Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2025**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 10

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.1. Es seien x und y ungerade. Zeige, dass $x^2 + y^2$ keine Quadratzahl ist.

Aufgabe 10.2. Es sei (x, y, z) ein pythagoreisches Tripel. Zeige, dass x oder y ein Vielfaches von 3 ist.

Aufgabe 10.3.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in \,]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in \,]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 \neq c^2.$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in \,]0,1[$ und eine rationale Zahl $c \in \,]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Aufgabe 10.4. Zeige, dass die in Satz 10.4 beschriebene rationale Parametrisierung des Einheitskreises injektiv ist.

Aufgabe 10.5. Skizziere ein Dreieck D derart, dass eine Höhe das Dreieck D in zwei verschiedene rechtwinklige Dreiecke D_1 und D_2 unterteilt so, dass die Seitenlängen von D_1 und D_2 jeweils pythagoreische Tripel bilden. Man gebe die Seitenlängen an.

Aufgabe 10.6. Zeige, dass die Menge

$$S^1_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}] \mid |z| = 1\}$$

mit der Multiplikation in $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 10.7. Es sei

$$S^1_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}] \mid |z| = 1\}$$

der rationale Einheitskreis mit der aus $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]^\times$ ererbten Gruppenstruktur. Berechne die ersten vier Potenzen von $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \in S^1_{\mathbb{Q}}$.

Aufgabe 10.8. Zeige, dass der Einheitskreis

$$S^1_{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{R}[\mathrm{i}] \cong \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

isomorph zu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 10.9. Es sei

$$n = r^2 + s^2 = (r + \mathrm{i}s)(r - \mathrm{i}s)$$

eine Summen von zwei Quadraten mit der zugehörigen Zerlegung in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Berechne n^2 auf zwei verschiedene Weisen und zeige damit, dass

$$\frac{r^2 - s^2 + 2rs\mathrm{i}}{n}$$

ein Punkt auf dem rationalen Einheitskreis ist.

Aufgabe 10.10. Zeige, dass der rationale Einheitskreis (als Gruppe) nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 10.11. Zeige, dass die beiden kommutativen Gruppen $(\mathbb{Q}, 0, +)$ und $(\mathbb{Q}_+, 1, \cdot)$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 10.12. Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Q}[\mathrm{i}]^\times \longrightarrow (\mathbb{Q}_+, 1, \cdot),\ x + \mathrm{i}y \longmapsto x^2 + y^2,$$

nicht surjektiv ist.

Aufgabe 10.13. Zeige mit Hilfe des pythagoreischen Tripels $(9, 40, 41)$, dass es ein rechtwinkliges Dreieck gibt, dessen Seitenlängen alle rational sind und dessen Flächeninhalt gleich 5 ist.

Aufgabe 10.14.*

Zeige, dass es kein rechtwinkliges Dreieck gibt, dessen Seitenlängen alle rational sind und dessen Flächeninhalt gleich 2 ist.

AUFGABE 10.15.*

Zeige mit Hilfe der Aussage, dass $x^4 - y^4 = z^2$ keine ganzzahlige nichttriviale Lösung besitzt, dass es kein rechtwinkliges Dreieck gibt, dessen Seitenlängen alle rational sind und dessen Flächeninhalt gleich 1 ist.

AUFGABE 10.16. Zeige, dass die quadratische Gleichung

$$x^2 - 5y^2 = 2$$

keine ganzzahlige Lösung besitzt.

AUFGABE 10.17.*

Zeige, dass in $\mathbb{Z}/(29)$ die Gleichung

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0$$

nur die triviale Lösung $(0, 0, 0)$ besitzt.

AUFGABE 10.18. Finde eine nichttriviale ganzzahlige Lösung für das Gleichungssystem $ab = c$ und $(a - 1)d = c - 1$.

AUFGABE 10.19. Finde mindestens eine ganzzahlige Lösung $(x, y) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ für die diophantische Gleichung

$$x^k + 1 = y^n$$

für $k, n \geq 2$.

AUFGABE 10.20. Zeige: Um den Satz von Wiles für alle Exponenten $n \geq 3$ zu zeigen, genügt es, ihn für alle ungeraden Primzahlen als Exponenten zu beweisen.

AUFGABE 10.21. Zeige unter Verwendung des Satzes von Wiles, dass die diophantische Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 0$$

für $n \geq 2$ keine von $(0, 0, 0)$ verschiedene Lösung besitzt.

AUFGABE 10.22. Bestätige die folgenden Identitäten.

(1)
$$1 + 2^3 = 3^2.$$

(2)
$$2^5 + 7^2 = 3^4.$$

(3)

$$13^2 + 7^3 = 2^9.$$

AUFGABE 10.23. Bestätige die folgende Identität.

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

AUFGABE 10.24.*

Bestätige die Gleichung

$$(-2 + \mathrm{i})^3 + (-2 - \mathrm{i})^3 = (1 + \mathrm{i})^4.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 10.25. (4 Punkte)

Es sei

$$S^1_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}] \mid |z| = 1\}$$

der rationale Einheitskreis mit der aus $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]^\times$ ererbten Gruppenstruktur. Zeige, dass die Gruppen $S^1_{\mathbb{Q}}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.

AUFGABE 10.26. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}/(11)$ alle Lösungen (x, y) der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

AUFGABE 10.27. (4 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}/(7)$ alle Lösungen (x, y) der diophantischen quadratischen Gleichung

$$3x^2 + 2y^2 + 5xy + 4x + 8y + 6 = 0.$$

AUFGABE 10.28. (4 Punkte)

Approximiere die (obere) primitive dritte Einheitswurzel auf dem rationalen Einheitskreis mit einem Fehler von maximal 1/1000000.

Abbildungsverzeichnis