine Basis von  $V \otimes Z$  und  $v_i \otimes z_\ell, (i, \ell) \in I \times L$ , ist eine Teilmenge davon, die eine Basis von  $U \otimes Z$  ist. Also wird unter

$$U \otimes Z \longrightarrow V \otimes Z$$

eine Basis auf linear unabhängige Elemente abgebildet und somit ist diese Abbildung injektiv.  $\square$

Von daher werden wir zu Untervektorräumen  $U_1 \subseteq V_1, \dots, U_n \subseteq V_n$  das Tensorprodukt  $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$  als Untervektorraum von  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  auffassen.

**Korollar 56.8.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $U, V, W$  seien  $K$ -Vektorräume. Dann ist*

$$U \otimes_K (V \oplus W) \cong (U \otimes_K V) \oplus (U \otimes_K W).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 56.5.  $\square$

## KÖRPERWECHSEL

Schon häufig haben wir ein reelles Problem dadurch vereinfacht, dass wir es als Problem über den komplexen Zahlen aufgefasst haben. Wenn die Situation mit einer reellen Matrix formuliert werden kann, so kann man diese direkt als eine komplexe Matrix auffassen und dafür die (nichtreellen) komplexen Eigenwerte berechnen und ähnliches. Matrizen sind im Allgemeinen von der Wahl von Basen abhängige Beschreibungen mathematischer Objekte. Mit dem Tensorprodukt kann man den Übergang zum Komplexen auf der Ebene der Objekte selbst sinnvoll beschreiben. Wir betrachten daher hier den Fall des Tensorproduktes, wenn über  $K$  ein  $K$ -Vektorraum  $V$  und eine Körpererweiterung  $K \subseteq L$  vorliegt. Wir fixieren die verwendeten Sprechweisen.

**Definition 56.9.** Eine Teilmenge  $K \subseteq L$  eines Körpers  $L$  heißt *Unterkörper* von  $L$ , wenn folgende Eigenschaften gelten.

- (1) Es ist  $0, 1 \in K$ .
- (2) Mit  $a, b \in K$  ist auch  $a + b \in K$ .
- (3) Mit  $a, b \in K$  ist auch  $a \cdot b \in K$ .
- (4) Mit  $a \in K$  ist auch  $-a \in K$ .
- (5) Mit  $a \in K, a \neq 0$ , ist auch  $a^{-1} \in K$ .

**Definition 56.10.** Es sei  $L$  ein Körper und  $K \subseteq L$  ein Unterkörper von  $L$ . Dann heißt  $L$  ein *Erweiterungskörper* (oder *Oberkörper*) von  $K$  und die Inklusion  $K \subseteq L$  heißt eine *Körpererweiterung*.

**Lemma 56.11.** *Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung. Dann ist  $L$  in natürlicher Weise ein  $K$ -Vektorraum.*

*Beweis.* Die Skalarmultiplikation

$$K \times L \longrightarrow L, (\lambda, x) \longmapsto \lambda x,$$

wird einfach durch die Multiplikation in  $L$  gegeben. Die Vektorraumaxiome folgen dann direkt aus den Körperaxiomen.  $\square$

**Definition 56.12.** Zu einem  $K$ -Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  und einer Körpererweiterung  $K \subseteq L$  nennt man  $L \otimes_K V$  den *durch Körperwechsel gewonnenen  $L$ -Vektorraum*.

Statt  $L \otimes_K V$  schreibt man auch  $V_L$ .

**Proposition 56.13.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Das Tensorprodukt  $L \otimes_K V$  ist ein  $L$ -Vektorraum.*
- (2) *Es gibt eine kanonische  $K$ -lineare Abbildung*

$$V \longrightarrow L \otimes_K V, v \longmapsto 1 \otimes v.$$

*Bei  $K = L$  ist dies ein Isomorphismus.*

(3) Zu einer  $K$ -linearen Abbildung  $\varphi: V \rightarrow W$  ist die induzierte Abbildung

$$\text{Id}_L \otimes \varphi: L \otimes_K V \longrightarrow L \otimes_K W$$

eine  $L$ -lineare Abbildung.

(4) Zu  $V = K^n$  ist

$$L \otimes_K K^n \cong L^n.$$

(5) Zu einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  ist

$$\dim_K(V) = \dim_L(L \otimes_K V).$$

(6) Zu einer weiteren Körpererweiterung  $L \subseteq M$  ist

$$M \otimes_K V \cong M \otimes_L (L \otimes_K V)$$

(eine Isomorphie von  $M$ -Vektorräumen).

*Beweis.* (1). Die Multiplikation

$$L \times L \longrightarrow L, (r, s) \longmapsto rs,$$

ist  $L$ -bilinear und insbesondere  $K$ -bilinear und führt nach Satz 55.4 zu einer  $K$ -linearen Abbildung

$$L \otimes_K L \longrightarrow L.$$

Dies induziert nach Lemma 56.4 (2) und nach Proposition 56.7 eine  $K$ -lineare Abbildung

$$L \otimes_K (L \otimes_K V) \cong (L \otimes_K L) \otimes_K V \longrightarrow L \otimes_K V.$$

Dies ergibt eine wohldefinierte Skalarmultiplikation

$$L \times (L \otimes_K V) \longrightarrow (L \otimes_K V),$$

die explizit durch

$$s \cdot \left( \sum_{j=1}^n r_j \otimes m_j \right) = \sum_{j=1}^n (sr_j) \otimes m_j$$

gegeben ist. Aus dieser Beschreibung folgen direkt die Eigenschaften einer Skalarmultiplikation. (2). Die  $K$ -Homomorphie folgt direkt aus der Bilinearität des Tensorprodukts. Bei  $L = K$  ist die Abbildung surjektiv. Die Skalarmultiplikation  $K \times V \rightarrow V$  induziert eine  $K$ -lineare Abbildung

$$K \otimes_K V \longrightarrow V.$$

Die Verknüpfung der kanonischen Abbildung  $V \rightarrow K \otimes_K V$  mit dieser Abbildung ist die Identität auf  $V$ , sodass die erste Abbildung auch injektiv ist. (3) folgt aus der expliziten Beschreibung in (1). (4) folgt aus Korollar 56.8. (5) folgt aus (4). (6). Nach Teil (2) haben wir einerseits eine  $K$ -lineare Abbildung  $V \rightarrow L \otimes_K V$ . Dies führt zu einer  $K$ -multilinearen Abbildung

$$M \times V \longrightarrow M \times (L \otimes_K V) \longrightarrow M \otimes_L (L \otimes_K V),$$

die eine  $K$ -lineare Abbildung

$$M \otimes_K V \longrightarrow M \otimes_L (L \otimes_K V)$$

induziert. Andererseits haben wir eine  $L$ -lineare Abbildung

$$L \otimes_K V \longrightarrow M \otimes_K V.$$

Rechts steht ein  $M$ -Vektorraum, daher kann man die Skalarmultiplikation als eine  $L$ -multilineare Abbildung

$$M \times (L \otimes_K V) \longrightarrow M \otimes_K V$$

auffassen, die ihrerseits zu einer  $L$ -linearen Abbildung

$$M \otimes_L (L \otimes_K V) \longrightarrow M \otimes_K V$$

führt. Diese beiden Abbildungen sind invers zueinander, was man auf den zerlegbaren Tensoren überprüfen kann. Daran sieht man auch, dass sich die  $M$ -Multiplikationen entsprechen.  $\square$

**Lemma 56.14.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung. Es sei  $v_i, i \in I$ , eine Familie von Vektoren aus  $V$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Familie  $v_i, i \in I$ , ist genau dann ein  $K$ -Erzeugendensystem von  $V$ , wenn  $1 \otimes v_i, i \in I$ , ein  $L$ -Erzeugendensystem von  $L \otimes V$  ist.*
- (2) *Die Familie  $v_i, i \in I$ , ist genau dann  $K$ -linear unabhängig in  $V$ , wenn  $1 \otimes v_i, i \in I$ , linear unabhängig (über  $L$ ) in  $L \otimes V$  ist.*
- (3) *Die Familie  $v_i, i \in I$ , ist genau dann ein  $K$ -Basis von  $V$ , wenn  $1 \otimes v_i, i \in I$ , ein  $L$ -Basis von  $L \otimes V$  ist.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 56.17.  $\square$

**Beispiel 56.15.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Die Tensorierung mit der  $\mathbb{R}$ -Algebra  $\mathbb{C}$ , also

$$V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V,$$

nennt man die *Komplexifizierung* von  $V$ . Wenn  $V$  die Dimension  $n$  besitzt, so besitzt  $V_{\mathbb{C}}$  als komplexer Vektorraum ebenfalls die Dimension  $n$ . Wenn man  $V_{\mathbb{C}}$  als reellen Vektorraum betrachtet, so besitzt er die reelle Dimension  $2n$ .

## 56. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 56.1.** Es seien im  $\mathbb{R}^2$  die Basen  $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  und die Standardbasis  $\mathfrak{e}$  und in  $\mathbb{C}$  die reellen Basen  $\mathfrak{x} = 8 - 2i, 6 + 3i$  und  $\mathfrak{y} = 1, i$  gegeben. Bestimme die Übergangsmatrix zu den zugehörigen Basen auf dem Tensorprodukt  $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ .

**Aufgabe 56.2.** Es sei  $K$  ein Körper und  $U, V, W$  seien  $K$ -Vektorräume. Zeige die folgenden Aussagen (im Sinne einer kanonischen Isomorphie).

(1) Es ist

$$U \otimes_K V \cong V \otimes_K U.$$

(2) Es ist

$$U \otimes_K (V \otimes_K W) \cong (U \otimes_K V) \otimes_K W.$$

**Aufgabe 56.3.** Die linearen Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

und

$$\psi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

seien bezüglich der Standardbasen durch die beiden Matrizen  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  gegeben. Bestimme die Matrix zur linearen Abbildung

$$\varphi \otimes \psi: \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2.$$

**Aufgabe 56.4.** Es sei  $K$  ein Körper und sei  $Z$  ein Vektorraum über  $K$ . Wir betrachten die Zuordnung  $V \mapsto V \otimes_K Z$ , die einem Vektorraum  $V$  das Tensorprodukt  $V \otimes_K Z$  und einer  $K$ -linearen Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

die Tensorierung  $\varphi \otimes \text{Id}_Z$  zuordnet. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zur Identität

$$\text{Id}_V: V \longrightarrow V$$

ist auch

$$\text{Id}_V \otimes \text{Id}_Z = \text{Id}_{V \otimes Z}$$

die Identität.

(2) Zu linearen Abbildungen

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

ist

$$(\psi \circ \varphi) \otimes \text{Id}_Z = (\varphi \otimes \text{Id}_Z) \circ (\psi \otimes \text{Id}_Z).$$

(3) Zu einem Isomorphismus

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

ist auch  $\varphi \otimes \text{Id}_Z$  ein Isomorphismus, und für die Umkehrabbildung gilt

$$(\varphi \otimes \text{Id}_Z)^{-1} = \varphi^{-1} \otimes \text{Id}_Z.$$

**Aufgabe 56.5.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $U, V, W$  Vektorräume über  $K$ . Zeige, dass eine kanonische Isomorphie

$$U \otimes_K (V \oplus W) \cong (U \otimes_K V) \oplus (U \otimes_K W)$$

vorliegt.

**Aufgabe 56.6.** Es seien  $V_1, \dots, V_n$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume und es seien

$$U_{1,1} \subset U_{1,2} \subset \dots \subset U_{1,\dim_K(V_1)} \subset V_1, \dots, U_{n,1} \subset U_{n,2} \subset \dots \subset U_{n,\dim_K(V_n)} \subset V_n$$

Fahnen in den beteiligten Vektorräumen. Zeige, dass es keine Fahne in  $V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_n$  geben muss, in der die einzelnen Unterräume die Gestalt

$$U_{1,j_1} \otimes \dots \otimes U_{n,j_n}$$

haben.

**Aufgabe 56.7.** Es seien  $U_1 \subseteq V_1, U_2 \subseteq V_2, \dots, U_n \subseteq V_n$  Untervektorräume mit den Restklassenräumen  $V_1/U_1, \dots, V_n/U_n$ . Gibt es eine kanonische Isomorphie

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)/(U_1 \otimes \dots \otimes U_n) \cong (V_1/U_1) \otimes \dots \otimes (V_n/U_n)?$$

**Aufgabe 56.8.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume über  $K$ . Es seien diagonalisierbare  $K$ -lineare Abbildungen

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow V_i$$

gegeben. Zeige, dass auch das Tensorprodukt

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n: V_1 \otimes \dots \otimes V_n \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

diagonalisierbar ist.

**Aufgabe 56.9.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume über  $K$ . Es seien trigonalisierbare  $K$ -lineare Abbildungen

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow V_i$$

gegeben. Zeige, dass auch das Tensorprodukt

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n: V_1 \otimes \dots \otimes V_n \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

trigonalisierbar ist.

Das *Kroneckerprodukt* zu Matrizen

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

und

$$B = (b_{k\ell})_{1 \leq k \leq p, 1 \leq \ell \leq r}$$

ist durch

$$(a_{ij} \cdot b_{k\ell})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq r}$$

gegeben.

**Aufgabe 56.10.** Berechne das Kroneckerprodukt der beiden Matrizen  $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ .

Das Kroneckerprodukt steht in engem Zusammenhang mit dem Tensorprodukt, wie die folgende Aufgabe zeigt.

**Aufgabe 56.11.** Es sei  $K$  ein Körper und

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

und

$$B = (b_{k\ell})_{1 \leq k \leq p, 1 \leq \ell \leq r}$$

Matrizen mit den zugehörigen linearen Abbildungen  $A: K^n \rightarrow K^m$  bzw.  $B: K^r \rightarrow K^p$ . Zeige, dass das Tensorprodukt dieser linearen Abbildungen bezüglich der Basen  $e_j \otimes e_\ell$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $1 \leq \ell \leq r$ , von  $K^n \otimes K^r$  und  $e_i \otimes e_k$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq k \leq p$ , von  $K^m \otimes K^p$  durch das Kroneckerprodukt von  $A$  und  $B$  beschrieben wird.

**Aufgabe 56.12.** Die lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  sei bezüglich der Basis  $v_1, v_2$  durch die Jordan-Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und die lineare Abbildung  $\psi: W \rightarrow W$  sei bezüglich der Basis  $w_1, w_2$  durch die Jordan-Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  gegeben.

(1) Bestimme die Matrix von

$$\varphi \otimes \psi: V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$$

bezüglich der Basis  $v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2$ .

(2) Bestimme die jordanische Normalform von  $\varphi \otimes \psi$ .

**Aufgabe 56.13.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n$  Vektorräume über  $K$ . Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_K(V_1, W_1) \times \cdots \times \text{Hom}_K(V_n, W_n) &\longrightarrow \text{Hom}_K(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W_1 \otimes \cdots \otimes W_n), \\ (\varphi_1, \dots, \varphi_n) &\longmapsto \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n, \end{aligned}$$

multilinear ist.

**Aufgabe 56.14.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume. Zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$\text{Hom}_K(V_1, W_1) \otimes \cdots \otimes \text{Hom}_K(V_n, W_n) \longrightarrow \text{Hom}_K(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W_1 \otimes \cdots \otimes W_n)$$

gibt.

**Aufgabe 56.15.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung und  $f \in L$ . Zeige, dass die Abbildung

$$\mu_f: L \longrightarrow L, x \longmapsto fx,$$

$K$ -linear ist.

**Aufgabe 56.16.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung und es sei  $a \in L$ . Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi: K[X] \longrightarrow L, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien  $P, Q \in K[X]$ ).

- (1)  $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$ ,
- (2)  $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$ ,
- (3)  $1(a) = 1$ .

**Aufgabe 56.17.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung. Es sei  $v_i, i \in I$ , eine Familie von Vektoren aus  $V$ . Zeige die folgende Aussagen.

- (1) Die Familie  $v_i, i \in I$ , ist genau dann ein  $K$ -Erzeugendensystem von  $V$ , wenn  $1 \otimes v_i, i \in I$ , ein  $L$ -Erzeugendensystem von  $L \otimes V$  ist.
- (2) Die Familie  $v_i, i \in I$ , ist genau dann  $K$ -linear unabhängig (über  $K$ ) in  $V$ , wenn  $1 \otimes v_i, i \in I$ , linear unabhängig (über  $L$ ) in  $L \otimes V$  ist.
- (3) Die Familie  $v_i, i \in I$ , ist genau dann eine  $K$ -Basis von  $V$ , wenn  $1 \otimes v_i, i \in I$ , eine  $L$ -Basis von  $L \otimes V$  ist.

**Aufgabe 56.18.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung. Wir betrachten die Zuordnung  $V \mapsto V_L = L \otimes_K V$ , die einem  $K$ -Vektorraum  $V$  den  $L$ -Vektorraum  $L \otimes_K V$  und einer  $K$ -linearen Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

die Tensorierung  $\varphi_L$  zuordnet. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zur Identität

$$\text{Id}_V: V \longrightarrow V$$

ist

$$(\text{Id}_V)_L = \text{Id}_{L \otimes_K V}$$

die Identität.

(2) Zu linearen Abbildungen

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

ist

$$(\psi \circ \varphi)_L = \psi_L \circ \varphi_L.$$

(3) Zu einem Isomorphismus

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

ist auch  $\varphi_L$  ein Isomorphismus, und für die Umkehrabbildung gilt

$$(\varphi_L)^{-1} = (\varphi^{-1})_L.$$

Eine Körpererweiterung  $K \subseteq L$  heißt *endlich*, wenn  $L$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $K$  ist.

Es sei  $K \subseteq L$  eine endliche Körpererweiterung. Dann nennt man die  $K$ -Vektorraumdimension von  $L$  den *Grad* der Körpererweiterung.

**Aufgabe 56.19.** Bestimme den Grad der Körpererweiterung  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .

**Aufgabe 56.20.** Es seien  $K \subseteq L \subseteq M$  Körpererweiterungen derart, dass  $M$  über  $K$  endlich ist. Zeige, dass dann auch  $M$  über  $L$  und  $L$  über  $K$  endlich sind.

**Aufgabe 56.21.** Es sei  $K \subseteq L$  eine endliche Körpererweiterung und sei  $x_1, \dots, x_n \in L$  eine  $K$ -Basis von  $L$ . Zeige, dass die Multiplikation auf  $L$  durch die Produkte

$$x_i x_j, 1 \leq i \leq j \leq n,$$

eindeutig festgelegt ist.

**Aufgabe 56.22.** Es sei  $K \subseteq L$  eine endliche Körpererweiterung und seien  $v_1, \dots, v_n \in L$  Elemente, die eine  $K$ -Basis von  $L$  bilden. Sei  $x \in L$ ,  $x \neq 0$ . Zeige, dass auch  $xv_1, \dots, xv_n \in L$  eine  $K$ -Basis von  $L$  bilden.

**Aufgabe 56.23.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung und seien  $V_1, \dots, V_n$   $K$ -Vektorräume. Zeige, dass es eine kanonische Isomorphie der  $L$ -Vektorräume

$$L \otimes_K (V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n) = (L \otimes_K V_1) \otimes_L \cdots \otimes_L (L \otimes_K V_n).$$

**Aufgabe 56.24.** Zeige, dass die Körpererweiterung  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  nicht endlich ist.

Es sei  $K$  ein Körper und sei  $A$  ein  $K$ -Vektorraum. Man nennt  $A$  eine kommutative  $K$ -Algebra, wenn es ein ausgezeichnetes Element  $1$  und eine Verknüpfung, genannt *Multiplikation*,

$$A \times A \longrightarrow A, (a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

gibt, die die Bedingungen

(1) Es ist

$$1 \cdot a = a$$

für alle  $a \in A$ .

(2) Die Verknüpfung ist assoziativ.

(3) Es ist

$$a \cdot b = b \cdot a$$

für alle  $a \in A$ .

(4) Für  $c \in K$  und  $a \in A$  ist

$$ca = (c1) \cdot a,$$

wobei  $ca$  und  $c1$  die Skalarmultiplikation bezeichnen.

erfüllen.

Wichtige Beispiele für  $K$ -Algebren werden durch Körpererweiterungen  $K \subseteq L$  gegeben. Aber auch der Polynomring  $K[X]$  ist eine  $K$ -Algebra.

**Aufgabe 56.25.** Es sei  $K$  ein Körper und seien  $A$  und  $B$  Algebren über  $K$ . Zeige, dass  $A \otimes_K B$  ebenfalls eine  $K$ -Algebra ist, wobei die  $1$  durch  $1 \otimes 1$  und die Multiplikation für zerlegbare Tensoren durch

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) := (a \cdot c) \otimes (b \cdot d)$$

festgelegt ist.

In den folgenden Aufgaben bedeutet  $\cong$ , dass sich die Addition, die Multiplikation, die  $0$  und die  $1$  entsprechen.

**Aufgabe 56.26.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung. Zeige, dass für den Polynomring die Gleichheit

$$L \otimes_K K[X] \cong L[X]$$

gilt.

**Aufgabe 56.27.** Es sei  $K$  ein Körper. Zeige, dass für Polynomringe die Gleichheit

$$K[X] \otimes_K K[Y] \cong K[X, Y]$$

gilt.

**Aufgabe 56.28.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung und  $A$  eine  $K$ -Algebra. Zeige, dass  $L \otimes_K A$  eine  $L$ -Algebra ist.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 56.29.** (4 Punkte)

Es seien im  $\mathbb{R}^2$  die Basen  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$  und die Standardbasis  $\mathbf{e}$  und im  $\mathbb{R}^3$  die Basis  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  und die Standardbasis gegeben.

Bestimme die Übergangsmatrix zu den zugehörigen Basen auf dem Tensorprodukt  $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 56.30.** (2 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper und seien  $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n$  Vektorräume über  $K$ . Es seien

$$\psi_i: U_i \longrightarrow V_i$$

und

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow W_i$$

$K$ -lineare Abbildungen. Zeige

$$(\varphi_1 \circ \psi_1) \otimes \cdots \otimes (\varphi_n \circ \psi_n) = (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) \circ (\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n).$$

**Aufgabe 56.31.** (2 Punkte)

Es seien  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume über dem Körper  $K$  und

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen und

$$\varphi = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n: V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

die zugehörige Tensorproduktabbildung. Es sei  $a_i$  ein Eigenwert von  $\varphi_i$ . Zeige, dass  $a_1 \cdots a_n$  ein Eigenwert von  $\varphi$  ist.

**Aufgabe 56.32.** (4 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Zeige, dass die Abbildung

$$\text{End}(V) \longrightarrow K,$$

die sich aus der Identifizierung

$$\text{End}(V) = V^* \otimes_K V$$

gemäß Aufgabe 55.15 und der natürlichen Abbildung

$$V^* \otimes_K V \longrightarrow K, f \otimes v \longmapsto f(v),$$

im Sinne von Aufgabe 55.14 ergibt, gleich der Spur ist.

**Aufgabe 56.33.** (6 (2+4) Punkte)

Die lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  sei bezüglich der Basis  $v_1, v_2$  durch die Jordan-Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und die lineare Abbildung  $\psi: W \rightarrow W$  sei bezüglich

der Basis  $w_1, w_2, w_3$  durch die Jordan-Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  gegeben.

(1) Bestimme die Matrix von

$$\varphi \otimes \psi: V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$$

bezüglich der Basis  $v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_1 \otimes w_3, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2, v_2 \otimes w_3$ .

(2) Bestimme die jordanische Normalform von  $\varphi \otimes \psi$ .

**Aufgabe 56.34.** (4 Punkte)

Es seien  $U_1 \subseteq V_1, U_2 \subseteq V_2, \dots, U_n \subseteq V_n$  Untervektorräume mit den Restklassenräumen  $V_1/U_1, \dots, V_n/U_n$ . Zeige, dass der Kern der kanonischen Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow (V_1/U_1) \otimes \cdots \otimes (V_n/U_n)$$

gleich

$$\sum_j V_1 \otimes \cdots \otimes V_{j-1} \otimes U_j \otimes V_{j+1} \otimes \cdots \otimes V_n$$

ist.

**Aufgabe 56.35.** (4 Punkte)

Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung. Zeige, dass  $L \otimes_K L$  kein Körper sein muss.

## 57. VORLESUNG - DACHPRODUKT I

### LINEARE ABBILDUNGEN BEI KÖRPERWECHSEL

**Definition 57.1.** Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

zwischen  $K$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  und einer Körpererweiterung  $K \subseteq L$  heißt die  $L$ -lineare Abbildung

$$\varphi_L: V_L = L \otimes_K V \longrightarrow W_L = L \otimes_K W, b \otimes v \longmapsto b \otimes \varphi(v),$$

die durch *Körperwechsel gewonnene lineare Abbildung*.

Diese Abbildung ist nicht nur  $K$ -linear, sondern, wie in Proposition 56.13 (3) gezeigt wurde, auch  $L$ -linear.

**Lemma 57.2.** *Es sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer Basis  $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$  und sei  $W$  ein  $m$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer Basis  $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_m$ . Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung mit der beschreibenden Matrix  $M = M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}(\varphi) = (a_{ij})$ . Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung. Dann wird die durch den Körperwechsel gewonnene lineare Abbildung*

$$\varphi_L: V_L \longrightarrow W_L$$

*bezüglich der Basen  $1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_n$  von  $V_L$  und  $1 \otimes w_1, \dots, 1 \otimes w_m$  von  $W_L$  ebenfalls durch die Matrix  $M$ , aufgefasst über  $L$ , beschrieben.*

*Beweis.* Wegen Lemma 56.14 liegen in der Tat Basen vor. Das Basiselement  $v_j$  von  $V$  wird unter  $\varphi$  auf

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

abgebildet. Somit wird das Basiselement  $1 \otimes v_j$  von  $V_L$  unter  $\varphi_L$  auf

$$\varphi(1 \otimes v_j) = 1 \otimes \varphi(v_j) = 1 \otimes \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} (1 \otimes w_i).$$

Die Koeffizienten  $a_{ij}$  konstituieren also die beschreibende Matrix von  $\varphi_L$ .  $\square$

## DAS DACHPRODUKT

Unter den multilinearen Abbildungen spielen die alternierenden Abbildungen eine besondere Rolle, das wichtigste Beispiel ist die Determinante. Wir führen hier eine Konstruktion für das sogenannte *Dachprodukt* durch, das für die alternierenden Abbildungen eine ähnliche Rolle spielt wie das Tensorprodukt für die multilinearen Abbildungen.

Wir erinnern an alternierende Abbildungen.

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  und  $W$  seien  $K$ -Vektorräume und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine multilineare Abbildung

$$\Phi: V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\text{-mal}} \longrightarrow W$$

heißt *alternierend*, wenn folgendes gilt: Falls in  $v = (v_1, \dots, v_n)$  zwei Einträge übereinstimmen, also  $v_i = v_j$  für ein Paar  $i \neq j$ , so ist

$$\Phi(v) = 0.$$

**Konstruktion 57.3.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Wir konstruieren das sogenannte  $n$ -te *Dachprodukt* von  $V$  mit sich selbst, geschrieben  $\bigwedge^n V$ . Dazu betrachten wir die Menge  $S$  aller Symbole der Form

$$(v_1, \dots, v_n) \text{ mit } v_i \in V$$

und die zugehörige Menge der  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$ . Wir betrachten den Vektorraum

$$H = K^{(S)},$$

das ist die Menge aller (endlichen) Summen

$$a_1 e_{s_1} + \cdots + a_k e_{s_k} \text{ mit } a_i \in K \text{ und } s_i \in S,$$

die  $e_s$  bilden eine Basis. Dies ist mit der natürlichen Addition und der natürlichen Skalarmultiplikation ein Vektorraum, und zwar ein Untervektorraum des Abbildungsraumes  $\text{Abb}(S, K)$  (es handelt sich bei  $H$  um die Menge derjenigen Vektoren, die für fast alle Elemente  $s \in S$  den Wert 0 haben). In

$H$  betrachten wir den Untervektorraum  $U$ , der von den folgenden Elementen erzeugt wird (die man die *Standardrelationen* des Dachprodukts nennt).

$$e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, v+w, v_{i+1}, \dots, v_n)} - e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)} - e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}$$

für beliebige  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n, v, w \in V$ .

$$e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, av, v_{i+1}, \dots, v_n)} - ae_{(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)}$$

für beliebige  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n, v \in V$  und  $a \in K$ .

$$e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n)}$$

für  $i < j$  und beliebige  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, v \in V$ .

Dabei ist der Leitgedanke, die Regeln, die für eine alternierende multilineare Abbildung gelten müssen, dadurch zu erzwingen, dass man die obigen Terme zu 0 macht. Der erste Typ repräsentiert die Additivität in jedem Argument, die zweite die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation, die dritte die alternierende Eigenschaft.

Man setzt nun

$$\bigwedge^n V := H/U,$$

d.h. man bildet den Restklassenraum von  $H$  modulo dem Unterraum  $U$ .

Die Elemente  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$  bilden dabei ein Erzeugendensystem von  $H$ . Die Restklasse von  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$  modulo  $U$  bezeichnen wir mit<sup>13</sup>

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

Die Erzeuger von  $U$  werden dann zu den Rechenregeln<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge (v+w) \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n \\ &= v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n + v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge w \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n, \end{aligned}$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge av \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n = a \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n$$

und

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_{j-1} \wedge v \wedge v_{j+1} \wedge \dots \wedge v_n = 0.$$

<sup>13</sup>Es ist nicht einfach, sich unter den Ausdrücken  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  bzw.  $\wedge$  etwas vorzustellen. Wichtiger als die „Bedeutung“ dieser Symbole ist ihr Transformationsverhalten und die Rechenregeln, die dafür gelten. Erst der operative Umgang mit diesen Symbolen lässt die Bedeutung entstehen. Wenn man aber eine ungefähre Vorstellung haben möchte, so kann man sagen, dass  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  das von den Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  erzeugte „orientierte“ Parallelotop in  $V$  repräsentiert. Das Dachprodukt  $\bigwedge^n V$  besteht dann aus Linearkombinationen von solchen Parallelotopen.

<sup>14</sup>Es gilt die Klammerungskonvention „Dachprodukt vor Punktrechnung“, d.h. der Ausdruck  $av_1 \wedge \dots \wedge v_n$  ist als  $a(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$  zu lesen. Es gelten aber ohnehin die Gleichheiten

$$a(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = (av_1) \wedge \dots \wedge v_n = v_1 \wedge \dots \wedge (av_n).$$

**Definition 57.4.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Man nennt den (in Konstruktion 57.3 konstruierten)  $K$ -Vektorraum  $\bigwedge^n V$  die  $n$ -te äußere Potenz (oder das  $n$ -te Dachprodukt) von  $V$ . Die Abbildung

$$V^n \longrightarrow \bigwedge^n V, (v_1, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n,$$

nennt man die *universelle alternierende Abbildung*.

### RECHENREGELN FÜR DAS DACHPRODUKT

**Lemma 57.5.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann gelten für die äußeren Potenzen folgende Aussagen.*

- (1) *Die Elemente der Form  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  mit  $v_i \in V$  bilden ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^n V$ .*
- (2) *Die Abbildung*

$$V^n \longrightarrow \bigwedge^n V, (v_1, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n,$$

*ist multilinear und alternierend.*

- (3) *Es ist*

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge w \wedge v_{i+2} \wedge \dots \wedge v_n = -v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge w \wedge v \wedge v_{i+2} \wedge \dots \wedge v_n.$$

- (4) *Es seien  $u_1, \dots, u_m \in V$  gegeben und seien*

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i$$

*für  $j = 1, \dots, n$ . Dann ist*

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \dots \wedge v_n &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, m\}^n} \left( \prod_{j=1}^n a_{i_j j} \right) u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_n} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \left( \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^n a_{i_{\pi(j)} j} \right) u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_n}. \end{aligned}$$

*Beweis.* (1) folgt direkt aus der Konstruktion. (2). Es liegt die zusammengesetzte Abbildung

$$V^n \longrightarrow H \cong K^{(V^n)} \longrightarrow H/U$$

vor, wobei  $(v_1, \dots, v_n)$  auf  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$  und dies auf die Restklasse  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  abgebildet wird. Dabei sichert die Definition des Unterraums  $U$ , dass jeweils die Eigenschaften einer multilinearen alternierenden Abbildung erfüllt sind. (3) gilt nach Lemma 16.8 für jede alternierende Abbildung. (4). Die erste Gleichung gilt nach Lemma 16.6 für jede multilineare Abbildung. Wenn sich in dem Indextupel  $(i_1, \dots, i_n)$  ein Eintrag wiederholt, so ist  $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_n} = 0$  wegen alternierend. Wir müssen also nur noch Tupel betrachten, wo alle Einträge verschieden sind. Diese können nach Umordnen auf die Form

$1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$  gebracht werden. Bei einem fixierten aufsteigenden Indextupel ist die Summe über alle dazu permutierten Indextupel gleich

$$\sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^n a_{i_{\pi(j)}j} u_{i_{\pi(1)}} \wedge \dots \wedge u_{i_{\pi(n)}} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^n a_{i_{\pi(j)}j} u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_n}.$$

□

**Korollar 57.6.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und seien  $v_1, \dots, v_n$  und  $w_1, \dots, w_n$  Vektoren in  $V$ , die miteinander in der Beziehung*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

stehen, wobei  $M$  eine  $n \times n$ -Matrix bezeichnet. Dann gilt in  $\bigwedge^n V$  die Beziehung

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = (\det M) w_1 \wedge \dots \wedge w_n.$$

*Beweis.* Mit  $M = (b_{jk})$  ist  $v_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} w_k$  und mit der transponierten Matrix  $M^{\text{tr}} = (a_{ij})$  ist  $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$ . Damit sind wir in der Notation von Lemma 57.5 (4) und es gilt

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \dots \wedge v_n &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n} \left( \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^n a_{i_{\pi(j)}j} \right) w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^n a_{\pi(j)j} w_1 \wedge \dots \wedge w_n, \end{aligned}$$

da dann  $i_j = j$  sein muss. Daher folgt die Aussage aus der Leibniz-Formel für die Determinante. □

## DIE UNIVERSELLE EIGENSCHAFT DES DACHPRODUKTES

Die folgende Aussage beschreibt die universelle Eigenschaft des Dachproduktes.

**Satz 57.7.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Es sei*

$$\psi: V^n \longrightarrow W$$

*eine alternierende multilineare Abbildung in einen weiteren  $K$ -Vektorraum  $W$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung*

$$\tilde{\psi}: \bigwedge^n V \longrightarrow W$$

*derart, dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V^n & \longrightarrow & \bigwedge^n V \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

kommutiert.

*Beweis.* Wir verwenden die Notation aus Konstruktion 57.3. Durch die Zuordnung

$$e_{(v_1, \dots, v_n)} \longmapsto \psi(v_1, \dots, v_n)$$

wird nach Satz 10.10 eine  $K$ -lineare Abbildung

$$\bar{\psi}: H \longrightarrow W$$

definiert. Da  $\psi$  multilinear und alternierend ist, wird unter  $\bar{\psi}$  der Untervektorraum  $U \subseteq H$  auf 0 abgebildet. Nach Satz 47.16 gibt es daher eine  $K$ -lineare Abbildung

$$\tilde{\psi}: H/U \longrightarrow W,$$

die mit  $\bar{\psi}$  verträglich ist. Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, dass die  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^n V$  bilden und diese auf  $\psi(v_1, \dots, v_n)$  abgebildet werden müssen.  $\square$

Es bezeichne  $\text{Alt}^n(V, W)$  die Menge aller alternierenden Abbildungen von  $V^n$  nach  $W$ . Diese Menge kann man mit einer natürlichen  $K$ -Vektorraumstruktur versehen, siehe Aufgabe 16.28.

**Korollar 57.8.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  und  $W$  seien  $K$ -Vektorräume und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\text{Hom}_K \left( \bigwedge^n V, W \right) \longrightarrow \text{Alt}^n(V, W), \psi \longmapsto ((v_1, \dots, v_n) \mapsto \psi(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)).$$

*Beweis.* Die Abbildung ist einfach die Verknüpfung  $\psi \mapsto \psi \circ \delta$ , wobei  $\delta: V \times \dots \times V \rightarrow \bigwedge^n V$  die kanonische Abbildung bezeichnet. Die Linearität der Zuordnung ergibt sich aus den linearen Strukturen des Homomorphismenraumes und des Raumes der alternierenden Abbildungen. Die Bijektivität der Abbildung folgt aus Satz 57.7.  $\square$

**Korollar 57.9.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\left( \bigwedge^n V \right)^* \longrightarrow \text{Alt}^n(V, K), \psi \longmapsto ((v_1, \dots, v_n) \mapsto \psi(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)).$$

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von Korollar 57.8.  $\square$

**Satz 57.10.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $k \in \mathbb{N}_+$ . Dann gibt es eine kanonische surjektive lineare Abbildung*

$$V \otimes \dots \otimes V \longrightarrow V \wedge \dots \wedge V, v_1 \otimes \dots \otimes v_k \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k.$$

*Beweis.* Dies ergibt sich aus der alternierenden Abbildung

$$V^k \longrightarrow \bigwedge^k V, (v_1, \dots, v_k) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k,$$

gemäß Satz 55.4 (2). Die Surjektivität beruht darauf, dass das Erzeugendensystem  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  im Bild liegt.  $\square$

Wenn  $V$  endlichdimensional ist, so ergibt sich aus der vorstehenden Aussage und Korollar 55.13, dass das Dachprodukt endliche Dimension besitzt. Diese werden wir in der letzten Vorlesung bestimmen.

## 57. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 57.1.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass das charakteristische Polynom zu  $\varphi$  mit dem charakteristischen Polynom der Tensorierung  $\varphi_L$  übereinstimmt.

Allerdings können beim Übergang von  $K$  nach  $L$  neue Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit neue Eigenwerte und Eigenvektoren auftreten.

**Aufgabe 57.2.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung und seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ .

- (a) Definiere eine  $L$ -lineare Abbildung

$$L \otimes_K \text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_L(V_L, W_L),$$

die  $c \otimes \varphi$  auf  $c(\text{Id}_L \otimes \varphi)$  abbildet.

- (b) Es seien die beiden Vektorräume nun endlichdimensional. Zeige, dass die Abbildung aus Teil (a) ein Isomorphismus ist.

**Aufgabe 57.3.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $W$  ein  $L$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine  $K$ -lineare Abbildung. Zeige, dass es eine  $L$ -lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}: V_L \longrightarrow W$$

gibt, die  $\varphi$  fortsetzt (also auf  $V \subseteq V_L$  mit  $\varphi$  übereinstimmt).

**Aufgabe 57.4.** Vereinfache in  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  den Ausdruck

$$e_1 \wedge (e_2 - 4e_3) - e_2 \wedge (5e_1 + 3e_2 - 4e_3) + (7e_3) \wedge e_1 - 4(5e_1 \wedge 2e_3) \\ + (2e_1 - 8e_2) \wedge (2e_1 - 8e_2).$$

**Aufgabe 57.5.** Vereinfache in  $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$  den Ausdruck

$$(e_1 - e_2) \wedge (e_2 - 4e_3) \wedge (3e_1 - 5e_2 + 4e_3) + (7e_3) \wedge (e_1 - 4e_3) \wedge (5e_3 - e_1) \\ - (4e_3 - 2e_2) \wedge e_2 \wedge (4e_1 + 3e_2 - 4e_3).$$

**Aufgabe 57.6.** Vereinfache in  $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$  den Ausdruck

$$-7e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + 6e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 + 4e_3 \wedge e_2 \wedge e_1 + 3e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 + 5e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 - 11e_2 \wedge e_3 \wedge e_1.$$

**Aufgabe 57.7.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Zeige die Gleichheit  $V = \bigwedge^1 V$ .

**Aufgabe 57.8.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n$ . Zeige, dass  $\bigwedge^n V$  nicht der Nullraum ist.

**Aufgabe 57.9.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $m$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei  $n > m$ . Zeige  $\bigwedge^n V = 0$ .

**Aufgabe 57.10.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es seien  $f_1, \dots, f_k \in V^*$ . Zeige, dass die Abbildung

$$V \times \dots \times V \longrightarrow K, (v_1, \dots, v_k) \longmapsto \det(f_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k},$$

multilinear und alternierend ist.

**Aufgabe 57.11.** Beweise Satz 57.10 direkt aus der Konstruktion für das Tensorprodukt und der Konstruktion für das Dachprodukt.

**Aufgabe 57.12.** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und sei  $n \in \mathbb{N}$ .

(1) Kann man durch die Zuordnung

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n$$

eine (lineare) Abbildung von  $\bigwedge^n V$  nach  $V \otimes \dots \otimes V$  festlegen?

(2) Kann man auf die kanonische Abbildung

$$\pi: V \times \cdots \times V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$$

die universelle Eigenschaft für das Dachprodukt anwenden, um eine lineare Abbildung von  $\bigwedge^n V$  nach  $V \otimes \cdots \otimes V$  zu erhalten?

**Aufgabe 57.13.** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und sei

$$\pi: V \times \cdots \times V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$$

(mit  $n$  Faktoren) die kanonische multilineare Abbildung.

(1) Es sei  $\sigma \in S$  eine Permutation. Zeige, dass es eine multilineare Abbildung

$$\pi \circ \sigma: V \times \cdots \times V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$$

mit

$$(\pi \circ \sigma)(v_1, \dots, v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

gibt.

(2) Zeige, dass  $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \pi \circ \sigma$  multilinear und alternierend ist.

(3) Zeige, dass es eine lineare Abbildung

$$\Psi: \bigwedge^n V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$$

mit

$$\Psi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

gibt.

**Aufgabe 57.14.** Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass es eine kanonische Isomorphie der  $L$ -Vektorräume

$$\bigwedge^n V_L \text{ und } (\bigwedge^n V)_L$$

(wobei links das Dachprodukt über  $L$  steht) gibt.

#### AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 57.15.** (2 Punkte)

Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige

$$\det \varphi = \det \varphi_L.$$

**Aufgabe 57.16.** (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  und

$$\varphi_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$$

die zugehörige Komplexifizierung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann (asymptotisch) stabil ist, wenn dies für  $\varphi_{\mathbb{C}}$  gilt.

## 58. VORLESUNG - DACHPRODUKT II

## EIGENSCHAFTEN DES DACHPRODUKTS

**Satz 58.1.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum der Dimension  $m$ . Es sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis von  $V$  und es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann bilden die Dachprodukte*

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n} \text{ mit } 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$$

eine Basis von  $\bigwedge^n V$ .

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass ein Erzeugendensystem vorliegt. Da die Elemente der Form  $w_1 \wedge \dots \wedge w_n$  nach Lemma 57.5 (1) ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^n V$  bilden, genügt es zu zeigen, dass man diese durch die angegebenen Elemente darstellen kann. Für jedes  $w_j$  gibt es eine Darstellung  $w_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$ , daher kann man nach Lemma 57.5 (4) die  $w_1 \wedge \dots \wedge w_n$  als Linearkombinationen von Dachprodukten der Basiselemente darstellen, wobei allerdings jede Reihenfolge vorkommen kann. Es sei also  $v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_n}$  gegeben mit  $k_j \in \{1, \dots, m\}$ . Durch Vertauschen von benachbarten Vektoren kann man nach Lemma 57.5 (3) (unter Inkaufnahme eines anderen Vorzeichens) erreichen, dass die Indizes (nicht notwendigerweise streng) aufsteigend geordnet sind. Wenn sich ein Index wiederholt, so ist nach Lemma 57.5 (2) das Dachprodukt 0. Also wiederholt sich kein Index und diese Dachprodukte sind in der gewünschten Form.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit zeigen wir unter Verwendung von Lemma 14.8, dass es zu jeder  $n$ -elementigen Teilmenge  $I = \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{1, \dots, m\}$  (mit  $i_1 < \dots < i_n$ ) eine  $K$ -lineare Abbildung

$$\bigwedge^n V \longrightarrow K$$

gibt, die  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n}$  nicht auf 0 abbildet, aber alle anderen in Frage stehenden Dachprodukte auf 0 abbildet. Dazu genügt es nach Satz 57.7, eine alternierende multilineare Abbildung

$$\Delta: V^n \longrightarrow K$$

anzugeben mit  $\Delta(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) \neq 0$ , aber mit  $\Delta(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}) = 0$  für jedes andere aufsteigende Indextupel. Es sei  $U$  der von den  $v_i$ ,  $i \neq i_k$ , erzeugte Untervektorraum von  $V$  und  $W = V/U$  der Restklassenraum. Dann bilden die Bilder der  $v_{i_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , eine Basis von  $W$ , und die Bilder von allen anderen  $n$ -Teilmengen der gegebenen Basis bilden dort keine Basis, da mindestens ein Element davon auf 0 geht. Wir betrachten nun die zusammengesetzte Abbildung

$$\Delta: V^n \longrightarrow W^n \cong (K^n)^n \xrightarrow{\det} K.$$

Diese Abbildung ist nach Satz 16.9 multilinear und nach Satz 16.10 alternierend. Nach Satz 16.11 ist  $\Delta(z_1, \dots, z_n) = 0$  genau dann, wenn die Bilder von  $z_i$  in  $W$  keine Basis bilden.  $\square$

Bei  $V = K^m$  mit der Standardbasis  $e_1, \dots, e_m$  nennt man die  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$  mit  $i_1 < \dots < i_n$  die *Standardbasis* von  $\bigwedge^n K^m$ .

**Bemerkung 58.2.** Zu Basen  $v_1, \dots, v_m$  und  $w_1, \dots, w_m$  eines  $K$ -Vektorraumes  $V$  mit den Beziehungen

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

erhält man zwischen den Basen

$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n}$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$  und  $w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_n}$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$  des  $\bigwedge^n V$  die Beziehung

$$v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_n} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \left( \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{s=1}^n a_{i_s j_{\pi(s)}} \right) w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_n}.$$

Dies beruht gemäß Lemma 57.5 (4) auf

$$\begin{aligned} v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_n} &= \left( \sum_{i=1}^m a_{ij_1} w_i \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i=1}^m a_{ij_n} w_i \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \left( \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{s=1}^n a_{i_s j_{\pi(s)}} \right) w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_n}. \end{aligned}$$

**Korollar 58.3.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum der Dimension  $m$ . Dann besitzt das  $n$ -te äußere Produkt  $\bigwedge^n V$  die Dimension*

$$\binom{m}{n}.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 58.1 und Aufgabe 3.22 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).  $\square$

Insbesondere ist die äußere Potenz für  $n = 0$  eindimensional (es ist  $\bigwedge^0 V = K$ ) und für  $n = 1$   $m$ -dimensional (es ist  $\bigwedge^1 V = V$ ). Für  $n = m$  ist  $\bigwedge^m V$  eindimensional, und die Determinante induziert (nach einer Identifizierung von  $V$  mit  $K^m$ ) einen Isomorphismus

$$\bigwedge^m V \longrightarrow K, (v_1, \dots, v_m) \longmapsto \det(v_1, \dots, v_m).$$

Für  $n > m$  sind die äußeren Produkte der Nullraum und besitzen die Dimension 0.

Wir erweitern die in Korollar 57.9 gezeigte natürliche Isomorphie

$$\left(\bigwedge^n V\right)^* \cong \text{Alt}^n(V, K)$$

zu einer natürlichen Isomorphie

$$\bigwedge^n V^* \cong \left(\bigwedge^n V\right)^* \cong \text{Alt}^n(V, K).$$

**Satz 58.4.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum. Es sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\psi: \bigwedge^k V^* \longrightarrow \left(\bigwedge^k V\right)^*$$

mit

$$(\psi(f_1 \wedge \dots \wedge f_k))(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \det(f_i(v_j))_{ij}$$

(mit  $f_i \in V^*$  und  $v_j \in V$ ).

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildung (mit  $k$  Faktoren)

$$V^* \times \dots \times V^* \longrightarrow \text{Abb}(V \times \dots \times V, K)$$

mit

$$(f_1, \dots, f_k) \longmapsto \left( (v_1, \dots, v_k) \longmapsto \det(f_i(v_j))_{ij} \right).$$

Für fixierte  $f_1, \dots, f_k$  ist die Abbildung rechts multilinear und alternierend, wie eine direkte Überprüfung unter Verwendung der Determinantenregeln zeigt. Daher entspricht diese nach Korollar 57.9 einem Element in  $\left(\bigwedge^k V\right)^*$ . Insgesamt liegt also eine Abbildung

$$V^* \times \dots \times V^* \longrightarrow \left(\bigwedge^k V\right)^*$$

vor. Eine direkte Prüfung zeigt, dass die Gesamtzuordnung ebenfalls multilinear und alternierend ist. Aufgrund der universellen Eigenschaft gibt es daher eine lineare Abbildung

$$\psi: \bigwedge^k V^* \longrightarrow \left( \bigwedge^k V \right)^*.$$

Diese müssen wir als Isomorphismus nachweisen. Es sei dazu  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  mit der zugehörigen Dualbasis  $v_1^*, \dots, v_n^*$ . Nach Satz 58.1 bilden die

$$v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

eine Basis von  $\bigwedge^k V^*$ . Ebenso bilden die

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

eine Basis von  $\bigwedge^k V$  mit zugehöriger Dualbasis  $(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})^*$ . Wir zeigen, dass  $v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*$  unter  $\psi$  auf  $(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})^*$  abgebildet wird. Für  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  ist

$$\left( \psi(v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*) \right) (v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k}) = \det \left( v_{i_r}^*(v_{j_s})_{1 \leq r, s \leq k} \right).$$

Bei  $\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_k\}$  gibt es ein  $i_r$ , das von allen  $j_s$  verschieden ist. Daher ist die  $r$ -te Zeile der Matrix 0 und somit ist die Determinante 0. Wenn dagegen die Indextmengen übereinstimmen, so ergibt sich die Einheitsmatrix mit der Determinante 1. Diese Wirkungsweise stimmt mit der von  $(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})^*$  überein.  $\square$

#### DACHPRODUKTE BEI LINEAREN ABBILDUNGEN

**Korollar 58.5.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  und  $W$  seien  $K$ -Vektorräume und*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*sei eine  $K$ -lineare Abbildung. Dann gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine  $K$ -lineare Abbildung*

$$\bigwedge^n \varphi: \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

*mit  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1) \wedge \dots \wedge \varphi(v_n)$ .*

*Beweis.* Die Abbildung

$$V^n \xrightarrow{\varphi \times \dots \times \varphi} W^n \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n W$$

ist nach Aufgabe 16.29 multilinear und alternierend. Daher gibt es nach Satz 57.7 eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

mit  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1) \wedge \dots \wedge \varphi(v_n)$ .  $\square$

**Proposition 58.6.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  und  $W$  seien  $K$ -Vektorräume und*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*sei eine  $K$ -lineare Abbildung. Zu  $n \in \mathbb{N}$  sei*

$$\bigwedge^n \varphi: \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

*die zugehörige  $K$ -lineare Abbildung. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) *Wenn  $\varphi$  surjektiv ist, dann ist auch  $\bigwedge^n \varphi$  surjektiv.*
- (2) *Wenn  $\varphi$  injektiv ist, dann ist auch  $\bigwedge^n \varphi$  injektiv.*
- (3) *Wenn  $U$  ein weiterer  $K$ -Vektorraum und*

$$\psi: U \longrightarrow V$$

*eine weitere  $K$ -lineare Abbildung ist, so gilt*

$$\bigwedge^n (\varphi \circ \psi) = \left( \bigwedge^n \varphi \right) \circ \left( \bigwedge^n \psi \right).$$

*Beweis.* (1). Es seien  $w_1, \dots, w_n \in W$  gegeben und seien  $v_1, \dots, v_n \in V$  Urbilder davon, also  $\varphi(v_i) = w_i$ . Dann ist

$$\left( \bigwedge^n \varphi \right) (v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = w_1 \wedge \dots \wedge w_n.$$

Nach Lemma 57.5 (1) ergibt sich die Surjektivität. (2). Wir können aufgrund der Konstruktion des Dachproduktes annehmen, dass  $V$  und  $W$  endlichdimensional sind. Die Aussage folgt dann aufgrund der expliziten Beschreibung der Basen in Satz 58.1. (3). Es genügt, die Gleichheit für das Erzeugendensystem  $u_1 \wedge \dots \wedge u_n$  mit  $u_i \in U$  zu zeigen, wofür es klar ist.  $\square$

#### ORIENTIERUNGEN UND DAS DACHPRODUKT

Unter Bezug auf das Dachprodukt kann man generell die Orientierung auf einem reellen Vektorraum auf die Orientierung einer Geraden zurückführen, wie die folgende Aussage zeigt.

**Lemma 58.7.** *Es sei  $V \neq 0$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum der Dimension  $n$ . Dann entsprechen durch die Zuordnung*

$$[v_1, \dots, v_n] \longmapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_n]$$

*die Orientierungen auf  $V$  den Orientierungen auf  $\bigwedge^n V$ .*

*Beweis.* Es seien  $v_1, \dots, v_n$  und  $w_1, \dots, w_n$  zwei Basen von  $V$  mit der Beziehung

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach Korollar 57.6

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = (\det M)w_1 \wedge \dots \wedge w_n,$$

woraus die Wohldefiniertheit der Abbildung und die Aussage folgt.  $\square$

## 58. ARBEITSBLATT

### ÜBUNGSAUFGABEN

**Aufgabe 58.1.** Drücke das Dachprodukt  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  in der Standardbasis von  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  aus.

**Aufgabe 58.2.** Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu  $\bigwedge^2 \varphi$  bezüglich der Standardbasen der Dachprodukte.

**Aufgabe 58.3.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis von  $V$ . Beschreibe die Matrix zur natürlichen Abbildung ( $n$  Faktoren)

$$V \otimes_K \dots \otimes_K V \longrightarrow \bigwedge^n V$$

bezüglich der zugehörigen Basen.

**Aufgabe 58.4.** Es sei  $V = U \oplus W$  eine direkte Zerlegung in Untervektorräume der Dimension  $\dim_K(U) = r$  und  $\dim_K(W) = s$ . Zeige, dass es eine kanonische Isomorphie

$$\bigwedge^{r+s} V \cong \bigwedge^r U \otimes \bigwedge^s W$$

gibt.

**Aufgabe 58.5.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Es seien  $u_1, \dots, u_n \in V$ . Zeige, dass es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k+n} V$$

mit  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_n$  gibt.

**Aufgabe 58.6.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$  und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Es sei

$$\bigwedge^m \varphi: \bigwedge^m V \longrightarrow \bigwedge^m V$$

das  $m$ -te Dachprodukt von  $\varphi$ . Es seien  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängige Eigenvektoren zu  $\varphi$  zu den Eigenwerten  $a_1, \dots, a_m$ . Zeige, dass  $a_1 \cdots a_m$  ein Eigenwert von  $\bigwedge^m \varphi$  ist.

**Aufgabe 58.7.** Es sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine diagonalisierbare  $K$ -lineare Abbildung. Zeige, dass auch das Dachprodukt

$$\bigwedge^n \varphi: \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n V$$

diagonalisierbar ist.

**Aufgabe 58.8.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine trigonalisierbare  $K$ -lineare Abbildung. Zeige, dass auch das Dachprodukt

$$\bigwedge^n \varphi: \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n V$$

trigonalisierbar ist.

**Aufgabe 58.9.** Beweise den Determinantenmultiplikationssatz mit Hilfe des Dachproduktes.

## AUFGABEN ZUM ABGEBEN

**Aufgabe 58.10.** (4 Punkte)

Drücke das Dachprodukt

$$4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

im  $\wedge^2 \mathbb{R}^3$  als Linearkombination der Dachprodukte  $e_1 \wedge e_2$ ,  $e_1 \wedge e_3$  und  $e_2 \wedge e_3$  aus.

**Aufgabe 58.11.** (2 Punkte)

Drücke das Dachprodukt  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  in der Standardbasis von  $\wedge^2 \mathbb{R}^3$  aus.

**Aufgabe 58.12.** (4 Punkte)

Drücke das Dachprodukt

$$-2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in der Standardbasis von  $\wedge^3 \mathbb{R}^4$  aus.

**Aufgabe 58.13.** (5 Punkte)

Wir betrachten die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

von  $\mathbb{R}^3$  und die dadurch induzierte Basis

$$\mathbf{v} = v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3$$

von  $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ . Bestimme die Übergangsmatrizen (in beide Richtungen) zwischen der Basis  $\mathbf{v}$  und der Standardbasis  $e_1 \wedge e_2$ ,  $e_1 \wedge e_3$ ,  $e_2 \wedge e_3$ .

**Aufgabe 58.14.** (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu  $\wedge^2 \varphi$  bezüglich der Standardbasen der Dachprodukte.



## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = Manhattan distance.svg , Autor = Benutzer Psychonaut auf Commons, Lizenz = PD	7
Quelle = Kapitolinischer Pythagoras.jpg , Autor = Benutzer Galilea auf de Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	15
Quelle = Pythagoras large font.svg , Autor = Benutzer KaiMartin auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	15
Quelle = Orthogonal Decomposition qtl1.svg , Autor = Benutzer Quartl auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	20
Quelle = Cross product parallelogram.svg , Autor = Benutzer Acdx auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	28
Quelle = Arccosine.svg , Autor = Benutzer Geek 3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	41
Quelle = Orthogonal transformation qtl1.svg , Autor = Benutzer Quartl auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	42
Quelle = Football theorem qtl1.svg , Autor = Benutzer Quartl auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	45
Quelle = Windschiefe Geraden.svg , Autor = Benutzer Kdkeller auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	58
Quelle = Kathetensatz.svg , Autor = Benutzer Gunther auf de wikipedia, Lizenz = gemeinfrei	68
Quelle = Triangle-thales-circle.svg , Autor = Benutzer MartinThoma auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	70
Quelle = Thales theorem.svg , Autor = Benutzer Helder, Dake (png version) auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	71
Quelle = River Chart.svg , Autor = Benutzer Fred the Oyster auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	72
Quelle = Doublethumbs.jpg , Autor = Benutzer Wessmann.clp auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	72
Quelle = Intercept2.svg , Autor = Benutzer ZooFari auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	73
Quelle = Strich.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = C-by-sa 4.0	77

Quelle = Dreieck mit Seitenhalbierende.png , Autor = Benutzer Birgit Lachner auf de Wikipedia, Lizenz = GNU FDL	79
Quelle = Circum.png , Autor = Benutzer GifTagger auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	80
Quelle = Bisectrices.svg , Autor = Benutzer jtico auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	82
Quelle = EulerGeradeColor.png , Autor = Benutzer Strike auf de Wikipedia, Lizenz = gemeinfrei	84
Quelle = Feuerbach circle.svg , Autor = Benutzer Piotr mil auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	84
Quelle = James Joseph Sylvester.jpg , Autor = nicht bekannt, Lizenz = PD	108
Quelle = 08608 einstein 1916.jpg , Autor = Benutzer Drdoht auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	116
Quelle = De Raum zeit Minkowski Bild.jpg , Autor = Benutzer Feitscherg auf Commons, Lizenz = PD	117
Quelle = Relativity of Simultaneity.svg , Autor = Benutzer Acdx auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	121
Quelle = Simple Parabola.svg , Autor = Benutzer Phancy Physicist auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	154
Quelle = Simple Hyperbola.svg , Autor = Benutzer Phancy Physicist auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	155
Quelle = Disk 1.svg , Autor = Benutzer Paris 16 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	155
Quelle = Circular Paraboloid.png , Autor = Benutzer Luke33 auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	157
Quelle = Hyperbolic paraboloid.png , Autor = Benutzer Luke33 auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	158
Quelle = Ellipsoid trojosi321.png , Autor = Benutzer Pajs auf cz. Wikipedia, Lizenz = gemeinfrei	158
Quelle = DoubleCone.png , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	158
Quelle = Hyperboloid1.png , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	159

	361
Quelle = Hyperboloid2.png , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	159
Quelle = Quadriken-7.svg , Autor = Benutzer Ag2gaeh auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	166
Quelle = Cusp.png , Autor = Benutzer Satipatthana auf Commons, Lizenz = PD	168
Quelle = Group homomorphism.svg , Autor = Benutzer Cronholm 144 auf Commons, Lizenz = CC-by-Sa 2.5	176
Quelle = Wildebeests in the Masaai Mara.jpg , Autor = Demosch (hochgeladen von Benutzer FlickreviewR auf Flickr), Lizenz = cc-by-2.0	183
Quelle = ParalleleGeradenKlassen.png , Autor = Mgausmann, Lizenz = CC-by-sa 4.0	185
Quelle = Ostfriesische-Inseln 2.jpg , Autor = Benutzer Godewind auf Commons, Lizenz = PD	185
Quelle = Chess Board.svg , Autor = Benutzer Nevit auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	186
Quelle = Visualisierung bspl 2-10.gif , Autor = Benutzer TiloW auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	187
Quelle = Construction blackboard integers.jpg , Autor = Construction blackboard integers (hochgeladen von Benutzer Darapti auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 3.0	190
Quelle = ModernChartresStyleLabyrinth.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	192
Quelle = TwoTone.svg , Autor = Benutzer Stevo auf Commons, Lizenz = PD	199
Quelle = ParalleleGeradenEbene.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	201
Quelle = Joseph-Louis Lagrange.jpeg , Autor = unbekannt (hochgeladen von Benutzer Katpatuka auf Commons), Lizenz = PD	202
Quelle = ParalleleGeradenEbeneAdditionWohlefiniert.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	205
Quelle = Coset multiplication.svg , Autor = Benutzer Cronholm 144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	205

Quelle = Irracional raiz de dois.png , Autor = Benutzer Jrnicolas auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	210
Quelle = Planes parallel.svg , Autor = Benutzer Qef auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	215
Quelle = Anillo cíclico.png , Autor = Romero Schmidtke (hochgeladen von Benutzer FrancoGG auf es.wikipedia.org), Lizenz = CC-BY-SA-3.0	227
Quelle = Gerade mit Orientierungen.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf CC-by-sa 4.0, Lizenz =	228
Quelle = Clockwise arrow.svg , Autor = Benutzer Scott5114 auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	228
Quelle = Counterclockwise arrow.svg , Autor = Benutzer Scott5114 auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	229
Quelle = UhrSchraegeEbene.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	230
Quelle = Right hand rule Cartesian axes.svg , Autor = Benutzer Cmglee auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	230
Quelle = Kulifeder.JPG , Autor = Benutzer Ghinrael auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0	232
Quelle = Ressort de compression.jpg , Autor = Benutzer Jean-Jacques MILAN auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	232
Quelle = linie.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	236
Quelle = Aurelia labiata - Tiergarten Schönbrunn 6.jpg , Autor = Benutzer Spavebirdy auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	238
Quelle = Bilaterian-plan.svg , Autor = Benutzer Looie496 auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	238
Quelle = Simetria-bilateria.svg , Autor = Benutzer Bea.miau auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	238
Quelle = One Big Arm.jpg , Autor = Charles Lam (hochgeladen von Benutzer Brian679 auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 2.0	239
Quelle = Snijden kruisen evenwijdig.png , Autor = Benutzer MADe auf nl.wikipedia, Lizenz = cc-by-sa 3.0	240
Quelle = Kreis3Teilung.svg , Autor = Benutzer Exxu auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	243

	363
Quelle = Kreis5Teilung.svg , Autor = Benutzer Exxu auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	243
Quelle = Puzzle z bliska w Poznaniu - maj 2020.jpg , Autor = Benutzer Koeftac auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	245
Quelle = Snijden kruisen evenwijdig.png , Autor = Benutzer MADE auf nl.wikipedia, Lizenz = cc-by-sa 3.0	246
Quelle = Symmetries of the tetrahedron.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = GFDL	248
Quelle = Tetrahedron.svg, Autor = Benutzer DTR auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	249
Quelle = Octahedron.svg, Autor = Benutzer DTR auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	249
Quelle = POV-Ray-Dodecahedron.svg, Autor = Benutzer DTR auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	249
Quelle = Icosahedron.svg, Autor = Benutzer DTR auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	249
Quelle = Hexahedron.svg , Autor = Benutzer DTR auf Commons, Lizenz =	249
Quelle = Metano.png , Autor = Benutzer Kaprak auf Commons, Lizenz = PD	249
Quelle = Regular polygons qtl3.svg , Autor = Benutzer Quartl auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	252
Quelle = Pentagonale bipyramide.png , Autor = Benutzer Quatrostein auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	253
Quelle = Duality Hexa-Okta.png , Autor = Benutzer Peter Steinberg auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	253
Quelle = Duality Okto-Hekta.png , Autor = Benutzer Peter Steinberg auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	254
Quelle = Platon altes Museum2.jpg , Autor = Benutzer GunnarBach auf Commons, Lizenz = PD	262
Quelle = Snijden kruisen evenwijdig.png , Autor = Benutzer MADE auf nl.wikipedia, Lizenz = cc-by-sa 3.0	267
Quelle = Cuboid diagonal-orthogonal.png , Autor = Benutzer Tomruen auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	268

- Quelle = Unit disc metrics.svg , Autor = Benutzer Krishnavedala auf Commons, Lizenz = PD 271
- Quelle = Neighborhood illust1.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD 272
- Quelle = Continuity topology.svg , Autor = Benutzer Dcoetzee auf Commons, Lizenz = PD 275
- Quelle = Cámara oscura.png , Autor = Benutzer CharoSaa auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 284
- Quelle = Stochmatgraph.png , Autor = Benutzer NikelsenH auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 299
- Quelle = Tred-G.svg , Autor = Benutzer Dmitry Dzhus auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 302
- Quelle = Digraph example.svg , Autor = Benutzer MasterMatt auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 310
- Quelle = Fussball.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 314
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 359
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 364