

**Zahlentheorie****Arbeitsblatt 8****Übungsaufgaben**

AUFGABE 8.1. Berechne für  $p = 17$  und  $k = 5$  den Ausdruck

$$S(k, p) = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{ki}{p} \right\rfloor.$$

Berechne damit  $\left(\frac{k}{p}\right)$  mit Hilfe von Lemma 8.1.

AUFGABE 8.2. Bestimme mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Zusätze, ob 17 ein quadratischer Rest modulo 19 ist, oder nicht.

AUFGABE 8.3. Bestimme mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Zusätze, ob 23 ein quadratischer Rest modulo 73 ist, oder nicht.

AUFGABE 8.4. Bestimme mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Zusätze, ob 50 ein quadratischer Rest modulo 83 ist, oder nicht.

AUFGABE 8.5.\*

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{563}{1231}\right).$$

Bemerkung: 563 und 1231 sind Primzahlen.

AUFGABE 8.6.\*

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{2333}{3673}\right).$$

AUFGABE 8.7. Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{1489}{2437}\right).$$

AUFGABE 8.8.\*

Zeige, dass  $-3$  genau dann ein Quadratrest modulo einer Primzahl  $p \neq 2$  ist, wenn  $p \equiv 0, 1 \pmod{3}$  ist.

AUFGABE 8.9.\*

Beschreibe mittels geeigneter Kongruenzbedingungen diejenigen ungeraden Primzahlen  $p$  mit der Eigenschaft, dass 7 ein Quadratrest modulo  $p$  ist. Gibt es unendlich viele solche Primzahlen?

AUFGABE 8.10.\*

Man gebe ein Beispiel an, wo das Jacobi-Symbol den Wert 1 hat, aber kein Quadratrest vorliegt.

AUFGABE 8.11. Suche für die folgenden zusammengesetzten Zahlen  $n$  eine zu  $n$  teilerfremde Zahl  $a$  derart, dass

$$a^{\frac{n-1}{2}} \not\equiv \left(\frac{a}{n}\right)$$

in  $\mathbb{Z}/(n)$  gilt.

a)  $n = 49$ .

b)  $n = 75$ .

AUFGABE 8.12. Zeige für eine positive ungerade Zahl  $n$  die Gleichung

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}.$$

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 8.13. (4 Punkte)

Bestimme die Menge  $M$  der Reste modulo 40 mit der Eigenschaft, dass für jede ungerade Primzahl  $p$  gilt: 10 ist ein Quadratrest modulo  $p$  genau dann, wenn  $p \pmod{40}$  zu  $M$  gehört.

AUFGABE 8.14. (5 Punkte)

Finde eine ungerade Primzahl  $p$  mit der Eigenschaft, dass alle Zahlen  $a \leq 10$  Quadratreste modulo  $p$  sind.

AUFGABE 8.15. (3 Punkte)

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left( \frac{337}{1339} \right).$$

AUFGABE 8.16. (3 Punkte)

Zeige für eine positive ungerade Zahl  $n$  die Gleichung

$$\left( \frac{2}{n} \right) = (-1)^{(n^2-1)/8}.$$

AUFGABE 8.17. (3 Punkte)

Zeige für zwei ungerade positive Zahlen  $n$  und  $m$  die Beziehung

$$\left( \frac{m}{n} \right) \left( \frac{n}{m} \right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{m-1}{2}}.$$



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5