

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 27

Übungsaufgaben

AUFGABE 27.1. Es sei $R = A_{13}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = 13$. Zeige mittels Korollar 27.10, dass R faktoriell ist.

AUFGABE 27.2.*

Es sei R ein quadratischer Zahlbereich und $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal in R . Zeige, dass es ein Element $f \in \mathfrak{a}$ mit der Eigenschaft gibt, dass für alle maximale Ideale \mathfrak{m} gilt:

$$f \in \mathfrak{m} \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} .$$

AUFGABE 27.3. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich und $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal in R . Zeige, dass es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass das inverse Ideal \mathfrak{a}^{-1} zu \mathfrak{a}^m äquivalent ist.

AUFGABE 27.4. Zeige mit Korollar 27.10, dass der Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ faktoriell ist.

AUFGABE 27.5. Es sei R ein Zahlbereich und $f \in R$, $f \neq 0$. Definiere eine „Divisorenklassengruppe“ für die Nenneraufnahme R_f . Dabei soll wieder gelten, dass diese Divisorenklassengruppe genau dann 0 ist, wenn R_f faktoriell ist. Ferner soll es einen natürlichen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\text{DKG}(R) \longrightarrow \text{DKG}(R_f)$$

geben.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 27.6. (4 Punkte)

Es sei $R = A_{-43}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -43$. Zeige mittels Korollar 27.10, dass R faktoriell ist.

AUFGABE 27.7. (4 Punkte)

Es sei $R = A_{-67}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -67$. Zeige mittels Korollar 27.10, dass R faktoriell ist.

AUFGABE 27.8. (5 Punkte)

Es sei R ein quadratischer Zahlbereich. Zeige, dass es ein $f \in R$, $f \neq 0$, mit der Eigenschaft gibt, dass die Nenneraufnahme R_f faktoriell ist.

AUFGABE 27.9. (5 Punkte)

Es sei D quadratfrei und sei A_D der zugehörige quadratische Zahlbereich. Ferner sei D ein Vielfaches von 5 und $D \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Zeige: A_D ist nicht faktoriell.

Tipp: Siehe Aufgabe 25.21.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3