

**Zahlentheorie****Arbeitsblatt 16****Übungsaufgaben**

AUFGABE 16.1. Berechne die Diskriminante zur Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[i]$$

zur Basis  $1$  und  $i$  und zur Basis  $2 - 5i$  und  $4 + 7i$ .

AUFGABE 16.2.\*

Berechne explizit die Diskriminante des quadratischen Zahlbereichs  $A_{-7}$ . Stelle die Multiplikationsmatrix bezüglich einer geeigneten Basis für das Element

$$f = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{-7}$$

auf und berechne damit die Spur und die Norm von  $f$ .

AUFGABE 16.3. Es sei  $p$  eine Primzahl und sei

$$L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - p)$$

der durch das irreduzible Polynom  $X^3 - p$  definierte Erweiterungskörper von  $\mathbb{Q}$ . Es sei

$$f = 2 + 3x - 4x^2.$$

- Finde die Matrix bezüglich der  $\mathbb{Q}$ -Basis  $1, x, x^2$  von  $L$  der durch die Multiplikation mit  $f$  definierten  $\mathbb{Q}$ -linearen Abbildung.
- Berechne die Norm und die Spur von  $f$ .
- Bestimme das Minimalpolynom von  $f$ .
- Finde das Inverse von  $f$ .
- Berechne die Diskriminante der Basis  $1, f, f^2$ .

AUFGABE 16.4. Beweise Lemma 16.6 unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass  $L$  von  $z$  erzeugt wird.

AUFGABE 16.5. Es sei  $G$  eine kommutative Gruppe. Zeige, dass  $G$  auf genau eine Weise die Struktur eines  $\mathbb{Z}$ -Moduls trägt. Kommutative Gruppen und  $\mathbb{Z}$ -Moduln sind also äquivalente Objekte.

AUFGABE 16.6. Es seien  $R$  und  $A$  kommutative Ringe. Zeige, dass  $A$  genau dann eine  $R$ -Algebra ist, wenn  $A$  ein  $R$ -Modul ist, für den zusätzlich

$$r(ab) = (ra)b \text{ für alle } r \in R, a, b \in A$$

gilt.

AUFGABE 16.7. Es sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal in einem kommutativen Ring  $R$ . Zeige, dass  $\mathfrak{a}$  genau dann ein Primideal ist, wenn  $\mathfrak{a}$  der Kern eines Ringhomomorphismus  $\varphi: R \rightarrow K$  in einen Körper  $K$  ist.

AUFGABE 16.8. Zeige, dass jeder Restklassenring eines Hauptidealringes wieder ein Hauptidealring ist. Man gebe ein Beispiel, dass ein Restklassenring eines Hauptidealbereiches kein Hauptidealbereich sein muss.

Ein Ideal  $\mathfrak{a}$  in einem kommutativen Ring  $R$  heißt *Radikal* (oder *Radikalideal*), wenn folgendes gilt: Falls  $f^n \in \mathfrak{a}$  ist für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so ist bereits  $f \in \mathfrak{a}$ .

AUFGABE 16.9. Zeige, dass ein Primideal ein Radikal ist.

AUFGABE 16.10.\*

Zeige, dass ein Ideal  $\mathfrak{a}$  in einem kommutativen Ring  $R$  genau dann ein Radikal ist, wenn der Restklassenring  $R/\mathfrak{a}$  reduziert ist.

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ein Ideal. Dann nennt man die Menge

$$\{f \in R \mid \text{es gibt ein } r \text{ mit } f^r \in \mathfrak{a}\}$$

das *Radikal* zu  $\mathfrak{a}$ . Es wird mit  $\text{rad}(\mathfrak{a})$  bezeichnet.

AUFGABE 16.11. Bestimme in  $\mathbb{Z}$  das Radikal zum Ideal  $\mathbb{Z}27$ .

AUFGABE 16.12. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $S \subseteq R$  ein Unterring. Bestätige oder widerlege die folgenden Aussagen.

- (1) Zu einem Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ist auch  $\mathfrak{a} \cap S$  ein Ideal (in  $S$ ).
- (2) Zu einem Radikal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ist auch  $\mathfrak{a} \cap S$  ein Radikal.
- (3) Zu einem Primideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ist auch  $\mathfrak{a} \cap S$  ein Primideal.
- (4) Zu einem maximalen Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ist auch  $\mathfrak{a} \cap S$  ein maximales Ideal.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 16.13. (8 Punkte)

Es sei  $p$  eine Primzahl und sei

$$L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - p)$$

der durch das irreduzible Polynom  $X^3 - p$  definierte Erweiterungskörper von  $\mathbb{Q}$ . Es sei

$$f = 2 + 3x - 4x^2.$$

- a) Finde die Matrix bezüglich der  $\mathbb{Q}$ -Basis  $1, x, x^2$  von  $L$  der durch die Multiplikation mit  $f$  definierten  $\mathbb{Q}$ -linearen Abbildung.
- b) Berechne die Norm und die Spur von  $f$ .
- c) Bestimme das Minimalpolynom von  $f$ .
- d) Finde das Inverse von  $f$ .
- e) Berechne die Diskriminante der Basis  $1, f, f^2$ .

AUFGABE 16.14. (3 Punkte)

Es sei  $(G, +, 0)$  eine kommutative Gruppe. Es sei

$$E := \text{End}(G) = \text{Hom}(G, G)$$

die Menge der Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $G$  (also die Gruppenendomorphismen auf  $G$ ). Definiere auf  $E$  eine Addition und eine Multiplikation derart, dass  $E$  zu einem (in der Regel nicht kommutativen) Ring wird.

AUFGABE 16.15. (3 Punkte)

Es sei  $(M, +, 0)$  eine kommutative Gruppe und sei  $E = \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$  der zugehörige Endomorphismenring. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring. Zeige, dass eine  $R$ -Modulstruktur auf  $M$  äquivalent ist zu einem Ringhomomorphismus  $R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ .

AUFGABE 16.16. (4 Punkte)

Es seien  $R$  und  $S$  kommutative Ringe und sei  $\varphi: R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus. Es sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal in  $S$ . Zeige, dass das Urbild  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$  ein Primideal in  $R$  ist. Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

## AUFGABE 16.17. (3 Punkte)

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $\mathfrak{a} \neq R$  ein Ideal in  $R$ . Zeige:  $\mathfrak{a}$  ist genau dann ein maximales Ideal, wenn es zu jedem  $g \in R$ ,  $g \notin \mathfrak{a}$ , ein  $f \in \mathfrak{a}$  und ein  $r \in R$  mit  $rg + f = 1$  gibt.

## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5