Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2025**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 26

Übungsaufgaben

AUFGABE 26.1. Wir betrachten im Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subset \mathbb{C}$ das Ideal $\mathfrak{a} = (1 + 2\mathrm{i}) \subseteq \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

(a) Skizziere die Situation.
(b) Skizziere mit verschiedenen Farben die verschiedenen Äquivalenzklassen (Nebenklassen) zum Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.
(c) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es? Beschreibe ein Repräsentantensystem.
(d) Erstelle eine Verknüpfungstabelle für die Farben. Welche Farben sind zueinander invers?

AUFGABE 26.2. Skizziere den quadratischen Zahlbereich $A_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ als Gitter in $\mathbb{C}$. Skizziere ferner das Ideal $\mathfrak{p} = (2, 1 + \sqrt{-5})$ als Untergitter.

AUFGABE 26.3. Es sei A_D ein imaginär-quadratischer Zahlbereich mit der Gitterrealisierung

$$A_D = \Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega \subseteq \mathbb{C}$$

mit $\omega = \sqrt{D}$ bzw. $\omega = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$. Es sei $\Lambda \subseteq \Gamma$ ein volles Untergitter. Zeige, dass Λ genau dann ein Ideal in A_D ist, wenn

$$\omega\Lambda \subseteq \Lambda$$

gilt.

AUFGABE 26.4. Wir betrachten den Ring der Gaußschen Zahlen als Gitter $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\mathrm{i} \subset \mathbb{C}$. Wie sehen die gebrochenen Ideale von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ als geometrische Objekte in $\mathbb{C}$ aus?

AUFGABE 26.5. Sind alle Vierecke konvex?

AUFGABE 26.6. Zeige, dass der Durchschnitt von konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$ wieder konvex ist.

Aufgabe 26.7. Charakterisiere die Restklassengruppe eines Gitters $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 26.8. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ vollständige Gitter. Zeige, dass es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gibt, die einen Gruppenisomorphismus

$$\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$$

induziert.

Aufgabe 26.9. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ rationale vollständige Gitter. Zeige, dass es eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^n$$

gibt, die einen Gruppenisomorphismus

$$\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$$

induziert.

Aufgabe 26.10. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ rationale vollständige Gitter. Zeige, dass es ein rationales Gitter $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ gibt.

Aufgabe 26.11.*

Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Zeige, dass Y abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 26.12. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq X$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass auch die Vereinigung $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ kompakt ist.

Aufgabe 26.13. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass es Punkte $x \in X$ und $y \in Y$ mit der Eigenschaft gibt, dass für beliebige Punkte $P \in X$ und $Q \in Y$ die Abschätzung

$$d(x,y) \leq d(P,Q)$$

gilt.

Tipp: Man betrachte die Produktmenge $S \times T \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ und darauf die Abbildung $(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$. Man argumentiere dann mit Satz 36.12 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Aufgabe 26.14. Es sei X ein metrischer Raum und seien $Y, Z \subseteq X$ kompakte Teilmengen, die zueinander disjunkt seien. Zeige, dass es ein $d > 0$ derart gibt, dass für beliebige Punkte $P \in Y$ und $Q \in Z$ die Abstandsbedingung $d(P,Q) \geq d$ gilt.

Aufgabe 26.15. Zeige, dass ein Körper K genau dann die Charakteristik 0 besitzt, wenn die additive Gruppe $(K, +, 0)$ torsionsfrei ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.16. (4 Punkte)

Alle Springmäuse leben in $\mathbb{Z}^2$ und verfügen über zwei Sprünge, nämlich den Sprung $\pm(3,4)$ und den Sprung $\pm(5,2)$. Wie viele Springmaus-Populationen gibt es? Die Springmäuse Albert, Beate, Erich, Heinz, Sabine und Frida sitzen in den Positionen

$$(14,11),\ (13,15),\ (17,12),\ (15,19),\ (16,16) \text{ und } (12,20)\,.$$

Welche Springmäuse können sich begegnen?

Aufgabe 26.17. (4 Punkte)

Es sei U eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass ein Punkt $Q \in \mathbb{R}^n$ genau dann zur konvexen Hülle von U gehört, wenn es endlich viele Punkte $P_i \in U$, $i \in I$, und reelle Zahlen r_i, $i \in I$, mit $r_i \in [0,1]$, $\sum_{i \in I} r_i = 1$ und mit

$$Q = \sum_{i \in I} r_i P_i$$

gibt.

Aufgabe 26.18. (6 Punkte)

Skizziere zum Gitter $\mathbb{Z}^2$ in $\mathbb{R}^2$ drei Teilmengen, die die Maßbedingung des Gitterpunksatzes von Minkowski erfüllen, die den Nullpunkt, aber keine weiteren Gitterpunkte enthalten, und die jeweils zwei der drei Bedingungen konvex, kompakt und zentralsymmetrisch erfüllen.

Abbildungsverzeichnis