Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2025**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Finde die kleinste natürliche Zahl, die sich auf mehrfache Weise als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen lässt.

Aufgabe 1.2.*

Es seien x und y natürliche Zahlen, die man beide als eine Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann. Zeige, dass man auch das Produkt xy als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Aufgabe 1.3.*

Zu einer natürlichen Zahl n bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, sie als Summe von zwei Quadratzahlen darzustellen, d.h. $r(n)$ ist die Anzahl der 2-Tupel

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 = n.$$

Beweise die Beziehung

$$r(2n) = r(n).$$

Zeige, dass die vorstehende Aussage nicht gilt, wenn man nur Lösungen in $\mathbb{N}^2$ betrachtet.

Aufgabe 1.4. Es sei n eine natürliche Zahl, die modulo 8 den Rest 7 besitzt. Zeige, dass n nicht als Summe von drei Quadraten darstellbar ist.

Aufgabe 1.5. Bestimme für jede natürliche Zahl $n \leq 30$, ob sie sich als eine Summe von drei Quadratzahlen darstellen lässt.

Aufgabe 1.6. Bestimme für jede natürliche Zahl $n \leq 10$, auf wie viele verschiedene Arten sie sich als Summe von vier Quadratzahlen darstellen lässt, d.h. man bestimme die Anzahl der 4-Tupel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n.$$

Aufgabe 1.7.*

Zu einer natürlichen Zahl n bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, sie als Summe von vier Quadratzahlen darzustellen, d.h. $r(n)$ ist die Anzahl der 4-Tupel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n.$$

Es sei u eine ungerade positive Zahl. Beweise die Beziehung

$$r(2u) = 3r(u).$$

Zeige, dass die vorstehende Aussage nicht gilt, wenn man nur Lösungen in $\mathbb{N}^4$ betrachtet.

Aufgabe 1.8.*

Finde zwei natürliche Zahlen, deren Summe 65 und deren Produkt 1000 ist.

Aufgabe 1.9. Zeige, dass die Assoziiertheit in einem kommutativen Ring eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 1.10. Zeige, dass in einem kommutativen Ring R folgende Teilbarkeitsbeziehungen gelten.

(1) Sind a und b assoziiert, so gilt $a|c$ genau dann, wenn $b|c$.
(2) Ist R ein Integritätsbereich, so gilt hiervon auch die Umkehrung.

Aufgabe 1.11. Es sei R ein kommutativer Ring und seien f, g Nichtnullteiler in R. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls ein Nichtnullteiler ist.

Aufgabe 1.12. Zeige, dass im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K die Variable X irreduzibel und prim ist.

Aufgabe 1.13. Bestimme im Polynomring $K[X]$, wobei K ein Körper sei, die Einheiten und die Assoziiertheit. Gibt es in den Assoziiertheitsklassen besonders schöne Vertreter?

Im Polynomring $K[X]$ über einem Körper wird oft mit folgender Definition von irreduzibel gearbeitet.

Ein nichtkonstantes Polynom $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \in K[X]$, wobei K einen Körper bezeichne, heißt *irreduzibel*, wenn es keine Produktdarstellung

$$P = QR$$

gibt, die die Gradbedingung

$$0 < \deg(Q) < \deg(P)$$

erfüllt.

Aufgabe 1.14. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass die irreduziblen Polynome genau die irreduziblen Elemente in $K[X]$ sind.

Aufgabe 1.15.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und sei $P \in K[X]$ ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei T ein Teiler von P. Zeige, dass T ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors $X - a$ in T durch seine Vielfachheit in P beschränkt ist.

Aufgabe 1.16. Bestimme im Polynomring $F_2[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad $2, 3, 4$.

Aufgabe 1.17. Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$. Zeige, dass die Multiplikation mit f, also die Abbildung

$$\mu_f\colon R \longrightarrow R,\, x \longmapsto fx,$$

ein Gruppenhomomorphismus von $(R, +, 0)$ ist. Charakterisiere mit Hilfe der Multiplikationsabbildung, wann f ein Nichtnullteiler und wann f eine Einheit ist.

Aufgabe 1.18.*

Was bedeutet die Eigenschaft, dass man in einem Integritätsbereich „kürzen“ kann? Beweise diese Eigenschaft.

Aufgabe 1.19. Wir betrachten die Menge $R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass R (mit naheliegenden Verknüpfungen) ein kommutativer Ring ist. Handelt es sich um einen Integritätsbereich?

Aufgabe 1.20. Es seien X und Y topologische Räume und

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass dies einen Ringhomomorphismus

$$C(Y, \mathbb{R}) \longrightarrow C(X, \mathbb{R}),\; f \longmapsto f \circ \varphi,$$

induziert.

Aufgabe 1.21. Es sei M ein metrischer Raum und $R = C(M, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktion auf M. Zeige, dass zwei zueinander assoziierte Elemente $f, g \in R$ die gleiche Nullstellenmenge besitzen, und dass die Umkehrung nicht gelten muss.

Aufgabe 1.22.*

Zeige, dass es stetige Funktionen

$$f, g \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},$$

mit $fg = 0$ derart gibt, dass für alle $\delta > 0$ weder $f|_{[0,\delta]}$ noch $g|_{[0,\delta]}$ die Nullfunktion ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.23. (4 Punkte)

Beweise die folgenden Eigenschaften zur Teilbarkeit in einem kommutativen Ring R

(1) Für jedes Element a gilt $1|a$ und $a|a$.
(2) Für jedes Element a gilt $a|0$.
(3) Gilt $a|b$ und $b|c$, so gilt auch $a|c$.
(4) Gilt $a|b$ und $c|d$, so gilt auch $ac|bd$.
(5) Gilt $a|b$, so gilt auch $ac|bc$ für jedes $c \in R$.
(6) Gilt $a|b$ und $a|c$, so gilt auch $a|rb+sc$ für beliebige Elemente $r, s \in R$.

Aufgabe 1.24. (4 Punkte)

Zeige, dass in einem kommutativen Ring R folgende Teilbarkeitsbeziehungen gelten.

(1) -1 ist eine Einheit, die zu sich selbst invers ist.
(2) Jede Einheit teilt jedes Element.
(3) Sind a und b assoziiert, so gilt $a|c$ genau dann, wenn $b|c$.
(4) Teilt a eine Einheit, so ist a selbst eine Einheit.

Aufgabe 1.25. (4 Punkte)

Bestimme im Polynomring $F_3[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 3.

Aufgabe 1.26. (2 Punkte)

Zeige, dass es im Ring der stetigen Funktionen $R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Nichtnullteiler gibt, die unendlich viele Nullstellen besitzen.

Die Aufgabe zum Aufgeben

Für eine Lösung des folgenden Collatz-Problems haben verschiedene Autoren einen Preis ausgesetzt. Lösungen bitte an die Autoren. Für akzeptierte und prämierte Erstlösungen gibt es hier zusätzlich 200 Punkte, und Sie wären damit automatisch zur Klausur zugelassen.

Aufgabe 1.27. (200 Punkte)

Für positive ganze Zahlen n betrachten wir folgenden Algorithmus.

> Wenn n gerade ist, so ersetze n durch die Hälfte.
>
> Wenn n ungerade ist, so multipliziere n mit 3 und addiere dann 1 dazu.

Frage (Collatz-Problem): Ist es wahr, dass man bei jeder Startzahl n früher oder später bei 1 landet?

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7