

**Zahlentheorie****Arbeitsblatt 12****Übungsaufgaben**

AUFGABE 12.1. Zeige, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}$  die Abschätzungen

$$0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \leq 1$$

gelten.

AUFGABE 12.2.\*

Bestimme die Anzahl der hinteren Nullen in der Dezimalentwicklung von  $100!$ .

AUFGABE 12.3.\*

Bestimme die Primfaktorzerlegung von  $10!$ .

AUFGABE 12.4. Bestimme die Primfaktorzerlegung von

$$\binom{20}{10}.$$

AUFGABE 12.5. Zeige mit Hilfe des Bertrandschen Postulats, dass für jedes  $n \geq 2$  der Binomialkoeffizient

$$\binom{2n}{n}$$

einen Primfaktor größer als  $n$  besitzt.

AUFGABE 12.6. Zeige, dass für  $n \geq 2$  die Fakultät  $n!$  keine Quadratzahl ist.

AUFGABE 12.7.\*

Es sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass das Produkt von  $n$  aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen von  $n!$  geteilt wird.

Zur Erinnerung.

AUFGABE 12.8. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis  $b$  die folgenden Rechenregeln erfüllen.

- (1) Es ist  $\log_b(b^x) = x$  und  $b^{\log_b(y)} = y$ , das heißt der Logarithmus zur Basis  $b$  ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis  $b$ .
- (2) Es gilt  $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$ .
- (3) Es gilt  $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$  für  $u \in \mathbb{R}$ .
- (4) Es gilt

$$\log_a y = \log_a (b^{\log_b y}) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

AUFGABE 12.9. Es sei  $\varphi(n)$  die Eulersche Funktion. Zeige, dass die Folge  $\frac{\varphi(n)}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sowohl in 1 als auch in  $\frac{1}{3}$  einen Häufungspunkt besitzt.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 12.10. (4 Punkte)

Es sei  $\varphi(n)$  die Eulersche Funktion. Zeige, dass die Folge  $\frac{\varphi(n)}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sowohl in 1 als auch in 0 einen Häufungspunkt besitzt.

AUFGABE 12.11. Beweise Korollar 12.5, also die Aussage, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$$

ist, mit Hilfe von Korollar 11.6 über die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion.

AUFGABE 12.12. Bestimme anhand des Beweises der Abschätzungen von Tschebyschow einen expliziten Wert für  $c$  mit  $\pi(x) \geq c \frac{x}{\ln(x)}$ .

AUFGABE 12.13. Zeige unter Verwendung der Abschätzungen von Tschebyschow, dass es (zumindest für  $x$  hinreichend groß) mehr Primzahlen zwischen  $x$  und  $x^2$  als zwischen 1 und  $x$  gibt.

## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3