Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2025**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1. Finde eine irreduzible Ganzheitsgleichung (über $\mathbb{Z}$) für die Eisensteinzahl $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Aufgabe 17.2. Es sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Zeige, dass wenn R ein Körper ist, die Begriffe algebraisch und ganz für ein Element $x \in A$ übereinstimmen. Zeige ferner, dass für einen Integritätsbereich, der kein Körper ist, diese beiden Begriffe auseinander fallen.

Aufgabe 17.3. Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 17.4.*

Es seien R und S Integritätsbereiche und sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Es sei $f \in R$ ein Element, das in S eine Einheit ist. Zeige, dass f dann schon in R eine Einheit ist.

Aufgabe 17.5. Es sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung und sei $f \in R$. Zeige: Wenn f, aufgefasst in S, eine Einheit ist, dann ist f eine Einheit in R.

Aufgabe 17.6. Man gebe ein Beispiel einer ganzen Ringerweiterung $R \subseteq S$, wo es einen Nichtnullteiler $f \in R$ gibt, der ein Nullteiler in S wird.

Aufgabe 17.7. Es sei K ein Körper und sei A eine endlichdimensionale K-Algebra. Zeige direkt (ohne Lemma 17.7), dass A ganz über K ist.

Aufgabe 17.8. Es sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung zwischen endlichen kommutativen Ringen R und S. Zeige, dass eine ganze Ringerweiterung vorliegt.

Aufgabe 17.9. Es sei R ein kommutativer Ring und

$$S = R[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$$

eine (als Algebra) endlich erzeugte R-Algebra, die ganz über R sei. Zeige, dass S ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Aufgabe 17.10.

(1) Es sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R ganz-abgeschlossen im Polynomring $R[X]$ ist.
(2) Man gebe ein Beispiel für einen kommutativen Ring R, der im Polynomring nicht ganz-abgeschossen ist.

Aufgabe 17.11. Es sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R genau dann normal ist, wenn er mit seiner Normalisierung übereinstimmt.

Aufgabe 17.12. Es sei R ein Integritätsbereich. Es sei angenommen, dass die Normalisierung von R gleich dem Quotientenkörper $Q(R)$ ist. Zeige, dass dann R selbst schon ein Körper ist.

Aufgabe 17.13. Es sei K ein Körper und sei $R_i \subseteq K$, $i \in I$, eine Familie von normalen Unterringen. Zeige, dass auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ normal ist.

Aufgabe 17.14. Es sei R ein normaler Integritätsbereich und $a \in R$. Es sei vorausgesetzt, dass a keine Quadratwurzel in R besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^2 - a$ prim in $R[X]$ ist. Tipp: Verwende den Quotientenkörper $Q(R)$. Warnung: Prim muss hier nicht zu irreduzibel äquivalent sein.

Aufgabe 17.15. Es sei R ein Integritätsbereich mit Normalisierung R^{norm}. Zeige, dass durch

$$\mathfrak{f} = \{g \in R \mid gR^{\text{norm}} \subseteq R\}$$

ein Ideal in R gegeben ist.

Aufgabe 17.16. Es sei k eine fixierte positive ganze Zahl und betrachte den Unterring

$$R = \mathbb{Z}[k\mathrm{i}] = \{a + ck\mathrm{i} \mid a, c \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}[\mathrm{i}].$$

Zeige die Isomorphie $R \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + k^2)$ und dass $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ ganz über R ist.

In den folgenden Aufgaben wird der Polynomring $K[X,Y]$ in zwei Variablen über einem Körper K verwendet. Diesen kann man definieren als $(K[X])[Y]$. Die Elemente in ihm, also die Polynome in zwei Variablen, haben die Gestalt

$$P = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j .$$

Wir interessieren uns für Restklassenringe vom Typ $R = K[X,Y]/(F)$. Die Nullstellenmenge von$F$ besteht aus der Menge derjenigen Punkte (x,y) in der Ebene, für die $F(x,y) = 0$ ist (dieses Nullstellengebilde ist eine geometrische Version des Ringes R).

Aufgabe 17.17. Es sei K ein Körper und betrachte den Restklassenring

$$R = K[X,Y]/(X^2 - Y^3).$$

Dies ist ein Integritätsbereich nach Aufgabe 17.14. Zeige, dass die Normalisierung von R gleich dem Polynomring $K[T]$ ist. Skizziere die Nullstellenmenge von $F = X^2 - Y^3$ in der reellen Ebene und finde eine Parametrisierung dieses Gebildes.

Polynomringe kann man entsprechend über jedem Grundring und mit beliebig vielen Variablen definieren.

Aufgabe 17.18. Es sei

$$P = X^2 - 3X + 7$$

und

$$Q = Y^3 - Y^2 + 4Y - 5.$$

Begründe, dass die Ringerweiterung

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[X,Y]/(P,Q)$$

ganz ist und finde eine Ganzheitsgleichung für $x + y$ und für xy (kleine Buchstaben bezeichnen die Restklassen der Variablen).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.19. (3 Punkte)

Es sei R ein normaler Integritätsbereich und $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Sei $f \in R$. Zeige, dass für das von f erzeugte Hauptideal gilt:

$$R \cap (f)S = (f)R.$$

Aufgabe 17.20. (3 Punkte)

Es seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen derart, dass S ganz über R und T ganz über S ist. Zeige, dass dann auch T ganz über R ist.

Aufgabe 17.21. (4 Punkte)

Bestimme das Inverse von

$$2 + 3\sqrt{5} + \sqrt{7} + 3\sqrt{35}$$

im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}]$.

Aufgabe 17.22. (4 Punkte)

Zeige, dass für natürliche Zahlen $a, b \geq 1$ und $n \geq 2$ die Zahl $a^n - b^n$ nicht ein Teiler von $a^n + b^n$ ist.

Aufgabe 17.23. (5 Punkte)

Es sei K ein Körper und betrachte den Ringhomomorphismus $\varphi\colon\ R = K[X, Y] \to K[T]$, der durch die Einsetzung

$$X \longmapsto (T - 1)(T + 1) \text{ und } Y \longmapsto T(T - 1)(T + 1)$$

gegeben ist. Finde ein von 0 verschiedenes Polynom $F \in K[X, Y]$ derart, dass F unter φ auf 0 abgebildet wird. Skizziere die Nullstellenmenge von F in der reellen Ebene.

Aufgabe 17.24. (4 Punkte)

Definiere unter Anlehnung an die Parametrisierung der pythagoreischen Tripel einen Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 - Z^2) \longrightarrow \mathbb{Z}[U, V].$$

Zeige, dass dieser injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Abbildungsverzeichnis