Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2025**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 20

Übungsaufgaben

Aufgabe 20.1. Bestimme den (Isomorphietyp des) Ganzheitsringes der quadratischen Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[X]/\left(X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{5}{7}\right).$$

Aufgabe 20.2. Zeige, dass die Konjugation auf $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ ein Körperautomorphismus und auf A_D ein Ringautomorphismus ist. Zeige, dass der Invariantenring gleich $\mathbb{Q}$ bzw. gleich $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 20.3. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich. Zeige, dass die 1 Teil einer Ganzheitsbasis von R ist.

Aufgabe 20.4. Bestimme die Konjugation für $\sqrt{D}$ bzw. für ω in den verschiedenen expliziten Beschreibungen für die quadratischen Zahlbereiche.

Aufgabe 20.5. Bestimme die Spur für $\sqrt{D}$ bzw. für ω in den verschiedenen expliziten Beschreibungen für die quadratischen Zahlbereiche.

Aufgabe 20.6. Bestimme die Norm für $\sqrt{D}$ bzw. für ω in den verschiedenen expliziten Beschreibungen für die quadratischen Zahlbereiche.

Aufgabe 20.7. Es seien D und E zwei verschiedene quadratfreie Zahlen und seien A_D und A_E die zugehörigen quadratischen Zahlbereiche. Zeige

$$A_D \cap A_E = \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 20.8.*

Bestimme ein Element aus $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$, das unter allen Nichteinheiten minimale Norm besitzt. Begründe, dass dieses Element irreduzibel ist.

Aufgabe 20.9. Es sei $D \neq 0, 1$ quadratfrei. Bestimme die Restklassengruppe $A_D/\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.

Aufgabe 20.10. Es sei D eine quadratfreie Zahl mit $D = 1 \mod 4$, und sei A_D der zugehörige quadratische Zahlbereich. Man gebe eine Ganzheitsgleichung für $\frac{1+\sqrt{D}}{2}$ über $\mathbb{Z}$ an. Man zeige, dass es keine echten Zwischenringe $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subset R \subset A_D$ gibt.

Aufgabe 20.11. Bestimme für die quadratischen Zahlbereiche A_D mit negativem D sämtliche Einheiten.

Aufgabe 20.12.*

Für welche quadratfreien Zahlen mit

$$D = 1 \mod 4$$

ist $\frac{1+\sqrt{D}}{2}$ eine Einheit?

Aufgabe 20.13. Zeige, dass in $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ das Element $8+3\sqrt{7}$ eine Einheit ist.

Aufgabe 20.14. Finde ein quadratfreies D derart, dass die natürliche Inklusion

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq A_D$$

die Eigenschaft besitzt, dass es zwei verschiedene Primideale $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ in A_D gibt, die beide über dem gleichen Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ liegen. Was ist $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$?

Aufgabe 20.15. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich. Zeige, dass es nur endlich viele Primzahlen mit der Eigenschaft gibt, dass der Faserring über $\mathbb{Z}/(p)$ nicht reduziert ist.

Aufgabe 20.16. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich. Zeige, dass die Konjugation zu jeder Primzahl p einen $\mathbb{Z}/(p)$-Algebraisomorphismus des Faserringes über p in sich selbst induziert. Beschreibe diesen in den drei möglichen Fällen im Sinne von Lemma 19.9 bzw. Satz 20.13.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.17. (5 Punkte)

Es sei $D \neq 0, 1$ eine quadratfreie Zahl und betrachte die quadratische Erweiterung $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Es sei p ein Primfaktor von D und es sei vorausgesetzt, dass weder p noch $-p$ ein Quadratrest modulo D/p ist. Dann ist p irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, aber nicht prim.

Aufgabe 20.18. (3 Punkte)

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Bestimme die Primideale in R, die über $p = 29$ liegen und zeige, dass es sich um Hauptideale handelt.

Aufgabe 20.19. (4 Punkte)

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{15}]$. Bestimme die Primideale in R, die über $p = 17$ liegen (man gebe Idealerzeuger an). Handelt es sich um Hauptideale?

Aufgabe 20.20. (3 Punkte)

Zeige, dass 2 im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ irreduzibel, aber nicht prim ist. Wie sieht es in A_5 aus?

Abbildungsverzeichnis