

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

AUFGABE 14.1. Bestimme für alle $n \leq 30$, ob das regelmäßige n -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist oder nicht.

AUFGABE 14.2. Man gebe eine Liste aller natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 200 mit der Eigenschaft, dass das regelmäßige n -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

AUFGABE 14.3. Welche der Winkel

$$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, \dots, 10^\circ$$

sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

AUFGABE 14.4. Welche der Winkel

$$10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, \dots, 350^\circ$$

sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

AUFGABE 14.5.*

Finde die kleinste Zahl $n \geq 100$ derart, dass zugleich das reguläre n -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist und dass n eine Summe von zwei Quadraten ist.

AUFGABE 14.6.*

- a) Zeige, dass die Endziffer einer Sophie-Germain-Primzahl p im Zehnersystem nicht 7 sein kann.
- b) Zeige, dass die Zahlen 1, 3, 5, 9 als Endziffer einer Sophie-Germain-Primzahl auftreten können.

2

AUFGABE 14.7. Es sei p eine Sophie-Germain-Primzahl und $q = 2p + 1$. Es sei a gegeben mit $2 \leq a \leq q - 2$. Zeige, dass a genau dann eine primitive Einheit modulo q ist, wenn es kein Quadratrest modulo q ist.

AUFGABE 14.8. Es sei p eine Sophie-Germain-Primzahl, $q = 2p + 1$. Zeige, dass q ein Teiler von $M_p + 2 = 2^p + 1$ genau dann ist, wenn $q = \pm 3 \pmod{8}$ ist.

AUFGABE 14.9.*

Zeige: Für eine Primzahl p ist die Mersennesche Zahl M_p quasiprim zur Basis 2.

AUFGABE 14.10. Zeige, dass 1105 und 1729 Carmichael-Zahlen sind.

AUFGABE 14.11. Es sei p eine Primzahl > 3 mit der Eigenschaft, dass auch $2p - 1$ und $3p - 2$ prim sind. Zeige, dass dann

$$n = p(2p - 1)(3p - 2)$$

eine Carmichael-Zahl ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 14.12. (3 Punkte)

Beschreibe die Konstruktion mit Zirkel und Lineal eines regelmäßigen Fünfecks, wie sie in der folgenden Animation dargestellt ist.



AUFGABE 14.13. (3 Punkte)

Es sei p eine Sophie-Germain-Primzahl. Zeige, dass 2 eine Primitivwurzel modulo $q = 2p + 1$ ist genau dann, wenn $p = 1 \pmod{4}$ ist.

AUFGABE 14.14. (3 Punkte)

Es sei n eine Carmichael-Zahl. Zeige, dass n ungerade und mindestens drei Primfaktoren besitzt.

AUFGABE 14.15. (3 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl. Zeige, dass das Potenzieren

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(n), a \longmapsto a^n,$$

genau dann die Identität ist, wenn n eine Primzahl, eine Carmichael-Zahl oder gleich 1 ist.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Pentagon construct.gif , Autor = TokyoJunkie (hochgeladen von Benutzer Mosmas auf en.wikiversity.org), Lizenz = PD 2
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5