Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2025**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.1. Zeige, dass eine Primzahl p höchstens eine Darstellung als Summe von zwei Quadraten besitzt.

Aufgabe 9.2.*

Zeige, dass eine ganze Zahl n genau dann die Differenz zweier Quadratzahlen ist, wenn der Exponent von 2 in der Primfaktorzerlegung von n gleich 0 oder ≥ 2 ist.

Aufgabe 9.3. Bestimme für eine oder mehrere Gaußsche Zahlen in dem Diagramm auf der Netzversion dieses Arbeitsblattes die Primfaktorzerlegung und trage das Ergebnis (mit Begründung) in den vorgesehenen Link ein. Man beschränke sich dabei auf Zahlen unterhalb der Hauptdiagonalen.

Aufgabe 9.4.*

Bestimme in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ die Primfaktorzerlegung von $8 - \mathrm{i}$. Begründe, warum die Faktoren prim sind.

Aufgabe 9.5. Zeige, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ die Restklassendarstellung

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$$

besitzen.

Aufgabe 9.6. Zeige, dass der Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ die Restklassendarstellung

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$$

besitzt.

Aufgabe 9.7. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass der Restklassenring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(n)$ genau n^2 Elemente besitzt.

Aufgabe 9.8. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/\mathfrak{a}$. Zu einem Ideal $I \subseteq R$ welches $\mathfrak{a}$ enthält, sei $I' = IR/\mathfrak{a}$ das zugehörige Ideal in S. Zeige, dass es eine kanonische Ringisomorphie

$$R/I \cong S/I'$$

gibt.

Aufgabe 9.9. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring

$$S = R/\mathfrak{a}.$$

Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die $\mathfrak{a}$ umfassen.

Aufgabe 9.10. Bestimme mit Hilfe von Bemerkung 9.4 eine Quadratwurzel von -1 in $\mathbb{Z}/(41)$.

Aufgabe 9.11.*

Zu einer natürlichen Zahl n bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, sie als Summe von zwei Quadratzahlen darzustellen, d.h. $r(n)$ ist die Anzahl der 2-Tupel

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 = n.$$

Beweise die Beziehung

$$r(2n) = r(n).$$

Zeige, dass die vorstehende Aussage nicht gilt, wenn man nur Lösungen in $\mathbb{N}^2$ betrachtet.

Aufgabe 9.12.*

Zu einer natürlichen Zahl n bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, sie als Summe von vier Quadratzahlen darzustellen, d.h. $r(n)$ ist die Anzahl der 4-Tupel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n.$$

Es sei u eine ungerade positive Zahl. Beweise die Beziehung

$$r(2u) = 3r(u).$$

Zeige, dass die vorstehende Aussage nicht gilt, wenn man nur Lösungen in $\mathbb{N}^4$ betrachtet.

Aufgabe 9.13. Es sei n eine natürliche Zahl, die modulo 8 den Rest 7 besitzt. Zeige, dass n nicht als Summe von drei Quadraten darstellbar ist.

Aufgabe 9.14. Bestimme für jede natürliche Zahl $n \leq 30$, ob sie sich als eine Summe von drei Quadratzahlen darstellen lässt.

Aufgabe 9.15. Bestimme für jede natürliche Zahl $n \leq 10$, auf wie viele verschiedene Arten sie sich als Summe von vier Quadratzahlen darstellen lässt, d.h. man bestimme die Anzahl der 4-Tupel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.16. (3 Punkte)

Bestimme für die Zahlen n zwischen 155 und 159, ob n die Summe von zwei ganzzahligen Quadraten ist. Man gebe alle möglichen Darstellungen an.

Aufgabe 9.17. (2 Punkte)

Finde für alle Zehnerpotenzen ≥ 10 eine Darstellung als Summe von zwei positiven Quadraten.

Aufgabe 9.18. (3 Punkte)

Bestimme die Primfaktorzerlegung der Gaußschen Zahl $39 + 52\mathrm{i}$.

Aufgabe 9.19. (4 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl, in deren Primfaktorzerlegung r Faktoren vorkommen. Wie viele Darstellungen als Summe von zwei Quadratzahlen besitzt n maximal?

Aufgabe 9.20. (4 Punkte)

Zeige: In $\mathbb{Z}/(p)$, wobei p eine Primzahl ist, lässt sich jedes Element als Summe von zwei Quadraten schreiben.

Aufgabe 9.21. (3 Punkte)

Es sei p eine Primzahl mit $p = 1 \mod 4$ und sei $p = x^2+y^2$ eine Darstellung als Summe von zwei Quadraten, $x, y \in \mathbb{N}$. Es sei k ein ungerader Teiler von x. Zeige: Dann ist k ein Quadratrest modulo p.

Aufgabe 9.22. (3 Punkte)

Zeige, dass man die 239 als eine Summe von neun Kubikzahlen darstellen kann, aber nicht als eine Summe von acht Kubikzahlen.

Abbildungsverzeichnis