

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 18

Übungsaufgaben

AUFGABE 18.1. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und es sei $R \subseteq L$ ein Unterring mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) R ist ganz über \mathbb{Z} .
- (2) Es ist $Q(R) = L$.
- (3) R ist normal.

Dann ist R der Ring der ganzen Zahlen von L .

AUFGABE 18.2. Es sei R ein Zahlbereich und es sei $R \subseteq S$ eine endliche Erweiterung von kommutativen Ringen. Es sei S ein normaler Integritätsbereich. Zeige, dass S ebenfalls ein Zahlbereich ist.

AUFGABE 18.3. Es sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$. Zeige, dass $N(f) \in (f)$ ist, dass also die Norm zum von f erzeugten Hauptideal gehört. Zeige durch ein Beispiel, dass dies für die Spur nicht gelten muss.

AUFGABE 18.4.*

Es sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$. Zeige, dass die Spur und die Norm von f ganzzahlig sind.

In den drei folgenden Aufgaben wird der Begriff des primitiven Polynoms verwendet:

Ein Polynom $F \in \mathbb{Z}[X]$ heißt *primitiv*, wenn die Koeffizienten von F teilerfremd sind.

AUFGABE 18.5. Es sei $F \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass man F als $F = n\tilde{F}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und primitivem \tilde{F} schreiben kann.

AUFGABE 18.6. Es sei $F \in \mathbb{Z}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist F , aufgefasst als Polynom in $\mathbb{Q}[X]$, ebenfalls irreduzibel.

AUFGABE 18.7. Es seien $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ primitive Polynome. Zeige, dass dann auch das Produkt FG primitiv ist.

AUFGABE 18.8. Es sei R ein faktorieller Zahlbereich und $\mathbb{Z} \subseteq R$ die zugehörige Erweiterung. Zu einer Primzahl p sei

$$p = q_1^{r_1} \cdots q_k^{r_k}$$

die Primfaktorzerlegung von p in R (die q_i seien also paarweise nicht assoziiert). Zeige, dass die Primideale \mathfrak{p} von R mit der Eigenschaft $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$ genau die Primideale der Form $\mathfrak{p} = (q_i)$ sind.

AUFGABE 18.9. Es sei R ein Zahlbereich und sei $f_1, \dots, f_n \in R$ eine \mathbb{Z} -Basis von R . Zeige, dass dann der Betrag der Diskriminante

$$|\Delta(f_1, \dots, f_n)|$$

minimal ist unter allen Diskriminanten von linear unabhängigen n -Tupeln aus R .

AUFGABE 18.10. Berechne die Diskriminante der Gaußschen Zahlen. Man gebe zwei wesentlich verschiedene \mathbb{Z} -Basen von $\mathbb{Z}[i]$ an und überprüfe, dass die Diskriminanten übereinstimmen.

AUFGABE 18.11. Man gebe ein Beispiel für einen Dedekindbereich, wo jeder Restklassenring $\neq 0$ unendlich ist, und für einen Dedekindbereich, der einen Körper enthält und wo alle echten Restklassenringe endlich sind.

AUFGABE 18.12.*

Es sei R ein noetherscher, kommutativer Ring. Zeige, dass dann auch jeder Restklassenring R/\mathfrak{a} noethersch ist.

AUFGABE 18.13. Es sei K ein Körper und sei

$$K[X_n, n \in \mathbb{N}]$$

der Polynomring über K in unendlich vielen Variablen. Man beschreibe darin ein nicht endlich erzeugtes Ideal und eine unendliche, echt aufsteigende Idealkette.

Die folgenden Aufgaben benutzen das Produkt von Idealen.

Zu zwei Idealen \mathfrak{a} und \mathfrak{b} in einem kommutativen Ring wird das *Produkt* durch

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k \mid a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}\}$$

definiert.

Für das n -fache Produkt eines Ideals \mathfrak{a} mit sich selbst schreibt man \mathfrak{a}^n .

AUFGABE 18.14. Zeige, dass das Produkt von Hauptidealen wieder ein Hauptideal ist.

AUFGABE 18.15. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ Ideale in einem kommutativen Ring R . Zeige, dass die Beziehung

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$$

gilt.

AUFGABE 18.16. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R . Zeige, dass die Potenzen \mathfrak{a}^n , $n \in \mathbb{N}_+$, alle dasselbe Radikal besitzen.

AUFGABE 18.17.*

Es seien I und J Ideale in einem kommutativen Ring R und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige die Gleichheit

$$(I + J)^n = I^n + I^{n-1}J + I^{n-2}J^2 + \cdots + I^2J^{n-2} + IJ^{n-1} + J^n.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 18.18. (5 Punkte)

Es sei $R = \mathbb{Z}[X]/(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$. Bestimme die Primideale in R , die über den Primzahlen $p = 2, 3, 5, 7$ liegen.

AUFGABE 18.19. (3 Punkte)

Es sei p eine Primzahl. Betrachte die endliche Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - p)$$

vom Grad 3. Sei $f = aX^2 + bX + c \in L$ ein Element davon mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Berechne das Minimalpolynom von f und man gebe die Koeffizienten davon explizit an. Bestimme insbesondere die Norm und die Spur von f . Welche Bedingungen an a, b, c ergeben sich aus der Voraussetzung, dass f ganz über \mathbb{Z} ist?

AUFGABE 18.20. (3 Punkte)

Es sei R ein Dedekindbereich und seien \mathfrak{p} und \mathfrak{q} verschiedene Primideale $\neq 0$.
Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$R/\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} \longrightarrow R/\mathfrak{p} \times R/\mathfrak{q}.$$

AUFGABE 18.21. (4 Punkte)

Es sei R ein Dedekindbereich und seien \mathfrak{p} und \mathfrak{q} zwei verschiedene Primideale.
Dann ist

$$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}.$$

AUFGABE 18.22. (4 Punkte)

Zeige: Ein kommutativer Ring R ist genau dann noethersch, wenn es in R
keine unendliche echt aufsteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \dots$$

gibt.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5