Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2025**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 21

Übungsaufgaben

AUFGABE 21.1. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich mit der $\mathbb{Z}$-Basis 1 und ω und einem von 0 verschiedenen Ideal $\mathfrak{a}$. Zeige, dass

$$\{s \mid \text{Es gibt } r + s\omega \in \mathfrak{a}\}$$

ein Ideal in $\mathbb{Z}$ ist.

AUFGABE 21.2. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich und $f \in \mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ ein von 0 verschiedenes Ideal bezeichnet. Zeige, dass $N(f)$ ein Vielfaches der Norm von $\mathfrak{a}$ ist.

AUFGABE 21.3. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich und $\mathfrak{a}$ ein von 0 verschiedenes Ideal in R. Zeige

$$N(\mathfrak{a}) = \text{GgT}(\{N(f) \mid f \in \mathfrak{a}\}).$$

AUFGABE 21.4. Es sei $R = A_D$ ein quadratischer Zahlbereich und $f \in R$ mit $(f) \cap \mathbb{Z} = (N(f))$. Zeige auf zwei verschiedene Arten, dass es (mit der Notation des Beweises von Satz 21.1) eine $\mathbb{Z}$-Basis des Ideals (f) gibt mit $\beta = 1$.

AUFGABE 21.5. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R mit der Eigenschaft, dass die Norm von $\mathfrak{a}$ eine Primzahl ist. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein maximales Ideal ist.

AUFGABE 21.6. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in R. Zeige, dass es eine Primzahl p derart gibt, das $\mathfrak{m}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis der Form p und $\alpha + p\omega$ oder der Form p und $\alpha + \omega$ besitzt.

AUFGABE 21.7. Es sei $A_{10} = \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D \in 10$. Bestimme gemäß Satz 21.1 eine $\mathbb{Z}$-Basis des Ideals $(3 + 4\sqrt{10})$ und bestimme damit die Norm des Ideals.

Aufgabe 21.8. Es sei $A_{-10} = \mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -10$. Man zeige, dass das Ideal $(6+5\sqrt{-10}, 3-2\sqrt{10})$ ein Hauptideal ist und man gebe dafür einen Erzeuger an.

Aufgabe 21.9. Es sei $A_7 = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = 7$. Bestimme gemäß Satz 21.1 eine $\mathbb{Z}$-Basis des Ideals $(3+2\sqrt{7})$ und bestimme damit die Norm des Ideals.

Aufgabe 21.10. Es sei $D = 2,3 \mod 4$ eine quadratfreie Zahl und $f = n + m\sqrt{D}$. Es sei t der größte gemeinsame Teiler von n und m. Bestimme $(f) \cap \mathbb{Z}$ und β im Sinne von Satz 21.1.

Aufgabe 21.11.*

Es sei R ein Zahlbereich. Zeige unter Verwendung der Norm, dass jedes Element $f \in R$, $f \neq 0$, eine Faktorisierung in irreduzible Elemente besitzt.

Aufgabe 21.12. Es sei $D \neq 0,1$ eine quadratfreie Zahl mit $D = 1 \mod 4$. Es sei $\mathfrak{a} = (\omega)$ das Hauptideal im quadratischen Zahlbereich A_D. Zeige, dass der Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ kein Hauptideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ ist.

Aufgabe 21.13. Charakterisiere für den Ring

$$R = \mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}] \cong \mathbb{Z}[Y]/(Y^2+Y+1)$$

der Eisenstein-Zahlen die Primzahlen aus $\mathbb{Z}$, die in R verzweigt sind, träge sind oder zerfallen.

Aufgabe 21.14. Es sei p eine Primzahl und betrachte die quadratische Erweiterung $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$. Zeige, dass dies eine dichte Untergruppe der reellen Zahlen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.15. (3 Punkte)

Es sei H eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeige, dass entweder $H = \mathbb{Z}a$ mit einer eindeutig bestimmten nichtnegativen reellen Zahl a ist, oder aber H dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 21.16. (3 Punkte)

Es sei R ein vom Nullring verschiedener kommutativer Ring. Zeige unter Verwendung des Lemmas von Zorn, dass es maximale Ideale in R gibt.

Aufgabe 21.17. (3 Punkte)

Es sei R ein quadratischer Zahlbereich und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ zwei von 0 verschiedene Ideale. Zeige, dass die Norm von $\mathfrak{b}$ die Norm von $\mathfrak{a}$ teilt.

Aufgabe 21.18. (4 Punkte)

Es sei D eine quadratfreie Zahl, sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ und sei A_D der zugehörige Ganzheitsring. Zeige, dass für jede ungerade Primzahl p ein Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}]/(p) \longrightarrow (A_D)/(p)$$

vorliegt. Zeige durch ein Beispiel, dass dies bei $p = 2$ nicht sein muss.

Abbildungsverzeichnis