

Zahlentheorie**Arbeitsblatt 23****Übungsaufgaben**

AUFGABE 23.1. Bestimme den Hauptdivisor zu 840 in \mathbb{Z} .

AUFGABE 23.2. Bestimme den Hauptdivisor zu 840 in $\mathbb{Z}[i]$.

AUFGABE 23.3. Bestimme den Hauptdivisor zur Gaußschen Zahl $5 + 7i$.

AUFGABE 23.4. Es sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$ als ein Produkt

$$f = up_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$$

mit Primelementen p_i und einer Einheit u gegeben. Zeige, dass dann für den zugehörigen Hauptdivisor die Gleichheit

$$\operatorname{div}(f) = \nu_1(p_1) + \cdots + \nu_r(p_r)$$

gilt, wobei die (p_i) die von p_i erzeugten Primideale bezeichnen.

AUFGABE 23.5. Es sei R ein Zahlbereich und $f \in R$, $f \neq 0$. Zeige, dass der Hauptdivisor $\operatorname{div}(f)$ mit dem Divisor zum Hauptideal (f) übereinstimmt.

AUFGABE 23.6. Es sei R ein Zahlbereich und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein von 0 verschiedenes Ideal mit einem Erzeugendensystem $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_n)$. Zeige

$$\operatorname{div}(\mathfrak{a}) = \min \{ \operatorname{div}(f_i) \mid i = 1, \dots, n \}.$$

AUFGABE 23.7. Es sei R ein Zahlbereich und seien $f, g \in R$ von 0 verschiedene Elemente. Zeige, dass f genau dann ein Teiler von g ist, wenn für die Hauptdivisoren die Beziehung

$$\operatorname{div}(f) \leq \operatorname{div}(g)$$

gilt.

2

AUFGABE 23.8.*

Es sei R ein kommutativer Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ Ideale mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$.
Zeige, dass

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

gilt.

AUFGABE 23.9. Es sei \mathfrak{a} ein Ideal $\neq 0$ in einem Zahlbereich mit der eindeutigen Primidealzerlegung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{r_k}.$$

Zeige, dass

$$\mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{r_k} \cong \mathfrak{p}_1^{r_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k^{r_k}$$

gilt.

AUFGABE 23.10. Es sei \mathfrak{a} ein Ideal $\neq 0$ in einem Zahlbereich mit der eindeutigen Primidealzerlegung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{r_k}.$$

Zeige, dass es einen natürlichen Ringisomorphismus

$$R/\mathfrak{a} \cong R/\mathfrak{p}_1^{r_1} \times \cdots \times R/\mathfrak{p}_k^{r_k}$$

gibt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 23.11. (4 Punkte)

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -5$.
Betrachte in R die Zerlegung

$$2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

Zeige, dass die beteiligten Elemente irreduzibel, aber nicht prim sind, und bestimme für jedes dieser vier Elemente die Primoberideale. Bestimme die Hauptdivisoren zu diesen Elementen.

AUFGABE 23.12. (3 Punkte)

Es sei R ein Zahlbereich und $f, g \in R$, $f, g \neq 0$. Zeige ohne Verwendung des Bijektionssatzes, dass die Hauptdivisoren $\text{div}(f)$ und $\text{div}(g)$ genau dann gleich sind, wenn f und g assoziiert sind.

AUFGABE 23.13. (3 Punkte)

Es sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$, $f \neq 0$. Zeige die beiden folgenden Äquivalenzen: Das Element f ist genau dann prim, wenn der zugehörige Hauptdivisor $\operatorname{div}(f)$ die Gestalt $1\mathfrak{p}$ mit einem Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ besitzt. Das Element f ist genau dann irreduzibel, wenn $\operatorname{div}(f)$ minimal unter allen effektiven Hauptdivisoren $\neq 0$ ist.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5